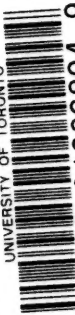


UNIVERSITY OF TORONTO



3 1761 01336894 9

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

ŒUVRES COMPLÈTES
DE
CHRISTIAAN HUYGENS.

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME QUATORZIÈME

CALCUL DES PROBABILITES. TRAVAUX DE
MATHÉMATIQUES PURES

1655—1666



233464
18. 6. 29

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF

1920

Q

113

1889

1888

4.14



CALCUL DES PROBABILITÉS. TRAVAUX
DE MATHÉMATIQUES PURES.

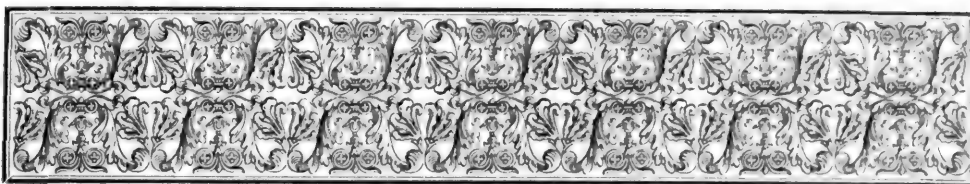
1655—1666.

1/21

1. The first part of the report is a general introduction to the subject of the study. It discusses the importance of the study and the objectives of the research. It also provides a brief overview of the methodology used in the study.

VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK.
DU CALCUL DANS LES JEUX DE HASARD.

1656—1657.



Avertissement.

Aperçu de la genèse de l'ouvrage „De ratiociniis in ludo aleæ” et des recherches subséquentes de Huygens sur des questions de probabilité.

On fait qu'en 1654 le Chevalier de Méré, joueur renommé et un peu mathématicien, proposa à Pascal quelques problèmes concernant les jeux de hasard ¹⁾, qu'il en résultait un échange de lettres ²⁾ entre Pascal et Fermat et que ce fut là l'origine du calcul des probabilités. Or, l'année suivante, le jeune Huygens ³⁾, déjà connu par quelques ouvrages de mathématiques ⁴⁾, se rendit à Paris en compagnie de son frère Louis et de son cousin Doublet ⁵⁾. Ce séjour, jugé alors nécessaire pour compléter l'éducation de gentilshommes hollandais de leur condition ⁶⁾, se prolongea de la mi-juillet jusqu'à la fin de novembre. Huygens ne

¹⁾ Voir la p. 290 du T. II des „Œuvres de Fermat, publiées par les soins de M. M. Paul Tannery et Charles Henry”, Paris, Gauthier—Villars, 1894.

²⁾ On trouve ces lettres, pour autant qu'elles ont été conservées, aux p. 288—314 du T. II de l'édition citée dans la note précédente.

³⁾ En juillet 1655, lorsqu'il arriva à Paris, Huygens avait l'âge de 26 ans.

⁴⁾ Les „Theoremata de quadratura hyperboles, etc.” (T. XI, p. 289), l'„Exetasis Cyclometria” (T. XI, p. 315), l'ouvrage „De circuli magnitudine inventa” (T. XII, p. 121) et les „Illustrium quorundam problematum constructiones” (T. XII, p. 183).

⁵⁾ Voir sur Lodewijk Huygens la note 1 de la p. 12 du T. I, et sur Philips Doublet la note 7 de la p. 294 du même Tome.

⁶⁾ Consultez la p. 356 du T. I, où Christiaan se permet de railler un peu les effets extraordinaires que son père attribuait à un tel séjour.

rencontra à cette occasion ni Fermat (qui demeurait à Toulouse), ni Pascal ¹⁾, ni Carcavy ²⁾ qui avait servi d'intermédiaire lors de l'échange de lettres de ces deux savants sur les problèmes de de Méré ³⁾; mais il fréquenta Claude Mylon, un des amis de Carcavy ⁴⁾, et Roberval à qui l'on s'était adressé, de même qu'à Pascal, pour la solution des problèmes qui occupaient de Méré ⁵⁾. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner que Huygens fut informé de l'existence de ces problèmes (dont l'un est resté connu sous le nom de „problème des partis” et dont nous appellerons les autres „les problèmes des dés”) sans avoir l'occasion d'en connaître les solutions obtenues par Pascal et Fermat, ou les méthodes suivies par eux.

De retour en Hollande, Huygens ne tarda pas à commencer la composition de son *Traité du calcul dans les jeux de hasard*, qui roule presque entièrement sur les problèmes prémentionnés. Déjà en mars 1656, il put écrire au professeur van Schooten qu'il lui enverrait ce qu'il préparait sur les jeux de dés ⁶⁾; le 18 avril il fit savoir à Roberval ⁷⁾ qu'il avait „depuis quelques jours écrit les fondements du calcul es jeux de hasard à la prière de Monsieur Schooten qui le veut faire imprimer”, et il lui posa le problème qu'on trouve dans la XIV^{ième} Proposition ⁸⁾ de son *Traité*, en ajoutant qu'il désirait fort voir si lui (Roberval) en trouverait

¹⁾ En 1657 Huygens écrivit à Cl. Mylon „Si l'on ne m'eust assuré lors que j'étois à Paris que ce dernier” [Pascal] „avoit entièrement abandonné l'estude de mathematiques j'auois tasché par tous moyens de faire connoissance avec luy”; voir la p. 7 du T. II.

²⁾ Voir la lettre de Huygens à Carcavy du 1 juin 1656 (p. 427 du T. I), où on lit: „Monsieur Mylon m'ayant enseigné le lieu de vostre demeure j'ay esté fort marry de ne vous point rencontrer. Mais je ne vous ay pas cherché en vain puis que en revenche vous avez eu la bonté de me venir trouver chez moy en m'escrivant en des termes si obligeants, et me donnant des louanges dont peut estre vous m'eussiez trouvé indigne si vous m'aviez connu de plus prez” Ajoutons qu'après le retour de Huygens en Hollande Carcavy devint un de ses correspondants les plus assidus.

³⁾ Voir les pp. 289 et 299 du T. II des *Œuvres* de Fermat.

⁴⁾ D'ailleurs Claude Mylon lui-même s'intéressait aussi aux problèmes sur les jeux de hasard; voir la p. 426 du T. I de notre publication.

⁵⁾ Voir la p. 290 du T. II des *Œuvres* de Fermat. Roberval avait même pris une certaine part à la discussion des problèmes en question; voir les pp. 302 et 310 du Tome cité.

⁶⁾ Voir la p. 389 du T. I de notre publication, où on lit „De usu aleæ brevi aliqua concinnavero quæ tibi mittam”.

⁷⁾ Voir la p. 404 du T. I.

⁸⁾ Voir la p. 87 du présent Tome.

⁹⁾ Voir la p. 73. L'absence de cette Proposition dans le manuscrit envoyé le 20 avril (voir la p. 404 du T. I) résulte de la comparaison de la Pièce N°. 289 du 6 mai, dont nous parlerons bientôt, avec le texte du *Traité* tel qu'il fut publié en 1657 en latin et en 1660 en hollandais.

la même solution. Enfin, le 20 avril, il envoya à van Schooten un manuscrit qui probablement ne différerait du texte que nous publions que par l'absence de la Prop. IX ⁹⁾ et des Exercices vers la fin du Traité, dont Huygens abandonne l'analyse à ses lecteurs ¹⁰⁾.

Il fut donc convenu entre van Schooten et lui que le petit traité de Huygens ferait inséré dans l'ouvrage „*Exercitationum mathematicarum Libri quinque* ¹¹⁾” dont van Schooten préparait la publication. Cet ouvrage paraîtrait en deux éditions, l'une latine, l'autre hollandaise ¹²⁾. L'édition latine devant être publiée la première, il était nécessaire de se procurer d'abord une version latine du manuscrit de Huygens que celui-ci avait écrit en hollandais parce que les termes latins lui manquaient. Après avoir achevé son ouvrage, il trouva cependant plusieurs de ces termes ¹³⁾. Par suite il se fit fort, si c'était nécessaire, d'élaborer une traduction latine; mais avant de s'y contacer il voulut savoir si van Schooten approuvait la manière dont il avait traité son sujet ¹⁴⁾. Celui-ci lui répondit qu'il ferait la traduction lui-même, mais le pria de lui envoyer tout ce qui pouvait faciliter cette tâche ¹⁵⁾. C'est à cette circonstance que nous devons la Pièce N°. 289, p. 414—416 du T. I, qui nous fait connaître la disposition

¹⁰⁾ En effet, la plupart de ces Exercices doivent leur origine à la correspondance de Huygens avec Carcavy et Mylon, qui commença seulement après le 20 avril 1656; voir les notes 7 et 13 de la p. 7.

¹¹⁾ Voir aux p. 50 et 52, qui suivent, le titre général de cet ouvrage et celui du „*Liber V*” qui précède le traité de Huygens.

¹²⁾ Voir, pour les titres de l'édition hollandaise, les p. 51 et 53.

¹³⁾ Sur une feuille détachée qui date probablement de ces temps, Huygens annota les mots suivants: „alea. sors. fortuna. casus. lusiones. deponavit. certare. sibi sumere. qui ter superior fuerit. qui majorem numerum jecerit. senarium jacere. jactus. contendere”.

¹⁴⁾ „Ecce tibi quæ de aleæ ludo videre desiderabas, sed vernaculo sermone conscripta, quod necessariò mihi faciendum fuit, quum vocabulis latinis destituerer. Sed absoluto opusculo pleraque reperi, adeo ut si opus fuerit omnia nunc latine reddere me posse arbitror. Prius tamen hæc uti sunt tibi exhibenda credidi ut videas nunquid eo ordine quo hic digesta sunt totidemque verbis, an alia ratione, concinnata operi tuo accedere velis; et an omnia satis dilucidè sint explicata”; voir la lettre du 20 avril 1656, p. 404—405 du T. I.

¹⁵⁾ „Quoniam autem opere absoluto pleraque à Te reperta dicis, quæ si opus exigeret nullo negotio eadem Latinè reddere possent, optarem, ut Latinè hæc mihi versuro, cui longè minus ista ex voto succedent atque multò futura sunt difficiliora, ea quæ idem opus facilitare ac promovere queant à Te suppeditarentur”; voir la p. 408 du T. I. Plus tard Huygens a renouvelé son offre de traduire lui-même son traité, ce que van Schooten accepta dans sa réponse du 13 juillet 1656 (p. 454 du T. I). Cela n'a pas empêché que finalement la traduction fut faite par van Schooten, comme il résulte de sa lettre du 18 mars 1657 (p. 19 du T. II) où on lit „Ecce tibi, Vir Clarissime, tractatum tuum de Ratiocinijs in aleæ ludo, à me Latinè versum”.

générale du Manuscrit envoyé, le 20 avril, à van Schooten. Lorsqu'on compare les phrases latines, suggérées par Huygens dans cette Pièce, avec le texte latin, tel qu'il parut dans les „Exercitationes”, on peut constater que, dans sa traduction, van Schooten n'a fait qu'un usage limité des indications de Huygens. Ajoutons que celui-ci n'était pas tout-à-fait satisfait de cette traduction ¹⁾; ce qui fut pour nous une raison de plus de préférer pour notre texte la version hollandaise à la version latine, quoique cette dernière eût paru trois années plus tôt que l'autre.

En attendant la publication de son Traité, qui n'eut lieu que l'année suivante, Huygens devint de plus en plus anxieux de savoir si ses solutions et sa méthode s'accordaient avec celles des mathématiciens français. Ne recevant aucune réponse à sa lettre du 18 avril ²⁾ à Roberval, il s'adressa à Mylon pour lui poser le même problème ainsi que quelques autres plus simples ³⁾. Les solutions, en partie fausses ⁴⁾, que Mylon lui envoya ne peuvent avoir eu beaucoup d'intérêt pour lui; mais c'est à cette occasion que, par l'intermédiaire de Mylon et de Carcavy, le problème principal parvint à la connaissance de Fermat et de Pascal ⁵⁾. En effet, le 22 juin 1656 ⁶⁾ Carcavy fit part à Huygens de la solution de Fermat de ce problème, laquelle se trouvait être conforme à celle de Huygens. De plus, Fermat posa à Huygens d'autres questions plus difficiles ⁷⁾. Or, le même après-midi qu'il les reçoit, Huygens „trouve la solution de toutes, quant à la méthode, non pas quant au calcul; qui est si long dans quelques unes d'elles qu'[il n'a] pas voulu s'amuser à le poursuivre jusques au bout ⁸⁾”.

¹⁾ Voir sa lettre à de Sluse du 27 juillet 1657 où on lit (p. 42 du T. II) „Schotenij librum recens editum quam primum potero tibi mittam: Brevem quoque tractatum meum de Ratio-cinijs in ludo Aleæ, adjunctum videbis, sed non satis commode è lingua Belgica, qua fuerat à me conscriptus in latinam conversum”. Il est vrai que Huygens avait eu en révision manuscrit de la traduction; voir la p. 8 qui suit.

²⁾ Voir la p. 4.

³⁾ Cette lettre de Huygens à Mylon nous manque, comme aussi la réponse de Mylon du 13 mai, mais la lettre de Huygens à Mylon du 1 juin 1656 (p. 426 du T. I) nous fait connaître suffisamment leur contenu. Il en résulte qu'outre le problème de la Prop. XIV (p. 87 du présent Tome) Huygens avait posé à Mylon des questions sur l'avantage de la primauté dans les cas où le jeu est gagné par celui qui réussit le premier à faire un coup déterminé.

⁴⁾ Ses solutions ne sont justes que pour le cas où l'on joue avec un seul dé. Elles sont fausses pour le cas de deux dés à chances égales pour les deux joueurs, et pour le problème principal, où les chances des deux joueurs sont inégales, parce que l'un gagne quand 7 points et l'autre quand 6 points ont été amenés avec deux dés.

⁵⁾ Voir les pp. 418 et 432—434 et quant à Pascal les pp. 439 et 492 du T. I.

⁶⁾ Voir les p. 432—434 du T. I.

On trouvera le résultat des recherches de cet après-midi dans la lettre de Huygens à Carcavy du 6 juillet 1656⁹⁾, laquelle était destinée à être communiquée à Mylon, à Fermat et à Pascal¹⁰⁾ afin de savoir si ce que ces deux derniers avaient trouvé était conforme à „ce qu'[il] en explique” dans cette lettre. Outre les solutions des problèmes prémentionnés, la lettre contient la Prop. III (p. 65), sur laquelle toutes ces solutions étaient fondées.

La réponse de Carcavy se fit longtemps et impatiemment¹¹⁾ attendre. Quand elle arriva, au commencement d'octobre¹²⁾, elle apprit à Huygens que Pascal se servait de la même proposition¹³⁾ que lui mais qu'il ne voyait pas de quelle manière celle-ci pourrait s'appliquer au problème des partis¹⁴⁾ dont „le sieur Pascal n'a trouvé la règle que lors qu'un des joueurs a une partie à point, ou quand il en a deux à point”. C'est sans doute par suite de cette remarque¹⁵⁾ que Huygens reprit ses recherches sur ce dernier problème et qu'il écrivit, d'abord

⁷⁾ C'est à ces questions que Huygens a emprunté le premier et le troisième des Exercices qu'il a joints à son ouvrage; voir les notes 2 et 4 des p. 88—89 du présent Tome.

⁸⁾ Voir sa lettre à Mylon du 6 juillet 1656, p. 448 du T. I. Elle est la réponse à la lettre de Mylon du 23 juin (p. 438 du T. I), dans laquelle, sans doute, celle de Carcavy du jour précédent (p. 431 du même Tome) était incluse.

⁹⁾ Voir les p. 442—446 du T. I.

¹⁰⁾ Voir la p. 446 du T. I.

¹¹⁾ Voir la lettre du 27 juillet 1656 (p. 466 du T. I) à Roberval, où il prie celui-ci de s'informer pourquoi ni Mylon ni Carcavy ne lui ont répondu.

¹²⁾ Voir la lettre de Carcavy du 28 septembre 1656, p. 492 du T. I.

¹³⁾ Cette lettre contenait, en outre, un problème que Pascal avait posé à Fermat et que Huygens a placé parmi les Exercices à la fin de son ouvrage; voir la note 1 de la p. 90.

¹⁴⁾ Il y avait là un malentendu. Les cas relativement simples du problème des partis, traités par Huygens, furent résolus par Pascal presque entièrement de la même façon que par Huygens (voir les pp. 290—292, 300 et 306—307 du T. II des Œuvres de Fermat, citées plus haut dans la note 1 de la p. 3), tandis que Fermat les résolut à l'aide de l'analyse combinatoire (voir les pp. 290, 300—305, 309 et 310—312 du même Tome). Le problème auquel Carcavy faisait allusion était bien plus difficile et plus général; il s'agissait de formuler „donné un tel nombre de parties qu'on voudra” une règle générale pour trouver ce que Pascal appelait: la valeur de la première partie, de la deuxième partie, etc.; c'est-à-dire la valeur de ce que le joueur qui avait perdu devrait payer à l'autre joueur après une telle partie dans le cas où l'on conviendrait de ne pas pousser plus loin le jeu. C'est ce problème que Pascal ne savait pas résoudre sans recourir à l'analyse combinatoire et alors seulement pour la première et la deuxième partie (voir encore les p. 292—295 du T. II des Œuvres de Fermat et consultez à propos du problème des partis les p. 21—25 du présent Avertissement).

¹⁵⁾ Consultez encore la lettre de Huygens du 12 octobre 1656 à Carcavy (p. 505 du T. I), où on voit que Huygens avait, en effet, compris à tort que la remarque de Pascal se rapportait à tous les cas du problème des partis.

l'Appendice I (p. 92—95), destiné probablement à être communiqué à Pascal ¹⁾, et ensuite la Prop. IX (p. 73—77) qu'il allait joindre au petit traité qu'il avait composé ²⁾.

Cependant on continua avec la lenteur habituelle de ces temps l'impression de l'ouvrage de van Schooten où le traité de Huygens est inséré. En mars 1657 van Schooten avertit Huygens que dans quelques semaines on en ferait à ce traité. Il lui envoya donc le manuscrit de la traduction latine pour y ajouter ce que bon lui semblerait ³⁾. Huygens le lui retourna ⁴⁾ avec quelques changements et quelques additions ⁵⁾, en y joignant la version latine de sa lettre à van Schooten ⁶⁾, datée du 27 avril 1657, qui précède son Traité en guise de préface.

Enfin, en août ou septembre 1657, l'impression de l'édition latine de l'ouvrage de van Schooten fut achevée ⁷⁾. L'édition hollandaise se fit attendre encore trois années, mais il nous semble inutile d'exposer ici les raisons de ce retard ⁸⁾.

Avant de passer à d'autres sujets nous voulons ajouter encore quelques mots sur l'histoire du Traité „De ratiociniis in ludo alex” après sa publication en 1657.

Comme on le fait, plusieurs des œuvres les plus considérables de Huygens ne parurent que longtemps après leur première rédaction ⁹⁾; ce qui lui coûta la

¹⁾ Ce qui toutefois n'a pas eu lieu.

²⁾ La correspondance avec les savants français sur les problèmes du jeu se continua encore pendant quelques mois par les lettres échangées entre Mylon et Huygens le 8 déc. 1656 (p. 524 du T. I), le 5 janvier 1657 (p. 1 du T. II), le 1 févr. 1657 (p. 7 du T. II) et le 7 mars 1657 (p. 8 du T. II).

³⁾ Voir la lettre de van Schooten du 18 mars 1657, p. 19 du T. II.

⁴⁾ Voir la lettre du 21 avril 1657, p. 27 du T. II.

⁵⁾ C'est-à-dire la Prop. IX, p. 73—77 du présent Tome, et les Exercices, p. 89—91; voir les notes 9 et 10 des p. 4—5.

⁶⁾ Cette version latine est donc la version primitive. On la trouve aux p. 59—60 du T. II. La version hollandaise de la même lettre (pp. 57—59 du présent Tome) ne fut envoyée à van Schooten que le 28 septembre 1657 (voir la p. 57 du T. II).

⁷⁾ Voir p. e. la lettre de de Sluse du 4 septembre 1657 (p. 51 du T. II) d'où il s'ensuit que de Sluse venait de recevoir alors cette édition.

⁸⁾ Consultez à ce propos la lettre de van Schooten du 1 octobre 1657, p. 62 du T. II.

⁹⁾ Le Traité „De iis quæ liquido supernatant”, qui contient tant de recherches intéressantes, était entièrement inédit lorsque nous l'avons reproduit au T. XI (p. 81—194) de notre publication; la „Dioptrique”, rédigée en grande partie en 1653 et en 1666, ne parut, avec plusieurs autres ouvrages, qu'en 1703 comme œuvre posthume; le „Traité de la lumière” et le „Discours de la cause de la pesanteur”, publiés en 1690, existaient en manuscrit, à l'exception de quelques parties, respectivement dès 1678 et dès 1669.

priorité sur bien des points importants. Grâce à van Schooten — on doit le reconnaître — la publication du petit traité sur les probabilités ne fut pas différée. L'ouvrage fut accueilli favorablement par les contemporains ¹⁰). Pendant plus d'un demi-siècle (c'est-à-dire jusqu'à la publication des ouvrages de de Monmort ¹¹), de de Moivre ¹²), de Jacques Bernoulli ¹³) et de Nicolaas Struyck ¹⁴), il forma l'unique introduction existant à la théorie des probabilités. Dans cet intervalle, ou peu après, deux traductions anglaises en parurent ¹⁵). Enfin, Jacques

¹⁰) Carcavy, qui trouvait la méthode de Huygens „admirable”, écrivit à Mylon que „Monsieur Pascal en auoit jugé comme luy” (voir la p. 1 du T. II); de Sluse appela cette œuvre de Huygens „docta, acuta, Te digna” (p. 51 du T. II); Wallis la loua dans une lettre à Van Schooten (voir la réponse de Van Schooten à la p. 833 de l'ouvrage de Wallis „De Algebra Tractatus cum variis Appendicibus. Operum mathematicorum Volumen alterum, Oxoniæ, 1693), Leibniz en parla dans ses „Meditationes” comme suit: „Christiani Hugenii ratiocinia de lusu aleæ... sunt elegans specimen ratiocinationis de gradibus probabilitatis” (Opera omnia, publiés par Dutens, vol. VI, part. I, p. 318).

¹¹) „Essay d'analyse sur les jeux de hazard, seconde édition Revûe & augmentée de plusieurs Lettres. Paris, Jacques Quillau, 1713”. Une première édition parut en 1708; voir l'ouvrage de Todhunter, „History of the theory of probability, Cambridge and London, Macmillan, 1865”, p. 79.

¹²) „The Doctrine of Chances: or a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play. The second edition, Fuller, Clearer, and more Correct than the First. By A. De Moivre, fellow of the Royal Society and Member of the Royal Academy of Sciences of Berlin, London, H. Woodfall, 1738”. Une première édition parut en 1718. Elle fut précédée en 1711 par un Mémoire dans les „Philosophical Transactions”, p. 213—264 du T. XXVII, intitulé „De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus”.

¹³) „Jacobi Bernoulli, Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal. Mathematici Celeberrimi, Ars conjectandi, Opus posthumum. Accedit Tractatus de Series infinitis, Et Epistola Gallicè scripta de Ludo Pilæ reticularis. Basilæ, Impensis Thurnisiorum, Fratrum. 1713”.

¹⁴) „Uytrekening der Kansen in het spelen, door de Arithmetica en Algebra, beneevens eene Verhandeling van Looterijen en Interest, door N. S., Amsterdam, weduwe Paul Marret, 1716”. Une traduction française fut récemment publiée par la Société générale néerlandaise d'assurances sur la vie et de rentes viagères, établie à Amsterdam, dans l'ouvrage: „Les Œuvres de Nicolas Struyck (1687—1769) qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères, tirées des œuvres complètes et traduites du hollandais par J. A. Vollgraff, Amsterdam, 1912” (p. 1—118).

Nicolaas Struyck naquit à Amsterdam le 19 mai 1687 et y mourut le 15 mai 1769. L'ouvrage cité, trop peu connu, mérite d'être mentionné avec ceux de de Monmort, de de Moivre et de Bernoulli. Struyck en écrivit plusieurs autres sur la géographie, l'astronomie, la comptabilité et le calcul des rentes viagères. Pendant sa vie il jouit d'une grande réputation et correspondit avec beaucoup de savants étrangers. Il fut nommé, en 1749, membre de la Société Royale de Londres et, en 1755, correspondant de l'Académie des Sciences de Paris.

¹⁵) La première, en 1692, dans l'ouvrage anonyme „Of the laws of chance”, etc., attribué

Bernoulli, en composant son „Ars conjectandi”, y inféra en entier le *Traité de Huygens* comme „Pars prima, complectens Tractatum Hugonii de Ratiociniis in Ludo Aleæ, cum Annotationibus Jacobi Bernoulli”¹⁾.

En 1665, à l'occasion d'une lettre de son ami Johan Hudde, le futur bourgmestre d'Amsterdam²⁾, l'attention de Huygens fut dirigée à nouveau sur les problèmes concernant les jeux de hasard. Dans cette lettre³⁾ Hudde lui communiqua ses solutions des Exercices II et IV, proposés par Huygens vers la fin de son *Traité*⁴⁾. En cherchant lui-même leurs solutions⁵⁾, Huygens en trouva qui différaient de celles de Hudde; ce qu'il lui fit savoir dans sa réponse du 4 avril 1665⁶⁾. En même temps, il lui posa une nouvelle question, savoir : de déterminer le désavantage du joueur qui fait le premier coup quand deux joueurs jettent à tour de rôle croix ou pile à condition que celui qui amène pile doit mettre chaque fois un ducat et que celui qui jette croix prendra tout ce qui est mis.

par Todhunter (*History of the theory of probability*, p. 48—49) à John Arbuthnot. La seconde, publiée en 1714 par W. Browne, est intitulée „Christiani Hugonii Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleæ. Or the value of all chances in games of fortune; cards, dice, wagers, lotteries, &c. mathematically demonstrated. London, S. Keimer, 1714” (Todhunter, p. 199).

¹⁾ Ajoutons qu'en juillet 1895, à l'occasion du deuxième centenaire du décès de Huygens, la Direction de la Société d'assurances, mentionnée dans la note 14 de la p. 9, publia, comme N° 690 de ses Communications (*Mededeelingen van de Directie*), une reproduction du *Traité de Huygens* dont l'exécution typographique ressemble à celle de l'édition hollandaise primitive. De plus, elle donna une traduction française de ce *Traité*, due à M. K. R. Gallas, aux p. 43—56 de l'ouvrage „Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas, 1898”. Cette traduction nous était inconnue lorsque nous avons préparé la nôtre.

²⁾ Voir sur Hudde la note 2, p. 514 du T. I; mais on doit corriger l'année de sa naissance. En effet, il naquit en avril 1628, comme cela résulte de l'article de M. D. J. Korteweg „Das Geburtsjahr von Johannes Hudde”, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, T. 41, 1896, p. 22. Hudde n'avait donc qu'une année de plus que Huygens. Probablement il avait étudié les mathématiques, comme Huygens, sous la direction du professeur van Schooten.

³⁾ Nous ne possédons pas cette lettre, mais la réponse que nous mentionnons quelques lignes plus bas nous en fait connaître le contenu.

⁴⁾ Voir les p. 89—91 du présent Tome.

⁵⁾ Voir les §§ 1—3 de l'Appendice II, p. 96—99.

⁶⁾ Voir la p. 304 du T. V.

Cette question fit naître toute une série de problèmes touchant l'avantage ou désavantage de la primauté sous des conditions variées. Plus bas nous traitons ces problèmes avec quelque détail ⁷⁾.

Quant à la divergence des solutions des Exercices II et IV, elle parut être due aux interprétations différentes données par Hudde et Huygens à ces Exercices. Comme nous le montrons dans la note 3 de la p. 88, l'Exercice II n'admet pas moins de trois interprétations, dont la première fut adoptée par Huygens ⁸⁾ et la deuxième par Hudde ⁹⁾. De même l'Exercice IV donne lieu à deux conceptions dont l'une, conduisant au résultat des §§ 2 et 3 de l'Appendice II ¹⁰⁾, fut choisie par Huygens, et l'autre, aboutissant au résultat du § 4 du même Appendice ¹¹⁾, fut admise par Hudde ¹²⁾.

En effet, les solutions de Hudde de ces problèmes étaient correctes (à part une légère erreur de calcul), et il en est de même de ses solutions d'autres problèmes qu'on rencontre dans sa correspondance avec Huygens ¹³⁾. Plus on étudie ses longues lettres, par trop prolixes et difficiles à comprendre à cause des malentendus continuels qui s'élèvent entre lui et Huygens, plus on s'aperçoit de la perspicacité de leur auteur. Quant aux méthodes dont il se sert, il ne les expose qu'exceptionnellement et encore en partie seulement ¹⁴⁾, mais les indications qu'il donne suffisent pour conclure qu'elles ne différaient pas beaucoup de celles de Huygens ¹⁵⁾.

⁷⁾ Voir les p. 31—48 de cet Avertissement.

⁸⁾ Voir la p. 96 du présent Tome.

⁹⁾ Voir la p. 306 du T. V. En effet, après la correction apportée par Hudde dans sa lettre du 29 juin 1665 (p. 383 du T. V), sa solution correspond entièrement à celle obtenue dans les mêmes hypothèses par Jacques Bernoulli p. 60 de son „Ars conjectandi” et par de Moivre, p. 220 de son „Essay d'analyse sur les jeux de hazard”.

¹⁰⁾ Voir les p. 97—99.

¹¹⁾ Voir les p. 100—101.

¹²⁾ Voir la p. 307 du T. V.

¹³⁾ Comparez le dernier alinéa de la p. 37.

¹⁴⁾ Voir p. e. les pp. 413—416, 446—448, 463—471 du T. V.

¹⁵⁾ Outre les solutions des Exercices II et IV du *Traité de Huygens*, et des problèmes concernant la primauté sur lesquels nous reviendrons, nous connaissons encore la solution que Hudde donna à un autre problème. On trouve cette solution aux p. 470—471 du T. V. Le problème présente une grande ressemblance avec le dernier des Exercices de Huygens (p. 91 du présent Tome), seulement, le nombre des jetons de chaque joueur est réduit de 12 à 3 et leurs chances à chaque coup sont représentées respectivement par $\frac{b}{b+c}$ et $\frac{c}{b+c}$. Comme

Nous avons à parler ensuite, en suivant l'ordre chronologique, de quelques applications de la théorie de la probabilité à des problèmes concernant la durée de la vie. Déjà en 1662, Moray avait fait parvenir à Huygens ¹⁾ l'ouvrage de John Graunt „Natural and political observations. ., made upon the Bills of Mortality” ²⁾, qui venait de paraître. Huygens avait beaucoup apprécié cet ouvrage, mais il ne s'occupa activement des matières qu'on y trouve traitées qu'au moment où il reçut, de son frère puîné Lodewijk, une lettre, datée du 22 août 1669, dans laquelle celui-ci l'informait ³⁾ de ce qu'il avait „fait une Table ces jours passez du temps qu'il reste à vivre à des personnes de toute forte d'âge. C'est une consequence” dit-il „que j'ai tiré de cette table du livre Anglois of the Bills of mortality, de la quelle je vous envoie ici une copie, afin que vous preniez la peine de faire un peu les mêmes supputations, et que nous puissions voir comme nos calculs s'accorderont”. Or, cette copie, qu'on trouve à la p. 519 du T. VI, donne pour chaque centaine de nouveaux-nés le nombre des survivants à l'âge de 6, 16, 26 ans, et ainsi de suite, avec des intervalles de dix années.

Dans sa réponse à Lodewijk, Christiaan lui fait remarquer ⁴⁾ „qu'à fin que ce calcul fust exact il faudroit avoir une table qui marquast d'année en année combien il meurt des personnes de 100 qu'on suppose, et” poursuit-il „il faut que vous l'ayez supplée par quelque moyen comme j'en scay pour cela ⁵⁾, ou autrement vous ne sauriez déterminer au vray, combien doit vivre une personne de 6, 16 ou 26 ans &c., et encore moins de quelque âge moyen entre ceux là. comme vous l'avez entrepris de vous et de moy. Je crois donc que vous n'en decidez qu'à peu pres” et il ajoute encore „j'ay envie de suppleer la table comme

dans cet Exercice, le jeu ne finit pas avant que tous les jetons aient passé dans une même main.

Hudde trouve les espérances des joueurs respectivement égales à $\frac{b^3}{b^3 + c^3}a$ et à $\frac{c^3}{b^3 + c^3}a$,

où a représente l'enjeu. Cette solution est correcte. Elle correspond à celle donnée par Jacques Bernoulli, p. 68—69 de son „Ars conjectandi”. Comparez encore l'Appendice VI aux p. 151—155 du présent Tome.

¹⁾ Voir les pp. 94, 95, 130 et 149 du T. IV.

²⁾ Voir, pour le titre complet, la note 7 de la p. 94 du T. IV.

³⁾ Voir la p. 483 du T. VI.

⁴⁾ Voir la p. 484 du T. VI.

⁵⁾ Huygens fait allusion ici à la méthode graphique qu'il expose dans la pièce N°. 1778, p. 531 du T. VI. En effet, la courbe de la mortalité (ou „courbe de vie” comme il l'appelle), qu'on y trouve construite avec beaucoup de soin à l'aide des données de la petite table de Graunt, est bien la première représentation graphique de la mortalité qui ait été faite.

j'ay dit et refoudre les problemes qu'on peut proposer en cette matiere qui est assez subtile. Vostre methode ne scauroit estre la mesme que la mienne, et je feray bien aise de la voir".

Une lettre du 30 octobre 1669 ⁶⁾ nous fait connaître la méthode suivie par Lodewijk. Il a suppléé aux lacunes de la table de Graunt en supposant la mortalité constante dans chaque intervalle de dix années. Partant de cette supposition il a calculé d'une manière parfaitement exacte ce qu'on appelle aujourd'hui la „vie moyenne" des personnes qui ont atteint l'âge donné. Toutefois, comme cela résulte de la même lettre, Lodewijk ne s'était pas suffisamment rendu compte de la différence qui existe entre la vie moyenne et la vie probable; différence que Christiaan lui expliqua dans sa lettre du 21 novembre ⁷⁾. En même temps il promit de lui envoyer une autre fois „la ligne de vie" ⁸⁾ avec la pratique d'icelle et même une table des vies à chaque âge d'année en année, qui ne me coustera guere" ⁹⁾.

C'est à propos de la même lettre de Lodewijk du 30 octobre que Christiaan composa la Pièce importante (p. 526—531 du T. VI) qu'il a intitulée: „En examinant le calcul de mon frere Louis." Il y met par écrit, au courant de la plume, les idées qui lui viennent pendant et après cet examen. Entre autres, il s'y pose les problèmes suivants (dans lesquels il s'agit toujours de la durée moyenne des temps mentionnés): „Un homme de 56 ans espouse une femme de 16 ans, combien peuvent ils faire estat de vivre ensemble sans que l'un ni l'autre meure. Ou bien si on m'avoit promis 100 francs au bout de chaque an qu'ils vivront ensemble, pour combien seroit il juste qu'on rachetast cette obligation ¹⁰⁾. Item dans combien de temps doivent ils mourir tous deux. En combien de temps

⁶⁾ Voir les p. 515—517 du T. VI.

⁷⁾ Voir la p. 525 du T. VI.

⁸⁾ Voir la note 5 qui précède.

⁹⁾ Christiaan a rempli cette promesse dans sa lettre du 28 novembre 1669 (p. 538—539 du T. VI). Cependant, au lieu de la ligne en question „qui ne sert que pour les gageures" il envoya une autre représentation graphique qui donne directement les „restes de vie de chaqu'age".

¹⁰⁾ On ne doit pas supposer toutefois que Huygens ait pensé, en posant ce problème, à la réduction des sommes à payer à leur valeur comptante. Il néglige cette même réduction quand il écrit dans sa lettre du 28 novembre: „Ce sont donc deux choses différentes que l'esperance ou la valeur de l'age futur d'une personne, et l'age auquel il y a egale apparence qu'il parviendra ou ne parviendra pas. Le premier est pour regler les rentes à vie, et l'autre pour les gageures".

mourront 40 hommes de 46 ans chacun? Combien vivra le dernier de 2 personnes de 16 ans. Dans combien de temps mourra un de 2 personnes de 16 ans”.

De ces problèmes assez compliqués Huygens ne résout que l'avant-dernier¹⁾, le manuscrit s'arrêtant au milieu du calcul qui doit servir à la solution du dernier. Toutefois, il est clair que la méthode ingénieuse qu'il applique à ces deux problèmes aurait pu conduire, après quelques modifications évidentes, à la solution des autres²⁾.

Il est vrai que Huygens a été consulté par Hudde, en 1671, sur la méthode suivie par le célèbre Pensionnaire de Hollande et de West-Frise, Johan de Witt, dans ses calculs sur la valeur des rentes viagères que les États de Hollande se proposaient de négocier³⁾. Cependant, la Correspondance de Huygens de cette année nous apprend qu'il n'a pas pris une part active dans cette entre-

¹⁾ Dans cette solution Huygens n'emploie pas la représentation graphique qu'on trouve en regard de la p. 531 du T. VI. Il y suppose, comme Lodewijk l'avait fait, que la mortalité est constante dans les intervalles de dix ans. En admettant cette hypothèse, la solution est exacte, mais il y a dans la Pièce, où elle est reproduite, une erreur du copiste bien regrettable. En effet, on doit lire comme suit la phrase qui commence à la ligne 17 d'en bas de la p. 529 du T. VI: „Et encore 25 chances qui valent à un homme de 16 ans 29,40 ans”. Voici le calcul (qu'on ne trouve pas dans la Pièce) qui explique ces 29,40 ans:

9 chances à 15 ans font	135
6 " " 25 " "	150
4 " " 35 " "	140
3 " " 45 " "	135
2 " " 55 " "	110
1 " " 65 " "	65
25	$\frac{735}{25}$ fait 29,40.

²⁾ Comparez encore sa lettre du 28 novembre 1669 à Lodewijk, où on lit (p. 538—539 du T. VI), à propos des deux derniers problèmes, qu'il n'en a pas encore calculé la solution, mais qu'il voit le moyen de le faire; après quoi il ajoute: „Les aages des 2 personnes étant posez différents comme l'une de 16 ans et l'autre de 56, cela apporteroit encore quelque changement mais il n'y auroit pas grande difficulté apres qu'on auroit trouvé la solution dans les aages egaux”.

³⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 6 qui commence à la p. 59 du T. VII.

⁴⁾ Cette Correspondance (voir les pp. 59, 95—96, 103—104 du T. VII et la p. 728 du T. X) est d'ailleurs d'un certain intérêt pour la connaissance de l'histoire des travaux de Hudde et de Johan de Witt sur les rentes viagères. C'est ce qui a été compris par la Direction de la

prife ⁴⁾). Dans sa lettre du 3 octobre ⁵⁾, datée de Paris, il s'excuse auprès de Hudde de n'avoir pu trouver plus tôt le loisir de réfléchir aux calculs des rentes viagères à cause des affaires qu'il a sur les bras, et de ne pouvoir répondre à toutes les questions qu'il lui a posées. Il se borne donc à approuver d'une façon générale les méthodes suivies par le Pensionnaire, en y comprenant notamment celle qui concerne le calcul sur 2, 3 ou plus de vies ⁶⁾.

En 1676, Huygens fut ramené à la considération de quelques problèmes du jeu par une communication de son ami Dierkens ⁷⁾. Il paraît que celui-ci s'était occupé à chercher la solution de l'un des Exercices proposés par Huygens vers la fin de son Traité ⁸⁾ et qu'il n'y avait pas réussi entièrement ⁹⁾.

C'est probablement à cette même occasion que Huygens composa l'Appendice VI (p. 151—155), daté d'août 1676, où il reprend et généralise la solution du dernier de ces Exercices; solution qu'il ajouta à l'énoncé du problème sans

Société néerlandaise des assurances sur la vie. Dans ses „Communications” (voir la note 1 de la p. 10) elle a reproduit, en 1896, aux N^{os}. 734 et 754, les passages de cette Correspondance qui concernent le calcul des rentes viagères; à l'exception toutefois du contenu de la lettre du 2 octobre 1671 qui ne fut découverte que vers 1905 dans une collection privée (voir la note 1 de la p. 725 du T. X). Dans ses „Mémoires” datant de 1898 (voir la note 1 de la p. 10) elle a publié aux p. 76—83 des traductions françaises des passages qui lui étaient connus alors.

⁵⁾ Voir les p. 728—729 du T. X.

⁶⁾ Avant 1896 on savait que Hudde et de Witt avaient fait des calculs sur les rentes viagères en partant des hypothèses assez arbitraires exposées par de Witt dans son „Waerdye van Lijfrenten naer proportie van Los-renten”, mais on ne savait pas qu'ils avaient fait encore d'autres calculs fondés sur les données d'une vraie table de mortalité; à savoir sur celle qu'on trouve en regard de la p. 96 du T. VII. De même on ignorait qu'ils s'étaient occupés du calcul de rentes viagères sur plus d'une seule tête. Depuis, les „Communications” de la Société néerlandaise des assurances sur la vie ont répandu plus de lumière sur ce sujet; voir, outre celles mentionnées dans la note 4, la „Communication” N^o. 794 de 1897 qui contient 5 lettres inédites de de Witt à Hudde dont on trouve la traduction française aux p. 20—33 des „Mémoires”.

⁷⁾ Voir sur Dierkens la note 1 de la p. 13 du T. VIII et sur ses relations avec Huygens la p. 415 du même Tome, la note 1 de la p. 379 du T. IX, la p. 568 et la note 4 de la p. 722 du T. X.

⁸⁾ Voir les p. 89—91 du présent Tome. S'il s'agissait du dernier de ces Exercices, cela expliquerait d'autant mieux l'origine de l'Appendice VI dont nous allons parler; mais nous n'en sommes pas sûrs.

⁹⁾ Voir la p. 13 du T. VIII.

faire connaître l'analyse qui l'avait amenée. Pendant la même année, il examina la solution que Dierkens lui avait envoyée d'un problème concernant le jeu de quinquenove ¹⁾. De plus Huygens élaborait pour Dierkens les solutions, à l'aide des logarithmes, de quelques „problèmes des dés” ²⁾. Si dans la Prop. XI ³⁾ de son Traité il s'est borné à déterminer en combien de fois on peut accepter avec avantage de jeter deux six avec deux dés, l'emploi des logarithmes lui permet maintenant d'étendre ses recherches aux problèmes analogues pour trois et quatre dés ⁴⁾.

Pendant son dernier séjour à Paris, de 1678—1681, l'attention de Huygens fut attirée sur le calcul des chances dans le jeu de la Bassette ⁵⁾ alors très en vogue dans cette ville ⁶⁾. En négligeant une des complications de ce jeu ⁷⁾, il calcula dans

¹⁾ Voir les p. 14—15 du T. VIII. La solution de Dierkens est exacte, et Huygens n'a donc eu qu'à l'approuver. Pour expliquer complètement cette solution, il suffira de faire remarquer en premier lieu que le nombre 1001 pour l'enjeu a été choisi par Dierkens parce qu'il est divisible par 7, par 13 et par 11. Voici ensuite comment les coefficients $\frac{3}{7}, \frac{5}{13}, \frac{3}{11}$ ont été obtenus: prenons par exemple le premier de ces coefficients, et posons x pour l'espérance mathématique du joueur qui tient les dés et qui est supposé avoir jeté 7 points au premier coup. On a alors $x = \frac{6}{36}a + \frac{8}{36} \times 0 + \frac{22}{36}x$, puisqu'il y a 6 chances de jeter de nouveau 7 points, auquel cas le joueur gagne, 8 de jeter 5 ou 9 (ce qui le fait perdre) et 22 chances de jeter l'un des autres nombres de points après quoi le jeu continue aux mêmes conditions.

On retrouve le même problème sur le jeu de quinquenove chez de Monmort, p. 173—177 de l'ouvrage cité dans la note 11 de la p. 9, et de même chez Bernoulli, p. 167—169 de son „Ars conjectandi” (voir la note 13 de la p. 9). Chez de Monmort les conditions du jeu sont un peu différentes de celles indiquées par Dierkens; la solution de Jacques Bernoulli est identique à celle de Dierkens.

²⁾ Voir la Pièce N°. 2096, p. 16—18 du T. VIII et aussi l'Appendice VII, p. 156—163 du présent Tome. Cet Appendice contient les recherches de Huygens qui ont abouti à la solution qu'il communique à Dierkens dans la Pièce N°. 2096.

³⁾ Voir la p. 81 du présent Tome.

⁴⁾ Consultez encore, sur les problèmes des dés, les p. 26—28 du présent Avertissement.

⁵⁾ Voir, pour les règles du jeu, pour autant qu'on doit les connaître afin de comprendre les calculs de Huygens, la note 3 de la p. 165.

⁶⁾ Voici un passage que nous empruntons au Journal des Sçavans du 13 février 1679, p. 43: „Le jeu de la Bassette a fait tant de bruit cet Hyver par l'attachement avec lequel on l'a joué à la Cour, qu'il y a peu de gens qui ne sçachent présentement ce que c'est”. Le jeu paraît avoir été inventé à Venise. Il fut introduit en France vers 1675 par Justiani, ambassadeur de la République de Venise à Paris.

⁷⁾ Celle de la „face”, voir le troisième alinéa de la note 1 de la p. 168.

l'Appendice VIII ⁸⁾ l'avantage du banquier sur les autres joueurs dans les différents cas qui peuvent se présenter pendant le jeu.

Une solution plus complète fut donnée, sans analyse ni démonstration, par Sauveur ⁹⁾ dans le Journal des Sçavans du 13 février 1679 ¹⁰⁾. Pour les castraités par Huygens les deux solutions sont identiques entre elles et à celle publiée plus tard, en 1713, dans l'„Ars conjectandi” de Jacques Bernoulli ¹¹⁾, mais il paraît que Huygens ne connaissait pas l'article de Sauveur lorsqu'il fit ses calculs ¹²⁾.

En outre, de Monmort ¹³⁾, Jean Bernoulli ¹⁴⁾, frère de Jacques, et leur neveu Nicolas Bernoulli ¹⁵⁾, de Moivre ¹⁶⁾ et Struyck ¹⁷⁾ se sont occupés des chances du banquier dans ce même jeu de la Bassette, mais les cas qu'ils ont traités sont différents de ceux supposés par Huygens.

Enfin, en 1688, nous ignorons à quelle occasion, Huygens s'occupa pour la dernière fois de quelques problèmes de jeu.

On en trouve les énoncés aux pp. 169, 172, 173 et 178 de l'Appendice IX. Dans les deux premiers paragraphes (p. 169—173) de cet Appendice on voit échouer les premières tentatives de résoudre le problème qu'il s'y pose. Au § 3, p. 173—175, il simplifie le problème et il réussit facilement à le résoudre sous cette nouvelle forme. Au § 4 (p. 176) il reprend le problème principal, qu'il réduit à

⁸⁾ Voir les p. 164—168 du présent Tome.

⁹⁾ Joseph Sauveur naquit à la Flèche en 1653 et mourut à Paris en 1716. Il était membre de l'Académie des Sciences; il est surtout connu par ses travaux sur la théorie des sons harmoniques.

¹⁰⁾ Voir les p. 44—52 du T. 7 de ce Journal.

¹¹⁾ Voir la première des „Tabellæ” de la p. 195 de l'„Ars conjectandi”. Afin de comparer les résultats de Huygens à ceux de Sauveur et de Jacques Bernoulli, on doit poser dans les formules de Huygens $r = 2n$.

¹²⁾ Voir la note 1 de la p. 168 du présent Tome.

¹³⁾ Voir les p. 144—156 de l'ouvrage cité dans la note 11 de la p. 9.

¹⁴⁾ Voir, à la p. 287 de l'ouvrage de de Monmort, la lettre du 17 mars 1710 de Jean Bernoulli à de Monmort.

¹⁵⁾ Voir, aux p. 302—303 de l'ouvrage de de Monmort, les dernières remarques de Nicolas Bernoulli.

¹⁶⁾ Voir les p. 57—65 de l'ouvrage cité dans la note 12 de la p. 9.

¹⁷⁾ Voir la p. 107 de l'ouvrage cité dans la note 14 de la p. 9.

la sommation d'une suite infinie. Cette suite est de la même nature que celles dont Huygens avait trouvé les sommes en 1665 lors de sa Correspondance avec Hudde¹⁾. Cependant il n'a pas achevé la solution du problème, du moins dans les manuscrits que nous connaissons, mais il est facile d'arriver à la solution exacte par la voie suivie par Huygens en effectuant, après y avoir appliqué quelques corrections indiquées par lui-même, la sommation de la suite à laquelle il s'est arrêté²⁾. Enfin dans le dernier paragraphe de l'Appendice la solution d'un problème analogue est interrompue également après avoir été réduite à la sommation d'une suite infinie du même genre³⁾.

Ajoutons que dans le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 179 nous avons donné une solution générale qui s'applique à tous les problèmes dont il est question dans l'Appendice IX.

Point de départ de Huygens. Son théorème fondamental. Sa méthode de résolution des problèmes du calcul des probabilités, suivie exclusivement jusque dans ses dernières recherches.

Le calcul des probabilités est une science de mathématiques appliquées. Afin de pouvoir traiter une telle science sous la forme que Huygens choisissait de préférence dans ses premiers ouvrages, il fallait donc commencer, à l'exemple d'Archimède⁴⁾, par formuler, comme supplément aux postulats purement mathématiques, une ou plusieurs hypothèses pouvant servir de point de départ à la démonstration des théorèmes dont on avait besoin.

¹⁾ Voir les pp. 106, 113—114, 121—122 et 131.

²⁾ Voir la note 5 de la p. 177.

³⁾ Voir la p. 178 et le premier alinéa de la note 2 de la p. 179, où la sommation de la suite est effectuée.

⁴⁾ Voir, aux p. 143—145 du Tome II de l'édition de Heiberg (citée dans la note 2 de la p. 50 du T. XI) des œuvres d'Archimède, les sept hypothèses au début du traité „De planorum æquilibriis sive de centrīs gravitatis planorum” et de même aux pp. 359 et 371 du Tome prémentionné les deux suppositions de l'ouvrage: „De iis, quæ in humido vehuntur”; voir aussi aux p. 93—94 de notre T. XI les trois hypothèses par lesquelles Huygens commence son traité „De iis quæ liquido supernatant”.

Ce point de départ, Huygens devait le chercher lui-même; bien qu'il ne fût pas l'inventeur du calcul qu'il allait exposer. En effet, les „savants français” qui l'avaient précédé sur ce terrain „quoiqu'ils se missent à l'épreuve l'un l'autre en se proposant beaucoup de questions difficiles à résoudre” avaient „cependant caché leurs méthodes” ⁵⁾.

L'hypothèse à laquelle il s'arrête est, en effet, un modèle de clarté et d'évidence. Il l'exprime ainsi: „dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable” ⁶⁾.

À l'aide de cette hypothèse, il démontre par un raisonnement ingénieux les Propositions I, II et III ⁷⁾ qui sont des cas particuliers du Théorème: Avoir p_1 chances d'obtenir a_1 , p_2 d'obtenir a_2 , etc. vaut $\frac{\sum p a}{\sum p}$ ⁸⁾.

Après avoir formulé ces Propositions, il passe immédiatement au problème des partis et aux autres problèmes qu'il se propose de résoudre. En effet, la seule méthode suivie par Huygens non seulement dans son *Traité* de 1657, mais aussi dans ses recherches ultérieures sur le calcul des probabilités, consiste dans une application continuelle, répétée autant de fois que le problème l'exige, de ces Propositions. Il emploie partout cette méthode, à l'exclusion de celle qui apprend à dresser, dès l'abord, à l'aide de l'analyse combinatoire, le bilan des cas favorables et défavorables à l'événement en question. Il l'applique même dans les cas où cette dernière méthode mènerait bien plus facilement au but.

⁵⁾ Comparez la p. 59 du présent Tome.

⁶⁾ Voir la p. 61. De l'exemple qu'il fait suivre il résulte que Huygens entend par un jeu équitable: un jeu où les chances des deux joueurs sont égales. Or, il nous semble que l'expression „un jeu équitable” (dans l'édition hollandaise „rechtmatigh spel”, dans l'édition latine „æquà conditione certans”) n'admettrait pas d'autre sens même si toute explication ultérieure avait manqué. Nous croyons donc que Jacques Bernoulli a tort lorsque, à la p. 5 de son „Ars conjectandi”, il prétend avoir remplacé l'axiome de Huygens par un autre d'un usage plus simple et plus à la portée de tous, qu'il énonce, en italiques, comme suit: „que chacun doit attendre, ou doit être censé d'attendre, ce qu'il obtiendra infailliblement” („quod unusquisque tantundem expectet, vel expectare dicendus sit, quantum infallibiliter obtinebit”). Or, cet axiome nous semble bien moins évident que celui de Huygens. On peut même dire qu'il ne devient intelligible que par les applications que Bernoulli en a faites.

⁷⁾ Voir les p. 63 — 67.

⁸⁾ Si Huygens n'énonce pas expressément ce théorème plus général, c'est parce que les Prop. I, II, III suffisent pour la solution des problèmes dont il s'occupe dans son *Traité*.

Prenons, par exemple, le quatrième des Exercices du Traité de Huygens (p. 89). Le nombre total des permutations des 12 jetons du problème, dont 4 blancs et 8 noirs, est égal à $\frac{12!}{4!8!} = 5 \times 9 \times 11$. Supposons que A, le premier des deux joueurs, en prenne toujours les sept premiers; le nombre des permutations qui lui sont favorables est alors évidemment égal à $\frac{7!}{3!4!} \times \frac{5!}{1!4!} = 5 \times 5 \times 7$, la chance est donc représentée par $\frac{35}{99}$ et celle de l'autre joueur B par $\frac{64}{99}$.

Que l'on compare cette solution à celles du même problème que Huygens a données en 1665, telles qu'on les trouve aux § 2—4 de l'Appendice II, p. 97—99 du présent Tome. Évidemment il était facile à ses successeurs immédiats: de Monmort, de Moivre, Bernoulli et Struyck ¹⁾ de dépasser sur plusieurs points importants l'œuvre de Huygens, au moyen de l'application de l'analyse combinatoire. Et il faut ajouter que ses prédécesseurs, Fermat et Pascal, se servaient de même avec avantage (mais comme nous le savons à l'insu de Huygens) de cette analyse pour la résolution de quelques problèmes de jeu ²⁾.

Pour autant que nous le sachions, Huygens ne s'est occupé qu'une seule fois, en 1668, de cette branche nouvelle des mathématiques, qui se développait pendant sa vie par les travaux de Pascal ³⁾ et de Wallis ⁴⁾. Nous reproduirons en lieu propre ces recherches de Huygens intitulées: „De combinationum mirandis”.

Une autre particularité de la méthode pratiquée par Huygens, c'est qu'elle amène souvent la solution désirée sous la forme d'une suite infinie ⁵⁾ dans des cas où l'on peut éviter l'usage d'une telle suite en utilisant une voie différente ⁶⁾.

C'est à l'une de ces occasions que Huygens apprit à sommer la suite formée par

¹⁾ Voir la p. 9 du présent Tome.

²⁾ Comparez la note 14 de la p. 7.

³⁾ Dans son „Traité du triangle arithmétique”, publié en 1665. Voir, plus loin, les notes 2 et 3 de la p. 22.

⁴⁾ Dans son „Discourse of combinations, alternations, and aliquot parts” qu'il joignit à l'édition anglaise de 1685 de son „Algebra”. On le trouve aux p. 485—529 du „Volumen alterum” de l'édition latine, citée dans la note 10 de la p. 9.

⁵⁾ Comparez les pp. 105, 111, 119, 131, 135, 140, 176 et 178.

⁶⁾ Voir les pp. 31—42 de cet Avertissement et les notes 2 de la p. 142 et de la p. 179.

les fractions qu'on obtient en divisant l'unité par les nombres triangulaires successifs 7). Dans tous les autres cas il s'agit de suites de la forme $a + 2ar + 3ar^2 + 4ar^3 + \dots$ (où a et r sont des fractions données), dont la sommation lui réussit également 8).

Le Problème des partis.

Le problème des partis remonte jusqu'au quinzième siècle 9) et les savants s'en sont encore occupés de notre temps.

Laissant de côté les extensions qu'on lui a données plus tard, on peut le formuler comme suit :

Les joueurs A, B, C... jouent à qui aura gagné le premier n parties, leurs chances à chaque partie étant égales. Ils veulent cesser le jeu au moment où il leur manque respectivement a, b, c, \dots parties. Dans quel rapport doivent-ils se partager l'enjeu e ?

Parlons d'abord du cas de deux joueurs, A et B, et désignons par $\varphi(a, b)e$ la part de l'enjeu qui revient au joueur A et de même par $\varphi(b, a)e$ celle qui est due à B. Alors la solution du problème peut être exprimée à volonté par l'une ou l'autre des deux suites : 10)

$$(1) \quad \varphi(a, b) = \left(\frac{1}{2}\right)^{a+b-1} \left[1 + \frac{a+b-1}{1} + \frac{(a+b-1)(a+b-2)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(a+b-1)(a+b-2) \dots (a+1)}{1 \cdot 2 \dots (b-1)} \right],$$

7) Voir les p. 144—150.

8) Voir les pp. 106, 113—114 et 121. Comme nous l'avons indiqué aux p. 17—18, les derniers problèmes, traités par Huygens en 1688, conduisent également à des suites de cette forme sans que Huygens en achève la sommation.

9) Voir les pp. 327, 501—502, 520—521 du T. II des „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik” de M. Cantor (édition de 1900).

10) On trouve une démonstration de l'identité de ces deux suites à la p. 98 de l'ouvrage de Todhunter, cité dans la note 11 de la p. 9.

$$(2) \quad \varphi(a, b) = \left(\frac{1}{2}\right)^a \left[1 + a \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{a(a+1) \dots (a+b-2)}{1 \cdot 2 \dots (b-1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{b-1} \right].$$

Après les solutions fausses de Paciolo (1494), de Cardano (1539) et de Tartaglia (1556)¹⁾, les premières solutions exactes ne furent obtenues qu'après un intervalle de plus d'un siècle par Pascal (1654), Fermat (1654) et Huygens (1656).

Parmi ces derniers ce fut Pascal qui, en cette matière, devança de loin ses deux rivaux. Sa solution, telle qu'elle parut dans son „Traité du triangle arithmétique”²⁾, sous l'en-tête „Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties”, ne diffère pas essentiellement de celle représentée par la formule (1). En effet, les termes qui se trouvent entre crochets dans cette formule, et qui sont des coefficients binomiaux, correspondent un à un aux „cellules du triangle”, dont la somme est le dénominateur de la fraction qui détermine chez Pascal la portion revenant au premier joueur.

De plus, Pascal a donné des solutions plus simples et très intéressantes pour les cas $(n-1, n)$ et $(n-2, n)$. On retrouve facilement la première de ces solutions en remarquant que la suite (1) nous donne :

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi(n-1, n) - \varphi(n, n-1) &= \frac{1}{2^{2n-2}} \frac{(2n-2)(2n-3) \dots n}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} = \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} [(n-1)!]^2} = \frac{(2n-3)(2n-5) \dots 1}{(2n-2)(2n-4) \dots 2} \end{aligned}$$

¹⁾ Paciolo divise l'enjeu dans le rapport de $(n-a)$ à $(n-b)$; Cardano dans celui de $(1+2+\dots+b)$ à $(1+2+\dots+a)$; enfin Tartaglia dans celui de $(n+b-a)$ à $(n+a-b)$; voir les pages des „Vorlesungen” citées dans la note 9 de la p. 21. Il est curieux de remarquer que, de ces trois savants, Cardano soit le seul qui ait compris, avec Pascal, Fermat et Huygens, que le nombre n des parties à gagner, dont on est convenu au commencement du jeu, doit être sans influence sur le partage à faire quand on connaît les nombres des parties qui manquent.

²⁾ Ce traité ne fut publié qu'en 1665 comme œuvre posthume, mais il avait déjà été imprimé du vivant de Pascal et on sait que celui-ci l'avait envoyé à Fermat en 1654; voir à la p. 308 du T. II des „Œuvres de Fermat” la lettre du 29 août 1654 de Fermat à Pascal, où il lui parle de „Vos derniers Traités du Triangle arithmétique et de son application”.

³⁾ Comparez la Proposition III du Traité de Pascal, p. 265 du T. III de l'édition de Hachette des „Œuvres complètes de Blaise Pascal”, Paris, 1872.

et qu'on a évidemment :

$$(4) \quad \varphi(n-1, n) + \varphi(n, n-1) = 1^3).$$

Ensuite la solution du deuxième cas se déduit immédiatement de celle du premier cas par l'emploi de la relation :

$$(5) \quad \varphi(n-1, n) = \frac{1}{2}\varphi(n-2, n) + \frac{1}{2}\varphi(n-1, n-1),$$

où évidemment $\varphi(n-1, n-1) = \frac{1}{2}$ ⁴⁾.

C'est à l'aide des formules (3)—(5) qu'on arrive aisément aux résultats qui furent communiqués à Huygens par l'intermédiaire de Carcavy dans la lettre du 28 septembre 1656 ⁵⁾; résultats que Pascal avait déjà obtenu en 1654, comme le prouve sa lettre à Fermat du 29 juillet de cette année ⁶⁾.

D'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit dans la note 14 de la p. 7, Pascal savait résoudre de la même façon que Huygens les cas simples du problème des partis, tandis que Fermat y appliquait l'analyse combinatoire ⁷⁾.

Huygens, dans son *Traité*, se contente de son côté de résoudre quelques uns de ces cas simples, où a et b sont des nombres relativement petits ⁸⁾, et de montrer comment on peut passer de là à des cas de plus en plus compliqués ⁹⁾.

Parmi les premiers successeurs de Huygens sur le terrain du calcul des probabilités, Struyck ne s'est pas occupé du problème des partis; de Monmort, dans la

⁴⁾ Comparez la Proposition IV, p. 266 de l'ouvrage cité dans la note précédente.

⁵⁾ Voir la p. 493 de notre T. I. Posons $(2n-3)2n-5) \dots 1 = \alpha$; $(2n-2)(2n-4) \dots 2 = \beta$ et soit l'enjeu égal à 2β . On trouve alors $\varphi(n-1, n)e = \beta + \alpha$; $\varphi(n-2, n)e = \beta + 2\alpha$. Il faut donc quand on se sépare après la première partie que le gagnant reçoive outre sa mise une somme égale à α , et une somme 2α quand on le fait après la seconde. C'est le résultat exprimé dans la lettre de Carcavy.

⁶⁾ Voir les pp. 292 et 294 du T. II des „Œuvres de Fermat”.

⁷⁾ Consultez encore sur les solutions de Fermat la note 3 de la p. 28.

⁸⁾ Voir les Prop. V—VII (p. 69—73).

⁹⁾ Voir le dernier alinéa (p. 75—76) de la Prop. IX.

première édition de 1708 de son „Essay” ¹⁾ et Jacques Bernoulli dans son „Ars conjectandi” ²⁾ ont donné la formule (1); de Moivre a, le premier, étendu la solution au cas où les chances p et q ($p + q = 1$) des joueurs A et B de gagner une partie sont inégales ³⁾. Dans ce cas les formules (1) et (2) doivent être remplacées par les suivantes:

$$(1_a) \quad \varphi(a, b) = p^{a+b-1} + \frac{a+b-1}{1} p^{a+b-2} q + \dots + \\ + \frac{(a+b-1)(a+b-2) \dots (a+1)}{1 \cdot 2 \dots (b-1)} p^a q^{b-1}$$

$$(2_a) \quad \varphi(a, b) = p^a \left[1 + aq + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} q^2 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{a(a+1) \dots (a+b-2)}{1 \cdot 2 \dots (b-1)} q^{b-1} \right].$$

De ces formules (1_a) et (2_a) de Moivre a donné la première dans le *Mémoire* de 1711, cité dans la note 3 de cette page; de Monmort y a ajouté la seconde dans l'édition de 1713 de son „Essay” ⁴⁾.

Parmi les mathématiciens plus modernes qui se sont occupés du problème des partis nous citerons Laplace, qui a trouvé la fonction génératrice ⁵⁾ dont le développement suivant les puissances de ses deux variables fait connaître les valeurs de $\varphi(a, b)$, parce que ces valeurs sont égales aux coefficients des termes du développement, et Meyer qui a réussi à représenter $\varphi(a, b)$ à l'aide d'une intégrale définie très simple ⁶⁾.

Dans le cas de n joueurs A_1, A_2, \dots, A_n , auxquels il manque respectivement a_1, a_2, \dots, a_n parties, on a:

¹⁾ Voir la p. 97 (Art. 173) de l'ouvrage de Todhunter.

²⁾ Voir la p. 109 de l'ouvrage cité dans la note 13 de la p. 9.

³⁾ Voir la p. 217 du *Mémoire* de 1711, cité dans la note 12 de la p. 9.

⁴⁾ Voir la p. 245 de cette édition.

⁵⁾ Elle prend la forme: $\frac{t_2(1-qt_2)}{(1-t_2)(1-pt_1-qt_2)}$, $\varphi(a, b)$ étant égal au coefficient du terme contenant $t_1^a t_2^b$; voir la p. 625 du T. VII des „Œuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, Paris, Gauthier-Villars, 1886”.

$$(6) \quad \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum \frac{\Gamma(a_1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n)}{\Gamma(u_1 + 1) \Gamma(u_2 + 1) \dots \Gamma(u_n + 1)} p_1^{a_1} p_2^{u_2} \dots p_n^{u_n}$$

où p_1, p_2, \dots, p_n représentent les probabilités que les joueurs ont de gagner une partie et où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs entières de u_1, u_2, \dots, u_n pour lesquelles $0 \leq u_m \leq a_m - 1$ ⁷⁾.

Déjà Paciolo (1494) s'était occupé du cas de trois joueurs ⁸⁾. Pascal, Fermat et Huygens avaient calculé (en supposant $p_1 = p_2 = p_3$) pour chaque cas particulier les espérances mathématiques des joueurs; Pascal et Huygens en réduisant la solution du cas donné à celle de cas plus simples ⁹⁾; Fermat en appliquant l'analyse combinatoire ¹⁰⁾. C'est en se servant de cette dernière méthode que de Moivre découvrit le premier une règle générale dont l'application ne diffère point de l'emploi de la formule (6) ¹¹⁾.

Ajoutons enfin que Laplace ¹²⁾ et Meyer ¹³⁾ ont pu généraliser leurs solutions que nous venons de mentionner, de sorte qu'elles deviennent applicables au cas de n joueurs.

6) Voir la p. 69 de l'ouvrage: „Cours de calcul des probabilités fait à l'Université de Liège de 1849 à 1857 par A. Meyer, publié sur les manuscrits de l'auteur par F. Folie, Bruxelles, F. Hayez, 1874". On a $\varphi(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$.

7) Ainsi p. e. dans le cas $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3$ on doit sommer les six termes qu'on obtient en posant successivement $u_1 = 0, u_2 = 0; u_1 = 0, u_2 = 1; u_1 = 0, u_2 = 2; u_1 = 1, u_2 = 0; u_1 = 1, u_2 = 1; u_1 = 1, u_2 = 2$. On sait qu'on a $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots 1$ pour n entier et plus grand que l'unité.

8) Paciolo se contenta de généraliser sa solution inexacte du cas de deux joueurs; comparez la note 1 de la p. 22.

9) Voir, quant à Pascal les pp. 300—301, 306 et 307 du Tome II de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 3, et quant à Huygens les p. 73—77 du présent Tome.

10) Voir au T. II de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 3 les pp. 302—306 et 310—312.

11) Voir les p. 191—192 (Problem LXIX) de l'ouvrage cité en premier lieu dans la note 12 de la p. 9.

12) Voici, dans notre notation, la fonction génératrice généralisée telle qu'on la trouve à la p. 642 du T. VII de l'ouvrage cité dans la note 5 de la p. 24:

$$\frac{t_1}{1-t_1} \cdot \frac{t_2}{1-t_2} \dots \frac{t_n}{1-t_n} \cdot \frac{1-p_1 t_1 - p_2 t_2 \dots - p_n t_n}{1-p_1 t_1 - p_2 t_2 \dots - p_n t_n},$$

$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ étant égal au coefficient du terme $t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_n^{a_n}$.

13) Dans nos notations le résultat obtenu par Meyer s'écrit:

Les Problèmes des dés.

Le 29 juillet 1654 Pascal écrivit à Fermat ¹⁾: „J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval; mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ²⁾ ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.”

Pascal avoit en vue le problème des dés tel qu'il fut formulé par de Méré. Pour celui-ci il s'agissait de savoir en combien de coups on peut entreprendre avec avantage de jeter deux six avec deux dés, mais l'extension au cas de n dés, et le problème plus général de déterminer en combien de coups on peut gager d'amener un événement quelconque dont la probabilité à chaque coup est égal à p , ne présentent non plus aucune difficulté, pourvu qu'on y emploie le calcul des logarithmes.

Huygens l'a montré lui-même dans la Pièce de 1676, destinée à Dierkens ³⁾, où

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{p_1^{a_1} \Gamma(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \dots \Gamma(a_n)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{(x_1 + p_1)^{a_1-1} (x_2 + p_2)^{a_2-1} \dots (x_n + p_n)^{a_n-1}}{(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Après avoir développé suivant les puissances de $p_1 \dots p_n$ le numérateur de la fraction qui se trouve sous le signe d'intégration, on calcule facilement les termes qu'on obtient à l'aide de la formule:

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}}{(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^\mu} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{\Gamma(\nu_1 + 1) \Gamma(\nu_2 + 1) \dots \Gamma(\nu_n + 1) \Gamma(\mu - \nu_1 - \nu_2 - \dots - \nu_n - n + 1)}{\Gamma(\mu)},$$

où $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ et $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n - n$ doivent être des nombres entiers ≤ 0 ; voir les p. 72 et 73 de l'ouvrage cité dans la note 6 de la p. 25.

¹⁾ Voir la p. 290 du Tome II des „Œuvres de Fermat”, citées dans la note 1 de la p. 3.

²⁾ Il s'agit du problème des partis.

³⁾ Voir, sur cette Pièce, la p. 16 de cet Avertissement.

il obtient par un raisonnement très simple une solution qui, appliquée au problème général, consiste dans la détermination du plus petit nombre entier excédant le quotient de $\log 2$ par $\log(1-p)$ ⁴⁾. Pourquoi donc Huygens s'est-il borné dans son *Traité* de 1657 aux cas d'un seul et de deux dés ⁵⁾ et n'y a-t-il su résoudre le problème dans ce dernier cas que par des calculs qui doivent avoir été assez pénibles?

Il est vrai que le calcul des logarithmes ne semble pas avoir fait partie du cours professé par van Schooten ⁶⁾ et qu'on n'en rencontre dans les manuscrits de Huygens aucune trace avant 1661, tandis qu'alors ce calcul est approché par lui du côté géométrique en connexion avec la quadrature de l'hyperbole ⁷⁾. Toutefois il semble inadmissible que Huygens n'ait pas pris connaissance avant 1657 d'une branche si importante des mathématiques, sans doute bien connue en Hollande par les travaux de Vlack ⁸⁾. En effet, la réponse à la question que nous avons posée est à la fois plus simple et plus curieuse. C'est que Huygens avait attaqué en 1656 le problème du côté le moins accessible. Au lieu de considérer dès l'abord l'espérance mathématique de celui qui donne à jeter, il avait commencé par s'occuper des chances plus compliquées de celui qui jette les dés, de sorte qu'il ne s'était pas aperçu que l'espérance du premier peut être représentée par l'expression $\left(\frac{6^n - 1}{6^n}\right)^m a$, où a est l'enjeu, n le nombre des dés avec lesquels on doit jeter n fix, et m le nombre des coups dont on est convenu.

L'exactitude de cette explication est prouvée indubitablement par l'Appendice VII de 1676, p. 156—163 du présent Tome. On y voit dans quelles circonstances Huygens découvrit enfin la simplification qu'on obtient en s'occupant en premier lieu des chances du „contra certans”, comme Huygens l'appelle ⁹⁾.

⁴⁾ On trouve cette même solution à la p. 231 de l'ouvrage de de Monmort cité dans la note 11 de la p. 9, à la p. 219 du *Mémoire* de de Moivre cité dans la note 12 de la p. 9 et à la p. 32 de l'„*Ars conjectandi*” de Jacques Bernoulli.

⁵⁾ Voir les Prop. X et XI, p. 79—83 du présent Tome.

⁶⁾ Voir sur ce cours les p. 7—20 du T. XI.

⁷⁾ Voir la Pièce d'août 1661, intitulée „*Fundamentum regulæ nostræ ad inveniendos logarithmos*”, qui se trouve aux p. 18—19 du Manuscrit B et que nous reproduirons en lieu propre.

⁸⁾ Sa „*Trigonometria Artificialis, sive Magnus Canon Triangulorum Logarithmus*” parut en 1633, chez Rammazeyn à Gouda.

⁹⁾ Voir la note 5 de la p. 161.

D'ailleurs la Pièce destinée à Dierkens, dont nous avons déjà parlé ¹⁾, nous apprend comment Huygens a profité aussitôt de cette découverte.

Un autre problème des dés, traité par Huygens dans la Prop. XII ²⁾, à savoir „Trouver le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 six du premier coup”, n'admet pas de solution aussi simple que celui que nous venons de considérer. Comme Huygens l'a remarqué il est équivalent „à la question de savoir en combien de coups d'un seul dé l'on peut compter jeter deux fois un 6”.

Supposons plus généralement qu'il s'agisse d'un événement dont la probabilité à chaque coup est égale à p et qu'on veuille connaître la probabilité qu'il se produise au moins m fois en n coups.

Cette probabilité est représentée par la somme des $(n-m+1)$ premiers termes du développement de $(p+q)^n$, où $q = 1-p$; la probabilité complémentaire est donnée par les m derniers termes du même développement ³⁾. Pour résoudre le problème posé par Huygens il faut donc chercher le plus petit nombre entier pour lequel:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n + n\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{5}{6} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 3}{1 \cdot 2 \dots (n-2)}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} > \frac{1}{2}$$

ou bien déduire ce même nombre à l'aide de la relation:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6} < \frac{1}{2}.$$

Il est évident que c'est la seconde formule qui mène le plus facilement au but désiré. Or, le calcul effectué par Huygens correspond à l'emploi de la première.

¹⁾ Voir la p. 16.

²⁾ Voir les p. 83—85.

³⁾ C'est la solution obtenue par Bernoulli, p. 38—43 de son „Ars conjectandi”. Évidemment elle peut s'écrire sous la forme de la formule (1_a) de la p. 24. Or, de Moivre donne à la p. 13 de sa „Doctrine of chances” (voir la note 12 de la p. 9) une solution qui correspond à la formule (2_a) de la même p. 24. En effet, le problème que nous traitons ici, ne diffère pas essentiellement du problème des partis auquel se rapportent ces deux formules. Afin de le montrer, soient m et $n-m$ les nombres des parties qui manquent encore aux joueurs A et B

Les Exercices proposés aux lecteurs du Traité de 1657.

Les Exercices qu'on trouve vers la fin du Traité de 1657 ⁴⁾ n'ont pas manqué le but „de laisser quelque chose à chercher” aux „lecteurs, afin que cela leur servît d'exercice et de passe-temps” ⁵⁾. En effet, parmi les savants qui se sont occupés à les résoudre: Hudde ⁶⁾, Spinoza ⁷⁾, de Mon-

p la probabilité à chaque partie qu'elle sera gagnée par A, q la probabilité complémentaire, c'est-à-dire celle que B la gagne. Supposons de plus, comme Fermat l'avait déjà fait pour obtenir sa solution du problème des partis (voir les pp. 301—307 et 310—311 du T. II des Œuvres de Fermat), qu'on convienne de jouer en tout cas $n-1$ parties, même si le jeu était décidé plus tôt, c'est-à-dire même si l'un des joueurs avait gagné avant la $n-1^{\text{ème}}$ partie celles qui lui manquent. Lorsque m , ou plus que m , de ces $n-1$ parties ont fini à l'avantage de A, il est évident qu'il a gagné le jeu puisqu'il a pu compléter le nombre de ses parties gagnées, sans que B dans les $n-m-1$ parties restantes ait pu gagner celles qui lui manquaient. Lorsque, au contraire, A a gagné moins que m parties, B a gagné le jeu. La probabilité que le jeu soit gagné par A est donc la même que celle qu'un événement de la probabilité p arrive m , ou plus que m fois, en $n-1$ épreuves.

⁴⁾ Voir les p. 89—81.

⁵⁾ Comparez la p. 59.

⁶⁾ Voir pour le deuxième Exercice les p. 304—307 et 382—383 du T. V et la note 3 de la p. 88; pour le quatrième les pp. 304 et 307 du T. V et les notes 1 et 4 de la p. 100; et enfin pour le cinquième les p. 470—471 du T. V.

⁷⁾ On trouve la solution de Spinoza du premier Exercice dans le traité „Reeckening van kansen” [Calcul des chances], qui probablement fut publié en combinaison avec sa „Stelkonstige reeckening van den regenboog” [Calcul algébrique de l'arc-en-ciel]. Ces deux petits traités étant devenus très rares, Bierens de Haan en fit une réimpression (Leiden, Muré frères, 1884). Le premier traité fut reproduit de même aux p. 521—524 de l'ouvrage „Benedicti de Spinoza Opera quotquot reperta sunt. Recognoverunt J. van Vloten et J. P. N. Land. Volumen posterius. Hagæ Comitum apud Martinum Nyhoff. 1883.

Puisque la solution de Spinoza n'a paru jusqu'ici, pour autant que nous le sachions, qu'en hollandais nous en donnons ci-après une traduction française:

„PREMIER PROBLÈME.

A et B jouent l'un contre l'autre avec 2 dés à la condition suivante: A aura gagné s'il jette 6 points, B s'il en jette 7. A fera le premier un seul coup; ensuite B 2 coups l'un après l'autre; puis de nouveau A 2 coups, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre ait gagné. On demande le rapport de la chance de A à celle de B. Réponse: comme 10355 est à 12276.

Afin de répondre à cette question, je la divise, d'après la seconde règle de l'Art de penser du Sieur Descartes” [voir le „Discours de la methode”, p. 18 du T. VI des Œuvres de

mort ¹⁾, de Moivre ²⁾, Jacques Bernoulli ³⁾ et Struyck ⁴⁾, on rencontre quelques noms des plus illustres. Si donc ces problèmes, avec les généralisations auxquelles ils conduisent naturellement, ont exercé une influence incontestable sur le développement du calcul des probabilités, Huygens en doit partager l'honneur avec Fermat et Pascal qui lui avaient proposé respectivement, Fermat le premier et le troisième, Pascal le dernier des cinq Exercices ⁵⁾.

Pour des informations plus détaillées sur chaque Exercice en particulier nous préférons renvoyer le lecteur aux notes des p. 88—91.

Descartes, publiées par Charles Adam & Paul Tannery, 1902], en ces deux Propositions.

PREMIÈRE PROPOSITION.

B et A jouent l'un contre l'autre avec 2 dés à cette condition, que B gagnera s'il jette 7 points et A s'il en jette 6, pourvu que chacun fasse deux coups consécutifs, et que B jette le premier. Leurs chances sont B $\frac{14256}{22631}$, A $\frac{8375}{22631}$.

ANALYSE ET DÉMONSTRATION.

Soit x la valeur de la chance de A, et que ce qu'on a mis, ou l'enjeu, soit appelé a , alors la chance de B vaut donc $a-x$. Il paraît de même que, dans cette supposition, chaque fois que le tour de B revient la chance de A sera de nouveau x , mais toutes les fois qu'il est le tour de A de jeter, sa chance doit être plus grande. Désignons par y ce que cette chance vaut alors. Puisque donc B doit jeter le premier et que 6 coups de 2 dés, parmi les 36 qu'il y a en tout, lui peuvent donner 7 points, on a trouvé que sur les deux fois où il lui est permis de jeter il a (après réduction du rapport) 11 chances à a , ou de gagner, et 25 qui lui font manquer, à savoir, qui font revenir le tour de A" [on trouve en effet 11 : 25 pour le rapport des chances en remarquant que B a 6×36 chances de gagner au premier coup et 30×6 de gagner au second coup, le nombre total des chances étant 36×36]. „Par conséquent A, lorsque B commence à jeter, a 11 chances à 0, ou de perdre, et 25 chances d'avoir y , c'est-à-dire que ce sera son tour de jeter. Cela vaut donc à A $\frac{25y}{36}$, mais puisqu'on a supposé que la chance de A vaut x au commencement, on a donc $\frac{25y}{36} \propto x$, et par suite $y \propto \frac{36x}{25}$. Afin de trouver la valeur de y encore d'une autre façon, il est sûr que lorsque A devra jeter il a 5 chances à a , ou de gagner, parce qu'il y a 5 chances des 36 qui lui peuvent donner 6 points; tout bien compté on a constaté que, dans deux coups, A a 335 chances à a , et 961 qui font revenir le tour de B, c'est-à-dire qui lui donnent x . Cela vaut $\frac{335a+961x}{1296}$.

Comme cela doit être $\propto y$ et qu'on a trouvé plus haut $\frac{36x}{25} \propto y$, il faut donc que $\frac{335a+961x}{1296}$ soit égal à $\frac{36x}{25}$, d'où l'on déduit $x \propto \frac{8375a}{22631}$, ce qui est la chance de A, et par

Problèmes échangés entre Huygens et Hudde sur l'avantage ou le désavantage de la primauté.

Cas où l'enjeu, quelle qu'en soit la grandeur, peut être gagné d'un seul coup.

Afin de découvrir le fil qui nous conduira à travers le dédale des problèmes que Huygens et Hudde se sont proposés en 1665, et des malentendus qui en sont résultés, nous commencerons par résoudre le problème qui suit:

A et B jettent à tour de rôle. Lorsque le coup leur est favorable ils prennent tout ce qui se trouve à l'enjeu et la partie est finie; s'il leur est défavorable ils ajoutent

suite la chance de B vaudra $\frac{14256}{22631}a$. La chance de A est donc à celle de B comme 8375 à 14256 et réciproquement celle de B à A comme 14256 à 8375. Ce qu'il fallait démontrer.

DEUXIÈME PROPOSITION.

A joue contre B comme il est décrit dans le problème. Leurs chances sont A $\frac{10355}{22631}$, B $\frac{12276}{22631}$.

ANALYSE ET DÉMONSTRATION.

Puisque A a 5 chances à a , ou bien de gagner, et 31 chances de manquer, c'est-à-dire de se trouver dans le cas de la première proposition, ce que lui vaut $\frac{8375}{22631}a$; il a donc 5 chances à $\frac{22631}{22631}a$ (afin que je réduise tout au même dénominateur), et 31 chances à $\frac{8375}{22631}a$. Il vient [nous supprimons quelques calculs très simples] „10355 pour la chance de A. 12276 pour la chance de B. Ce qu'il fallait démontrer.”

- ¹⁾ Voir dans l'ouvrage cité dans la note 11 de la p. 9, les p. 216—223 de la „Quatrième Partie. Où l'on donne la solution de divers Problèmes sur le hazard, & en particulier des cinq Problèmes proposés en l'année 1657 par Monsieur Huygens”.
- ²⁾ De Moivre a donné des solutions du deuxième, du quatrième et du cinquième Exercice; voir, dans les ouvrages cités dans la note 12 de la p. 9, pour le deuxième Exercice les p. 229—232 de son Mémoire de 1711 et les pp. 49—51 et 55—56 de son Traité (édition de 1738), pour le quatrième les p. 235—236 du Mémoire, pour le cinquième la p. 227 du Mémoire, et les p. 44—47 du Traité.
- ³⁾ Voir les p. 49—71 de la „Pars prima” de son „Ars conjectandi” et encore pour le troisième et le quatrième Exercice les p. 144—146.
- ⁴⁾ Voir, dans l'ouvrage cité dans la note 14 de la p. 9, les p. 32—45 où l'on trouve les solutions des cinq Exercices, et encore sur le premier Exercice la p. 62, sur le deuxième les p. 91—92 et sur le cinquième la p. 110.
- ⁵⁾ Comparez les notes 7 et 13 de la p. 7.

un ducat à l'enjeu. Soit α la probabilité, quand c'est le tour de A de jeter, que le coup lui soit favorable et α' la probabilité complémentaire ($\alpha + \alpha' = 1$); soient β et β' les probabilités correspondantes dans le cas de B. Supposons que les joueurs se séparent à un instant où l'enjeu est monté à n ducats, comment doivent-ils se partager cet enjeu, 1°. dans le cas où c'est le tour de A de jeter 2°. dans le cas où c'est le tour de B?

Représentons par $\varphi(n)$ la part qui revient à A dans le premier cas, par $\psi(n)$ celle qui est due à B dans le second cas.

On a alors suivant les règles du jeu :

$$(3) \quad \varphi(n) = \alpha n + \alpha' (n - \psi(n+1))^{1)},$$

$$(4) \quad \psi(n) = \beta n + \beta' (n - \varphi(n+1)).$$

Or, on peut considérer la part de A comme la somme de deux parties dont l'une se rapporte à sa chance, au cas où le jeu eût été continué, d'obtenir l'enjeu actuel, et l'autre à ses chances de gagner dans ce cas, outre l'enjeu actuel, les ducats ajoutés par son adversaire pendant la continuation du jeu ou bien de perdre ceux qu'il y aurait dû ajouter lui-même.

Évidemment la première de ces parties est proportionnelle à l'enjeu n , tandis que l'autre est une quantité constante puisque la chance que le jeu finira ou ne finira pas par un coup donné est indépendante de la grandeur de l'enjeu.

On peut donc poser :

$$(5) \quad \varphi(n) = a_1 n + a_2,$$

et de même :

$$(6) \quad \psi(n) = b_1 n + b_2.$$

Or, la substitution de ses expressions dans les équations (3) et (4) nous fournit, puisque a_1, a_2, b_1 et b_2 sont indépendants de n :

$$a_1 = 1 - \alpha' b_1; b_1 = 1 - \beta' a_1; a_2 = -\alpha' (b_1 + b_2); b_2 = -\beta' (a_1 + a_2);$$

d'où il s'ensuit :

$$a_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha' \beta}; b_1 = \frac{\beta}{1 - \alpha' \beta}; a_2 = \frac{\alpha' (\alpha \beta' - \beta)}{(1 - \alpha' \beta)^2}; b_2 = \frac{\beta' (\alpha' \beta - \alpha)}{(1 - \alpha' \beta)^2},$$

¹⁾ Ici et dans les formules qui suivent l'unité représente un ducat.

et par conséquent :

$$(7) \quad \varphi(n) = \frac{\alpha n}{1 - \alpha' \beta'} + \frac{\alpha'(\alpha \beta' - \beta)}{(1 - \alpha' \beta')^2},$$

$$(8) \quad \psi(n) = \frac{\beta n}{1 - \alpha' \beta'} + \frac{\beta'(\alpha' \beta - \alpha)}{(1 - \alpha' \beta')^2}.$$

On trouve donc p. e. :

$$(9) \quad \varphi(1) = \frac{\alpha - \alpha' \beta}{(1 - \alpha' \beta')^2}.$$

$$(10) \quad \psi(1) = \frac{\beta - \alpha \beta'}{(1 - \alpha' \beta')^2},$$

et l'on a dans le cas $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \frac{1}{2}$:

$$(11) \quad \varphi_1(n) = \psi_1(n) = \frac{2}{3}n - \frac{2}{9}.$$

Prenons maintenant le premier problème sur le désavantage de la primauté, tel qu'il fut proposé par Huygens à Hudde dans sa lettre du 4 avril 1665 ³⁾. Ce problème avait été formulé par Huygens comme suit : ⁴⁾

„A et B jettent à tour de rôle croix ou pile, sous condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat, mais que celui qui jette croix prendra tout ce qui

²⁾ Voici comment cette formule peut être obtenue par une méthode qui ne diffère pas essentiellement de celle suivie par Huygens dans ce genre de problèmes. Cherchons à cet effet la somme des valeurs des chances de A pour chaque coup par lequel le jeu peut se terminer.

On trouve de cette manière :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \alpha n - \alpha' \beta + \alpha' \beta' \alpha (n+1) - 2\alpha'^2 \beta' \beta + \alpha'^2 \beta'^2 \alpha (n+2) - 3\alpha'^3 \beta'^2 \beta + \alpha'^3 \beta'^3 \alpha (n+3) + \\ &+ \dots = \frac{\alpha n}{1 - \alpha' \beta'} + \alpha' \beta' \alpha + 2\alpha'^2 \beta'^2 \alpha + 3\alpha'^3 \beta'^3 \alpha + \dots - \alpha' \beta - 2\alpha'^2 \beta' \beta - 3\alpha'^3 \beta'^2 \beta - \\ &- \dots = \frac{\alpha n}{1 - \alpha' \beta'} + \frac{\alpha' \beta' \alpha}{(1 - \alpha' \beta')^2} - \frac{\alpha' \beta}{(1 - \alpha' \beta')^2} \left(\text{puisque } \alpha + 2\alpha r + 3\alpha r^2 + \dots = \right. \\ &= \left. \alpha(1 - r)^{-2} \right) = \frac{\alpha n}{1 - \alpha' \beta'} + \frac{\alpha'(\alpha \beta' - \beta)}{(1 - \alpha' \beta')^2}. \end{aligned}$$

³⁾ Voir la p. 304 du T. V.

⁴⁾ Voir la p. 348 du T. V.

est mis, et A jette le premier, pendant que rien n'a été mis encore. La question est, combien A perd, quand il entre dans ce jeu, ou combien il pourrait donner à B pour pouvoir en finir ?

Or, Huygens en posant cette question avait sous-entendu que „le jeu ne devait pas finir avant que quelque chose n'eût été mis de part ou d'autre” ¹⁾.

Dans ce cas on a pour calculer la perte p de A :

$$p = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \psi_1(1)) = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\psi_1(1),$$

c'est-à-dire, en appliquant la formule (11) :

$$p = \frac{1}{3}\psi_1(1) = \frac{4}{27};$$

résultat qui fut, en effet, obtenu par Huygens ²⁾.

Hudde, au contraire, avait compris, que si A jetait croix du premier coup le jeu ferait fini. Dans cette hypothèse on a :

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \psi_1(1)) = \frac{1}{2}\psi_1(1) = \frac{2}{9};$$

résultat que Hudde communiqua à Huygens dans sa lettre du 5 mai ³⁾ (p. 350 du T. V).

Dans cette dernière lettre Hudde ne se borna pas à indiquer la solution du problème que nous venons de considérer, mais il posa de son côté la question suivante ⁴⁾ :

¹⁾ Voir la p. 422 du T. V.

²⁾ Comparez la p. 318 du T. V et consultez, pour connaître la voie suivie par Huygens dans la solution du problème, les p. 116—122 du présent Tome.

³⁾ Il est vrai que Hudde avait commencé par trouver $\frac{1}{6}$ au lieu de $\frac{2}{9}$ (voir sa lettre du 5 avril, p. 308 du T. V) mais ce résultat avait été obtenu dans la supposition (voir les p. 349—350 du T. V) que celui qui jette pile doit mettre un ducat „mais seulement pour la 1^e fois” (de sorte que l'enjeu pouvait monter au plus à deux ducats, dont l'un provenait de A et l'autre de B). Dans cette supposition la somme des valeurs des chances de A correspon-

„A et B tirent à l'aveuglette à tour de rôle. A toujours 1 de 3 jetons, desquels trois il y en a deux blancs et un noir, B de même toujours d'un certain nombre de jetons blancs et noirs dont la proportion reste invariable; sous condition que celui qui tire un jeton blanc jouira de tout ce qui est mis, mais qu'au contraire celui qui tire un noir ajoutera toujours un ducat: et A tirera le premier avant que rien n'ait été mis. On demande, lorsqu'on veut avoir des conditions équivalentes de part et d'autre, de sorte que, A commençant à tirer, il n'y ait d'avantage pour aucun des deux, quelle proportion devra se trouver entre les dits jetons blancs et noirs?”

Pour résoudre ce problème suivant l'interprétation de Huygens nous représenterons par ϵ_A l'espérance mathématique de A et par ϵ_B celle de B, lorsque c'est le tour de A de tirer et que rien n'a encore été mis.

On a donc, en employant les notations de la p. 32 :

$$\epsilon_A = -\alpha\epsilon_B - \alpha' + \alpha'(1 - \psi(1)) = -\alpha\epsilon_B - \alpha'\psi(1),$$

$$\epsilon_B = -\beta\epsilon_A - \beta'\psi(1),$$

dant aux différentes manières dont le jeu peut se terminer est représentée par la suite infinie :

$$0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = -\frac{1}{6}.$$

Il est vrai aussi que dans sa lettre du 29 juin (p. 383 du T. V) Hudde corrige son résultat de $\frac{2}{9}$ en $\frac{4}{27}$. En effet, la conformité de ce dernier résultat de Hudde à celui de Huygens n'a pas peu contribué à prolonger le malentendu qui existait entre eux. Cependant leur accord n'était qu'apparent. Hudde, ayant cherché la cause de la divergence entre son résultat (de $\frac{2}{9}$) et celui de Huygens (de $\frac{4}{27}$) dans une différence d'interprétation des conditions du problème, avait réussi (comme il le raconte naïvement dans sa lettre du 21 août, p. 449—451 du T. V) à découvrir, non sans peine, „un double sens évident dans le mot *gagner*”. Ce mot ne se trouvait pas dans l'énoncé du problème tel que Huygens le lui avait proposé, mais celui-ci ayant avoué (p. 422 du T. V) que cet énoncé avait été incomplet, Hudde supposait que Huygens avait oublié aussi d'y ajouter une phrase de la portée suivante: „que A en jetant croix du premier coup” gagnerait „autant qu'il perd par les conditions du jeu”. De cette manière Hudde avait donné à l'énoncé en question une interprétation extrêmement forcée qui lui fournit enfin le résultat tant désiré, conforme à celui de Huygens.

Ajoutons que dans la même lettre du 21 août Hudde explique (p. 447—448 du T. V) de quelle façon il avait obtenu successivement les nombres $\frac{1}{6}$ et $\frac{2}{9}$.

4) Voir les p. 350—351 du T. V.

et par conséquent :

$$\varepsilon_A = \frac{\alpha\beta'\varphi(1) - \alpha'\psi(1)}{1 - \alpha\beta}.$$

En substituant dans cette dernière formule les expressions que nous avons déduites pour $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ ¹⁾, on trouve facilement (en utilisant les relations $\alpha + \alpha' = 1$ et $\beta + \beta' = 1$) :

$$(12) \quad \varepsilon_A \text{ (interprétation de Huygens)} = \frac{-\alpha'\beta^2 + (\alpha^2 - \alpha')\beta\beta' + \alpha\beta'^2}{(1 - \alpha\beta)(1 - \alpha'\beta')^2}.$$

La condition de l'égalité des chances de A et de B au commencement du jeu exige donc que le rapport $\beta : \beta'$ entre les jetons blancs et noirs de B soit égal à la racine positive de l'équation :

$$\alpha' \left(\frac{\beta}{\beta'} \right)^2 + (\alpha' - \alpha^2) \frac{\beta}{\beta'} - \alpha = 0;$$

équation qui dans le cas du problème (où $\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha' = \frac{1}{3}$) nous donne :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{73}.$$

Ce font là, en effet, les résultats obtenus par Huygens, qu'il communiqua à Hudde dans ses lettres du 7 juillet et du 28 juillet²⁾.

Passons maintenant à l'interprétation de Hudde. D'après elle on a :

$$(13) \quad \varepsilon_A \text{ (interprétation de Hudde)} = -\alpha'\psi(1) = -\frac{\alpha'(\beta - \alpha\beta')}{(1 - \alpha'\beta')^2}.$$

L'égalité des chances exige donc en général :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \alpha$$

¹⁾ Voir les formules (9) et (10) de la p. 33 de cet Avertissement.

²⁾ Comparez les pp. 392 et 423 du T. V, et consultez quant à la méthode suivie par Huygens pour déduire ces résultats, le § 1 de l'Appendice IV (p. 108—113 du présent Tome) et le § 3 de l'Appendice V (p. 126—129 du même Tome).

Ajoutons que dans sa lettre du 10 mai (p. 352—353 du T. V) Huygens avait donné la solution fautive $\beta = \beta'$. Il la corrigea dans sa lettre du 7 juillet (p. 392 du T. V) ayant reconnu „d'avoir mis un + pour un —”.

et dans le problème spécial proposé par Hudde :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{2}{3};$$

résultats qu'il annonça à Huygens dans sa lettre du 29 juin ³⁾.

Voulant examiner encore d'une autre manière si, en effet, ses „calculs” à lui et ceux de Hudde „suivaient des voies différentes”, Huygens demanda à Hudde ⁴⁾ s'il trouvait, comme lui, $\frac{207}{343}$ d'un ducat pour l'avantage de A, qui fait le premier coup, dans le cas où A dispose de deux jetons blancs et d'un noir et B d'un blanc et de deux noirs.

On retrouve facilement le résultat mentionné en substituant dans la formule (12) de la p. 36 pour α, α', β et β' les valeurs $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. La même substitution appliquée à la formule (13) fournit, au contraire, $\frac{3}{49}$ d'un ducat. Sans doute ce dernier résultat eût été indiqué par Hudde dans sa réponse si le nouveau malentendu dont nous avons parlé dans le deuxième alinéa de la note 3 de la p. 34 n'était intervenu. On peut s'en convaincre en consultant les pp. 415—416 et 446 du T. V, où l'on voit de quelle manière Hudde avait obtenu la solution $\frac{9}{245}$ qu'il communiqua à Huygens dans sa lettre du 29 juin ⁵⁾.

Ici, comme partout, les calculs et les raisonnements de Hudde sur les questions dont nous traitons étaient parfaitement exacts, les divergences entre ses résultats et ceux de Huygens ne provenant que des interprétations différentes qu'ils donnaient à ces questions.

³⁾ Voir les pp. 381 et 385 du T. V.

⁴⁾ Voir sa lettre du 10 mai 1665 à la p. 353 du T. V.

⁵⁾ Voir la p. 381 du T. V.

Voici un autre problème proposé par Huygens dans sa lettre du 10 mai ¹⁾:

„A et B jettent à tour de rôle à croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra un ducat, mais que celui qui jette croix prendra tout ce qui est mis; et A jettera le premier. On demande combien A et B devraient mettre dès le commencement, c'est-à-dire, chacun une somme égale, pour faire que la condition de A et de B devienne la même?”

Sur ce problème la différence d'interprétation concernant l'effet du premier coup s'il était croix et que rien ne fût encore mis, ne trouvait pas de prise; par suite, les résultats obtenus par Huygens et Hudde étaient identiques.

Évidemment l'égalité des conditions des deux joueurs exige ici:

$$\varphi_1(n) = \frac{1}{2}n,$$

c'est à dire ²⁾:

$$\frac{2}{3}n - \frac{2}{9} = \frac{1}{2}n; n = \frac{4}{3};$$

il faut donc que chaque joueur commence par mettre $\frac{2}{3}$ d'un ducat.

Ce résultat fut indiqué par Hudde dans sa lettre du 29 juin ³⁾ et par Huygens dans la sienne du 7 juillet 1665 ⁴⁾.

Un dernier problème proposé par Huygens à Hudde en 1665. La „part du diable”.

Nous avons réservé une place à part au problème suivant ⁵⁾:

„A et B jettent à tour de rôle croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat à l'enjeu, mais celui qui jette croix recevra chaque

¹⁾ Voir les pp. 353 et 381—382 du T. V.

²⁾ Voir la formule (11) de la p. 33 de cet Avertissement.

³⁾ Voir la p. 382 du T. V.

fois un ducat si quelque chose a été mis. Et A jettera le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu, et le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mis, et l'on jouera jusqu'à ce que tout ait été enlevé. On demande quel est le désavantage de A?"

De ce problème Huygens a élaboré une solution sous la date du 15 juillet 1665⁶⁾. Il l'a aussi proposé à Hudde puisque celui-ci en a traité dans une pièce que nous avons reproduite aux p. 463—469 du T. V.

Au premier abord le problème n'a rien de bien particulier. Il semble même que la solution puisse être obtenue par un raisonnement très simple⁷⁾ que nous exposons dans la note 2 de la p. 142 et qui évidemment a échappé à l'attention de Huygens⁸⁾. Il y a cependant une réserve importante à faire dont nous parlerons plus loin⁹⁾.

Nous commençons par développer ici ce raisonnement d'une manière un peu plus générale que nous ne le faisons à la place précitée.

Supposons, à cet effet, que les joueurs A et B conviennent de se séparer à un instant où il y a n ducats à l'enjeu, et soit x_n la part qui revient au joueur dont c'est le tour de jeter. Nous divisons en deux périodes le jeu qui aurait eu lieu si les joueurs avaient continué. Nous étendons la première période jusqu'à l'instant où *pour la première fois* l'enjeu est réduit à un seul ducat et la seconde depuis cet instant jusqu'à la fin du jeu. Évidemment l'espérance mathématique correspondant aux ducats que le joueur peut gagner ou perdre pendant la première période est égale à son espérance totale dans le cas où il y a $n-1$ ducats à l'enjeu, c'est-à-dire elle est égale à x_{n-1} . Quant à son espérance correspondant à la seconde période, elle est égale à x_1 dans le cas où n est impair, parce que dans ce cas le tour de jeter fera au commencement de cette période au même joueur qui a jeté lorf-

⁴⁾ Voir la p. 394 du T. V. Sur la méthode suivie par Huygens on peut consulter le § 4 de l'Appendice V, p. 130—132 du présent Tome.

⁵⁾ Voir la p. 132 du présent Tome.

⁶⁾ Voir les p. 132—150.

⁷⁾ Nous devons ce raisonnement et les solutions fondées sur lui à notre collaborateur M. Fr. Schuh.

⁸⁾ Comparez les p. 142—143 du présent Tome où Huygens exprime le désir de connaître une solution plus simple que celle qu'il venait d'élaborer.

⁹⁾ Voir les p. 43—47 de cet Avertissement.

qu'il y avait n ducats à l'enjeu; dans le cas où n est pair son espérance sera, au contraire, représentée par $1 - x_1$ ¹⁾, l'unité étant égale à un ducat.

On a donc:

$$\begin{aligned} (14) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_n = x_{n-1} + x_1 \text{ (pour } n \text{ impair);} \\ (15) \quad x_n = x_{n-1} + 1 - x_1 \text{ (pour } n \text{ pair).} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dans le cas spécial $n = 2$, on trouve:

$$(16) \quad x_2 = x_1 + 1 - x_1 = 1.$$

Soient maintenant, au début du jeu, ϵ_A l'espérance du joueur qui jette le premier, ϵ_B celle de l'autre joueur.

D'après les règles du jeu, on a: $\epsilon_A = \frac{1}{2} \epsilon_B - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - x_1)$, puisque A s'il jette croix se trouvera après ce coup dans la même situation que celle où B se trouvait au commencement du jeu. Mais, parce qu'on a $\epsilon_A + \epsilon_B = 0$ ¹⁾, cette équation se réduit à:

$$(17) \quad \epsilon_A = -\frac{1}{3}x_1.$$

On a de plus:

$$(18) \quad x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - x_2) = 1 - \frac{1}{2}x_2,$$

et, par conséquent, à cause de la relation (16):

$$(19) \quad x_1 = \frac{1}{2};$$

donc enfin:

$$(20) \quad \epsilon_A = -\frac{1}{6};$$

résultat obtenu par Huygens²⁾ et aussi par Hudde³⁾.

¹⁾ C'est-à-dire dans l'hypothèse où la somme des espérances des deux joueurs est égale à l'enjeu qu'ils ont formé. Nous aurons à revenir sur cette hypothèse dont Huygens aussi a fait usage dans sa solution (voir p. e. la p. 133 du présent Tome).

²⁾ Voir les pp. 132—141.

³⁾ Voir la p. 463 du T. V.

Quant aux équations (14) et (15), elles se réduisent à la seule équation:
 $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}$, applicable lorsque n est pair ou impair. Et l'on trouve facilement à l'aide de cette équation :

$$(21) \quad x_n = \frac{1}{2}n^4.$$

Nous indiquons ci-après une autre solution ne reposant pas sur le raisonnement qui nous a fourni la valeur de x_2 . Elle nous fera connaître l'artifice sur lequel la solution de Huygens est fondée.

On a d'abord comme conséquence immédiate des règles du jeu 5) :

$$(22) \quad x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1-x_{n-1}) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n+1-x_{n+1}) = \\ = n - \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n+1},$$

ou bien :

$$(23) \quad x_{n+1} = 2n - x_{n-1} - 2x_n.$$

À l'aide d'une application répétée de cette dernière relation on exprime facilement x_3, x_4, x_5 , etc. en fonction de x_2 et de x_1 . On trouve :

$$(24) \quad \begin{cases} x_n = 2n - 2 - (n-2)x_1 - (n-1)x_2 & (n \text{ impair}), \\ x_n = -n + 2 + (n-2)x_1 + (n-1)x_2 & (n \text{ pair}). \end{cases}$$

$$(25) \quad \begin{cases} x_n = 2n - 2 - (n-2)x_1 - (n-1)x_2 & (n \text{ impair}), \\ x_n = -n + 2 + (n-2)x_1 + (n-1)x_2 & (n \text{ pair}). \end{cases}$$

4) Ce résultat est conforme à celui formulé par Huygens dans l'avant-dernier alinéa de la p. 142. En effet, quand n est pair Huygens suppose que les joueurs ont contribué pour une même somme à l'enjeu (voir les définitions de la p. 133). L'avantage du joueur est alors égal à zéro, parce qu'on doit soustraire sa mise $\frac{1}{2}n$ de son espérance future qui, elle aussi, est égale à $\frac{1}{2}n$. Quand n est impair Huygens suppose que l'adversaire a mis un ducat de plus que le joueur en question. L'avantage de celui-ci est donc $\frac{1}{2}n$ diminué de sa mise $\frac{1}{2}(n-1)$, c'est-à-dire qu'il est égal à un demi-duc.

5) En admettant toujours l'hypothèse formulée dans la note 1 de la p. 40.

Or, il résulte des équations (17) et (18):

$$(26) \quad x_1 = -3\varepsilon_A; \quad x_2 = 2 + 6\varepsilon_A.$$

Les équations (23) et (24) se réduisent donc aux suivantes:

$$(27) \quad \begin{cases} x_n = -3n\varepsilon_A & (n \text{ impair}), \\ x_n = n + 3n\varepsilon_A & (n \text{ pair}), \end{cases}$$

que nous écrivons:

$$(28) \quad \varepsilon_A = -\frac{x_n}{3n} \quad (n \text{ impair}),$$

$$(29) \quad \varepsilon_A = -\frac{1}{3} + \frac{x_n}{3n} \quad (n \text{ pair}).$$

À l'exemple de Huygens ¹⁾ nous raisonnons maintenant de la manière suivante: Même si n est un grand nombre, les espérances des deux joueurs ne peuvent différer que de 1 ou de 2 ducats, puisque la différence entre les chances du joueur qui jette le premier et de l'autre joueur ne peut se faire sentir que vers la fin de la partie quand il n'y a plus qu'un petit nombre de ducats à l'enjeu.

Soit donc p cette différence. On a alors $x_n = \frac{1}{2}n \pm \frac{1}{2}p$. Substituons cette valeur de x_n dans les équations (28) et (29) et faisons croître indéfiniment le nombre n . Ces équations amènent alors l'une et l'autre le même résultat, savoir $\varepsilon_A = -\frac{1}{6}$.

Difons enfin quelques mots à propos de la solution de Huygens. Huygens commence par déduire deux équations qui sont équivalentes à nos équations (17) et (18) ²⁾. Ensuite il se sert d'une série d'équations ³⁾ qui ne diffèrent pas essentiellement de celles qu'on obtient en prenant successivement $n=2, n=3$, etc.

¹⁾ Voir l'alinéa qui commence en bas de la p. 139 du présent Tome.

²⁾ Ce sont les équations $3a = b$ et $b = \frac{a-c}{2}$ qu'on trouve à la p. 133.

³⁾ Voir la p. 134.

dans l'équation (22) ⁴⁾. De cette manière Huygens réussit à exprimer la quantité $-a = \varepsilon_A$ à l'aide d'une suite qu'on peut prolonger indéfiniment ⁵⁾. Il lui faut donc prouver qu'on peut négliger le dernier terme de cette suite quand on la prolonge suffisamment ⁶⁾. C'est à quoi il emploie le raisonnement que nous venons de reproduire. Après cela il ne s'agit plus que de sommer la suite en question; ce qui lui réussit également ⁷⁾.

Remarquons que cette solution de Huygens contraste favorablement avec celle de Hudde. Dans la première Pièce qui se rapporte à cette dernière solution ⁸⁾, Hudde n'a trouvé d'autre issue que d'ériger en „Corollaire” une relation qui dans nos notations s'exprime par: $x_4 - 2 = x_3 - 1$. Dans une autre Pièce ⁹⁾ il tâche de prouver la relation $x_3 - 1 = 0$ par un développement en série dans lequel il néglige en dernière instance un grand nombre de termes dont les valeurs lui sont inconnues.

Nous avons maintenant à nous occuper de la réserve qui nous empêche d'accepter sans discussion les solutions dont nous venons de traiter. Ces solutions supposent que la somme des espérances des deux joueurs est égale à l'enjeu. Or, cette hypothèse devient ici sujette à caution parce que le jeu peut se prolonger indéfiniment sans que l'enjeu soit jamais épuisé.

Afin de montrer la portée de cette remarque, supposons que les joueurs conviennent de donner l'enjeu à une troisième personne dans le cas où cet enjeu monterait à ν ducats. Quelle est l'espérance mathématique $\varphi_c(n, \nu)$ de cette personne à l'instant où l'enjeu contient n ducats ($n < \nu$)?

On a évidemment: $\varphi_c(1, \nu) = \frac{1}{2}\varphi_c(2, \nu)$, et de même:

⁴⁾ Comparez la note 1 de la p. 135.

⁵⁾ Voir les p. 135—139.

⁶⁾ Il s'agit du terme $-\frac{1}{3^2}k$ de la suite qu'on trouve à la p. 139. Or, dans la note 2 de la p. 138 nous avons indiqué la relation qui existe entre la quantité k et la différence des espérances des joueurs.

⁷⁾ Voir la p. 140.

⁸⁾ Voir les p. 463—465 du T. V.

⁹⁾ Voir les p. 468—469 du T. V.

$$\varphi_c(n, \nu) = \frac{1}{2}\varphi_c(n+1, \nu) + \frac{1}{2}\varphi_c(n-1, \nu) \quad (\text{pour } 1 < n < \nu).$$

De ces relations on déduit facilement:

$$\varphi_c(n, \nu) = n\varphi_c(1, \nu) \quad (\text{pour } 1 \leq n \leq \nu).$$

Or, $\varphi_c(\nu, \nu) = \nu$, donc $\varphi_c(1, \nu) = 1$, et par suite:

$$(30) \quad \varphi_c(n, \nu) = n \quad (\text{pour } 1 \leq n \leq \nu).$$

Soit maintenant ε_c l'espérance de la troisième personne au début du jeu, rien n'étant encore mis. On a:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\varepsilon_c + \frac{1}{2}\varphi_c(1, \nu) = \frac{1}{2}\varepsilon_c + \frac{1}{2},$$

et, par conséquent:

$$(31) \quad \varepsilon_c = 1.$$

L'espérance de la troisième personne est donc indépendante du nombre ν . Elle est égale à un ducat au commencement du jeu et elle augmente ou diminue ensuite régulièrement avec l'enjeu auquel elle reste toujours égale.

Quelle est la probabilité que l'enjeu après être monté à n ducats atteigne la somme de ν ducats?

On obtient cette probabilité en divisant l'espérance de la troisième personne par la somme qu'il peut obtenir. Elle est donc égale à $\frac{n}{\nu}$ quand $1 \leq n \leq \nu$, et à $\frac{1}{\nu}$ quand rien n'a encore été mis.

La probabilité que la troisième personne gagne l'enjeu s'approche donc indéfiniment de zéro à mesure que ν augmente.

Pour $\nu = 2n$ elle est égale à $\frac{1}{2}$. Or, puisque la probabilité que l'enjeu diminue de n à 0, sans passer par $\nu = 2n$, est évidemment égale à celle qu'il monte de n à $\nu = 2n$ (sans passer par zéro), il ne reste rien pour la probabilité que l'enjeu oscille indéfiniment entre les limites 0 et $2n$ sans jamais atteindre ni l'une ni l'autre. Quoique cet événement ne soit pas impossible, sa probabilité est donc infiniment petite. Et si cela est vrai pour $\nu = 2n$, il en est de même *a fortiori* pour $\nu = 2n - 1$,

c'est-à-dire la conclusion reste applicable dans le cas où la limite supérieure est désignée par un nombre impair.

Quelles sont l'espérance $\varphi_A(n, \nu)$ du joueur qui doit jeter, et celle $\varphi_B(n, \nu)$ de l'autre joueur ?

Il faut dans le développement postérieur du jeu distinguer trois possibilités : 1° l'enjeu est épuisé par les joueurs, 2° il est gagné par la troisième personne, 3° il oscille indéfiniment entre 0 et ν ducats sans jamais atteindre une de ces deux limites. Ce dernier événement entraînerait pour les joueurs une perte n'excédant jamais ν ducats; perte qu'on peut négliger puisque la probabilité est infiniment petite comme nous venons de le voir.

On a donc :

$$\varphi_A(n, \nu) + \varphi_B(n, \nu) + \varphi_C(n, \nu) = n,$$

c'est-à-dire, à cause de l'équation (30) :

$$(32) \quad \varphi_B(n, \nu) = -\varphi_A(n, \nu).$$

En appliquant les règles du jeu, on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_A(n, \nu) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_B(n-1, \nu) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_B(n+1, \nu) = \\ &= -\frac{1}{2}\varphi_A(n-1, \nu) - \frac{1}{2}\varphi_A(n+1, \nu), \end{aligned}$$

ou bien :

$$\varphi_A(n+1, \nu) = -2\varphi_A(n, \nu) - \varphi_A(n-1, \nu) \quad (\text{pour } 1 < n < \nu).$$

On a de plus :

$$\varphi_A(1, \nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_B(2, \nu) = -\frac{1}{2}\varphi_A(2, \nu).$$

À l'aide de ces deux dernières relations on trouve sans peine :

$$\begin{cases} \varphi_A(n, \nu) = n\varphi_A(1, \nu) & (\text{pour } n \text{ impair et } \leq \nu), \\ \varphi_A(n, \nu) = -n\varphi_A(1, \nu) & (\text{pour } n \text{ pair et } \leq \nu). \end{cases}$$

Or, évidemment $\varphi_A(\nu, \nu) = 0$, donc :

$$(33) \quad \varphi_A(1, \nu) = \varphi_B(1, \nu) = 0^1).$$

Calculons maintenant les espérances ϵ'_A et ϵ'_B des joueurs A et B au début du jeu.

On a :

$$\epsilon'_A + \epsilon'_B + \epsilon_C = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $\epsilon_C = 1$:

$$\epsilon'_B = -1 - \epsilon'_A$$

Or, d'après les règles du jeu :

$$\epsilon'_A = \frac{1}{2}\epsilon'_B - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_B(1, \nu) = -1 - \frac{1}{2}\epsilon'_A,$$

et par suite :

$$(34) \quad \epsilon'_A = -\frac{2}{3}, \quad \epsilon'_B = -\frac{1}{3}.$$

En comparant ce résultat à celui de la p. 40 on voit que la perte causée aux joueurs par la participation supposée de la troisième personne se répartit également sur les deux joueurs.

Revenons maintenant au problème tel qu'il fut posé par Huygens. Il n'y est question que des deux joueurs A et B. Cependant il n'y a pas lieu, nous semble-t-il, de leur assigner l'espérance mathématique qui, d'après nos calculs, revient à la troisième personne que nous avons introduite. Dès que la formation de l'enjeu a commencé ces joueurs se trouvent dans la situation que nous avons indiquée dans la note 1 de cette page, pourvu qu'on y suppose $\nu = \infty$; c'est-à-dire l'enjeu doit être considéré comme perdu pour eux, puisque leurs espérances mathématiques font devenues égales à zéro. On arrive à cette conclusion si l'on fait croître indé-

¹⁾ Ce résultat s'explique facilement. A chaque coup le joueur a une chance égale de gagner ou de perdre un ducat. Son espérance mathématique est donc égale à zéro pour chaque coup en particulier. Or, lorsque l'enjeu est épuisé ou lorsqu'il monte à ν ducats, cela n'a d'autre effet pour les joueurs que de faire cesser le jeu.

²⁾ Voir la p. 32 de cet Avertissement.

finiment le nombre ν . Il est vrai que la probabilité que le jeu continue jusqu'à l'infini est infiniment petite, mais l'espérance mathématique qui correspond à cette éventualité n'en reste pas moins une quantité finie. Elle est égale à chaque instant à l'enjeu actuel.

Remarquons que des considérations analogues se présentent dans tous les jeux où les coups peuvent se répéter indéfiniment sans épuiser l'enjeu, de sorte qu'il nous semble utile d'introduire un terme pour désigner la somme qui dans un tel jeu est perdue pour les joueurs à l'instant même où ils conviennent de jouer. Nous proposons de la nommer: la part du diable.

N'oublions pas cependant que parfois dans les jeux de ce genre il est facile de montrer dès l'abord que cette part est infiniment petite, et par suite négligeable.

Prenons par exemple le problème de la p. 31. La probabilité qu'un enjeu de n ducats monte sous les conditions de ce problème jusqu'à $n + \nu$ ducats s'exprime pour ν pair par $\alpha'^{\frac{1}{2}\nu} \beta'^{\frac{1}{2}\nu}$, et pour ν impair par $\alpha'^{\frac{1}{2}(\nu+1)} \beta'^{\frac{1}{2}(\nu-1)}$. La „part du diable” est donc dans ce cas égale à la limite, pour $\nu = \infty$, du produit de ces expressions par $n + \nu$, c'est-à-dire qu'elle est nulle. Afin de résoudre ce problème, il est donc permis, comme nous l'avons fait ²⁾, d'appliquer l'hypothèse que la somme des espérances des joueurs est à chaque instant égale à l'enjeu ³⁾.

³⁾ Supposons, pour avoir un autre exemple, que les chances de chaque joueur de tirer un ducat de l'enjeu ou d'y mettre un ducat soient entre elles comme p est à q . On trouve alors:

$$\varphi_C(n, \nu) = \frac{\nu \left(1 - \left(\frac{p}{q} \right)^n \right)}{1 - \left(\frac{p}{q} \right)^\nu};$$

par suite la part du diable est nulle dans le cas $p > q$ et ∞ dans celui de $p < q$, tandis que pour $p = q$ on retrouve la formule (30).

Ajoutons que la probabilité qu'un enjeu de n ducats augmente jusqu'à ν ducats est

$\frac{1 - \left(\frac{p}{q} \right)^n}{1 - \left(\frac{p}{q} \right)^\nu}$. On a donc $\frac{1}{1 + \left(\frac{p}{q} \right)^n}$ pour la probabilité que cet enjeu monte à $2n$ ducats. Or,

on en déduit en intervertissant les nombres p et q , celle que l'enjeu s'épuise sans avoir jamais contenu $2n$ ducats. La somme de ces deux dernières probabilités étant égale à l'unité, il en résulte que, cette fois encore, la probabilité que l'enjeu oscille entre 0 et $2n$ ducats, sans jamais atteindre ces limites, est infiniment petite.

Nous finissons par indiquer de quelle manière la part du diable peut être éliminée par un changement dans l'énoncé du problème qui nous occupe. Il suffit pour cela d'ajouter à cet énoncé la clause suivante : Lorsque l'enjeu monte à une certaine somme les joueurs se le partageront en parties égales sans continuer le jeu. Évidemment il faut alors ajouter à l'espérance de chaque joueur la moitié de ce que nous avons trouvé pour l'espérance de la troisième personne ¹⁾.

On a donc dans ce cas :

$$\epsilon_A = \epsilon'_A + \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}; \epsilon_B = \epsilon'_B + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

et de même :

$$x_n^{(2)} = \varphi_A(n, \nu) + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n;$$

résultats conformes à ceux de Huygens ³⁾.

¹⁾ Voici une autre idée, suggérée par M. F. Schuh. Supposons que les personnes A et B, qui sont intéressées au jeu, ne jouent pas elles-mêmes, mais qu'elles se fassent représenter au jeu par des délégués. Si ces délégués leur annoncent que le jeu est fini, sans en communiquer le résultat, les personnes A et B, qui ont fait une gageure sur le résultat, sachant que le délégué de A ferait le premier coup, se trouvent précisément dans les conditions qui justifient la solution de Huygens, puisque la possibilité que le jeu se continue indéfiniment est exclue.

²⁾ Voir sur cette notation la p. 39.

³⁾ Comparez les p. 40—41.

10-10-10

FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.

I. PROPOSITIONUM ARITHMETICARUM ET GEOMETRICARUM CENTURIA.

II. CONSTRUCTIO PROBLEMATUM SIMPLICIUM GEOMETRICORUM.

III. APOLLONII PERGÆI LOCA PLANA RESTITUTA.

IV. ORGANICA CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIO.

V. SECTIONES MISCELLANÆ TRIGINTA.

Quibus accedit CHRISTIANI HUGENII Tractatus,
de Ratiociniis in Aleæ Ludo.

FRANCISCI VAN SCHOOTEN
**MATHEMATISCHE
OEFFENINGEN,**
Begrepen in vijf Boeken.

- I. Verhandeling van vijftig Arithmetische en vijftig Geometrische Voorstellen.
- II. Ontbinding der Simpele Meet-konstige Werck-stucken.
- III. APOLLONII PEROMÆI herfelde Vlacke Plaetsen.
- IV. Tych-werckelijcke beschrijving der Kegel-snedes op een vlack.
- V. Dertich Af-deelingen van gemengde stoffe.

Waer by gebouwt is een Tractaet / handelende van Reekening
in Speelen van Geluck /

Door d'Heer

CHRISTIANUS HUGENIUS.

Desen Druk vermeerdert met een korte verhandeling van
de Fondamenten

der

PERSPECTIVE.

52

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM,
LIBER V.
CONTINENS

Sectiones triginta miſcellaneas.



LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiae Typographi.
CLD LDC LVII.

Dijde Gouck
der
MATHEMATISCHE
OEFFENINGEN,
Begrijpende
Dertich Afdeelingen van
gemengde stoffe.

Door
FRANCISCUS van SCHOOTEN,
Professor Matheseos in de Univerfiteyt tot *Leyden.*



AMSTERDAM,

By GERRIT van GOEDESBERGH,
Boeck-verhooper op 't Water / in de Delfsche Babel / tegen
over de Nieuwe-Brugh. **ANNO 1660.**

AU LECTEUR¹⁾.

Lorsque j'avais déjà pris la résolution de terminer ces excercises²⁾, il m'est venu à l'esprit, Cher Lecteur, qu'il me restait encore plusieurs autres sujets amusants et remarquables, lesquels, si je les avais ajoutés à ces Sections³⁾ et que j'avais réussi à les traiter dignement, auraient grandement orné mon travail et peut-être facilité et rendu plus profitables tes Études; seulement la peine que j'aurais dû prendre pour les développer, ainsi que le travail qu'ils m'auraient coûté, me seraient devenus trop lourds. C'est pourquoi (de même que, parmi d'autres matières traitées dans les Sections précédentes de mon ouvrage, j'ai indiqué comment quelques-unes des Propositions les plus belles et les plus subtiles trouvées en partie par les Mathématiciens de l'Antiquité et en partie par les Mathématiciens les plus Excellents de ce siècle, auraient pu être cherchées et trouvées au moyen de l'*Algèbre*) il ne m'a pas semblé inopportun, afin d'étendre les applications de cet Art, d'ajouter ici, au lieu des sujets qui me restaient, ce qui a été inventé dernièrement par le Très Noble et Très Célèbre Seigneur CHRISTIANUS HUGENIUS sur le calcul dans les Jeux de Hasard, Traité qu'il m'a communiqué avec une lettre que j'ai également ajoutée⁴⁾. Je présume que son Écrit te plaira d'autant mieux que les considérations de l'auteur te paraîtront plus subtiles et plus extraordinaires; surtout parce qu'il y emploie la même *Analyse* dont je me suis servi et dont je lui ai enseigné jadis les fondements⁵⁾, et qu'ainsi il indique à ceux qui ont étudié cet art une méthode pour analyser de pareils Problèmes. Si je t'ai donné ainsi, Cher Lecteur, outre le reste de mon travail, assez de sujets pour t'exercer dans ce genre d'Étude⁶⁾, tu comprendras, j'espère, ma bonne volonté envers toi, ce qui te fera agréer la peine que j'ai prise pour ton bien et celui des Études. Adieu.

¹⁾ Dans cet avant-propos, qu'on trouve aux p. 485—486 des „Mathematische Oeffeningen”, le professeur van Schooten introduit chez ses lecteurs le petit traité, qui va suivre, sur les jeux de hasard, composé par son élève Christiaan Huygens.

²⁾ Il s'agit de l'ouvrage dont nous avons reproduit le titre en fac-simile à la p. 50. Comparez l'Avertissement, à la p. 5 du présent Tome.

³⁾ Le traité de Huygens fut ajouté au cinquième et dernier Livre de l'ouvrage de van Schooten. Dans l'édition hollandaise dont nous nous servons ce Livre portait le titre „Vijfde Bouck der Mathematische Oeffeningen, begrijpnde Dertich Afdeelingen van gemengde stoffe”. Dans l'édition latine qui la précédait le même Livre était intitulé „Excercitationum Mathematicarum, Liber V, Continens Sectiones triginta miscellaneas.” Voir les deux pages précédentes.

TOT DEN LESER 1).

Na dat ick besloten hadt een eynde van dese oeffeningen te maecken ²⁾, soo heb ick bevonden, dat my, Beminde Leser, noch verscheyde andre dingen van vermaeckelijcke en treffelijcke stoffe overich waren, welcke, soo ickse, na haer waerde verhandelt hebbende, by dese Afdeelingen ³⁾ gevoegt hadde, niet weynich cieraet aen desen mijnen arbeyt en mogelijk oock hulp en profijt aen uwe Studien souden toe-gebracht hebben; doch de moeyte van die te beschrijven als oock het werck souden my te verdrietig gevallen zijn. Weshalven alsoo ick onder andere dingen, die in de voorgaende Afdeelingen verhandelt zijn, betoont hebbe, op wat wijz sommige der fraeyste en subtiylste Voorstellen, die ten deele van de Oude, en ten deele van de Voortreffelickste Wiskonstenaers deser eeuwe seer aerdig zijn uyt-gevonden, souden mogen zijn gefocht, ofte door behulp der *Algebra* kunnen gevonden worden: soo en heb ick 't niet ongerijmt geacht, indien ick, tot overvloediger gebruyck van dese Konst, 't geen onlangs door den Wel-Edelen en Wijt-beroemden Heer CHRISTIANVS HVGENIVS aengaende 't reekenen in Spelen van Geluck uyt-gevonden ende my in schrift van hem mede gedeelt is, alhier met desselfs brief ⁴⁾, in plaets van 'tgeene my overig was, by-voegde. Welck sijn Traetaet ick dan UE. des te aengener acht te fullen wesen, als 'tgeen daer in verhandelt wordt te subtiyl der en ongemeender sal bevonden worden; insonderheyt door dien hy tot desselfs vinding deselve *Analysis*, welckers fondamenten hy eertijts van my geleert heeft ⁵⁾, als ick, gebruyckt; en alsoo de bevlytigers van die de weg baent om diergelijcke Voorstellen te ontbinden. Waer in, soo ick nevens mijnen andren arbeyt aen U, Beminde Leser, in dese foort van Studie ⁶⁾ genoegsame stof van oeffening gegeven hebbe; soo sult ghy daer uyt (gelijck ick hoop) mijne bereytwillegheyt r'uaerts kunnen afnemen, en dienvolgende oock mijnen arbeyt, r'uwen en der Studien besten aengenomen, ten goeden duyden. Vaert wel.

⁴⁾ Voir la page 57 qui suit.

⁵⁾ Voir au T. XI les p. 7—20 qui contiennent un aperçu de l'enseignement donné par van Schooten en 1645 et 1646 à son élève Christiaan Huygens âgé alors de 16 à 17 ans. Cet enseignement était fondé surtout sur les méthodes exposées par Descartes dans sa „Géométrie”; voir l'ouvrage cité dans la note 7, p. 6 du T. I.

⁶⁾ C'est-à-dire dans l'étude des méthodes analytiques.

A Monsieur
*FRANCISCUS van SCHOOTEN*¹⁾.

Monsieur,

Sachant qu'en publiant les louables fruits de votre intelligence et de votre zèle, vous vous proposez entre autres de faire voir, par la diversité des sujets traités, la grandeur du champ sur lequel notre excellent Art *Algébrique* s'étend, je ne doute pas que le présent écrit au sujet du Calcul dans les Jeux de hasard ne puisse vous servir à atteindre ce but. En effet, plus il semble difficile de déterminer par la raison ce qui est incertain et soumis au hasard, plus la science qui parvient à ce résultat paraîtra admirable. Comme c'est donc à votre demande et à la suite de vos exhortations que j'ai commencé à mettre ce Calcul par écrit²⁾, et que vous le jugez digne de paraître ensemble avec les résultats de vos profondes recherches, non seulement je vous donne volontiers la permission de le publier de cette façon mais encore j'estime que cette manière de publication sera tout à mon avantage. Car si quelques lecteurs pourraient bien s'imaginer que j'ai travaillé sur des sujets de faible importance, ils ne condamneront néanmoins pas comme complètement inutile et indigne de toute louange ce que vous voulez bien adopter de cette façon comme si c'était votre propre ouvrage, après l'avoir traduit, non sans quelque labeur, de notre langue en Latin³⁾. Toutefois je veux croire qu'en considérant ces choses plus attentivement, le lecteur apercevra bientôt qu'il ne s'agit pas ici d'un simple jeu d'esprit, mais qu'on y jette les fondements d'une spéculation fort intéressante et profonde. Les Problèmes appartenant à cette Matière ne seront pas, me semble-t-il, jugés plus faciles que ceux de *Diophante*, mais on les trouvera peut-être plus amusants attendu qu'ils renferment quelque chose de plus que de simples propriétés des nombres. Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a déjà un certain temps que quelques-uns des plus Célèbres Mathématiciens

¹⁾ Voir sur Frans van Schooten la note 2, p. 4 du T. I.

²⁾ Comparez la lettre à de Roberval du 18 avril 1656 et celle à van Schooten du 20 avril 1656, p. 404 du T. I.

Aen mijn Heer,
*FRANCISCUS van SCHOOTEN*¹⁾.

Mijn Heer,

Naer dien ick weet dat VE., de loffelijke vruchten van zijn vernuft ende arbeyt in 't licht gevende, onder anderen dit oogmerck heeft: namentlijk, om door de verscheydenheyt der verhandelde stoffen te betoonen hoe wijt onse uytnemende Konst van *Algebra* sich uytstreckt; soo en twijffele ick oock niet, of het geene ick van de Rekeningh in Spelen van geluck beschreven heb, sal tot VE. opset niet ondienstig zijn. Want soo veel te swaerder als het scheen, door reden te konnen bepalen het geene onseker is ende het geval onderworpen, soo veel te meer verwonderings waerdigh sal die wetenschap schijnen, waer door sulcx kan werden te weege gebracht. Dewijl ick dan op VE. versoeck ende aen-maeninghe, dese Rekening eerst heb beginnen by geschrift te stellen²⁾, ende VE. deselve waerdigh acht om te gelijk met syne diepsinnige vonden in 't licht te komen; soo en sal ick niet alleen het selve geerne toestaen, maer oock tot mijn voordeel duyden, dat die op dese maniere te voorschijn werde gebracht. Want of sommige mochten dencken dat ick ontrent geringhe dingen en van weynigh gewichte mijn moeyte besteedt hadde, soo en sullen sy nochtans niet t' eenemael voor onnut ende onpryselijk houden, het geene VE. in dier voegen als voor het syne is aen-nemende, en niet sonder arbeyt uyt onse spraek in de Latijnsche heeft overgeset³⁾. Alhoewel ick wil gelooven, so iemandt dese dinghen wat naerder begint in te sien, dat hij haest sal bevinden, geen enckel spel te zijn het geene hier wert verhandelt, maer datter de beginfelen en gronden geleyt werden van een seer aerdige en diepe speculatie. Soo sullen oock, meyne ick, de Voortellen die in dese Materie voorvallen, geen-sins lichter als die van *Diophantus* geacht werden, doch wel vermaeckelijcker misfchien, door diense iets meer inhouden als bloote eygenschapen der getallen. Voorts is te weten, dat al over eenighen tijdt, sommige van de Vermaertste Wis-

³⁾ En effet, le présent Traité sur le Calcul dans les Jeux de hasard parut pour la première fois en 1657 dans l'édition latine des „Mathematische Oeffeningen” qui précédait de trois années l'édition hollandaise que nous suivons; voir l'Avertissement, aux pp. 5 et 8 du présent Tome.

de toute la France se sont occupés de ce genre de Calcul ¹⁾, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première Invention qui ne m'appartient pas. Mais ces savants, quoiqu'ils se missent à l'épreuve l'un l'autre en se proposant beaucoup de questions difficiles à résoudre, ont cependant caché leurs méthodes. J'ai donc dû examiner et approfondir moi-même toute cette matière à commencer par les éléments, et il m'est impossible pour la raison que je viens de mentionner d'affirmer que nous sommes partis d'un même premier principe. Mais pour ce qui est du résultat, j'ai constaté en bien des cas que mes solutions ne diffèrent nullement des leurs ²⁾. Vous trouverez qu'à la fin de ce Traité ³⁾ j'ai proposé encore quelques questions du même genre sans indiquer la manière de les résoudre, premièrement parce que je voyais qu'il me coûterait trop de travail d'exposer convenablement les raisonnements conduisant aux réponses, et en second lieu parce qu'il me semblait utile de laisser quelque chose à chercher à nos lecteurs (s'il s'en trouve quelques-uns), afin que cela leur servît d'exercice et de passe-temps.

La Haye
le 27 Avril

1657.

Votre serviteur dévoué

CHR. HUYGENS de ZUTLICHEM.

¹⁾ Il s'agit surtout de Pascal et de Fermat; voir la p. 405 du T. I et les p. 3—4 de l'Avertissement qui précède.

konstenaers van geheel Vranckrijck met dese soorte van Rekeningh ¹⁾ zijn besigh geweest, op dat niemandt hier in, de eer van de eerste Inventie die de myne niet en is, my toe en schrijve. Doch sy luyden, offe wel sich onder malkanderen met veele swaere questien ter proeve stelden, soo hebbense nochtans elck sijn maniere van uytvinding bedeckt gehouden. Soo dat ick van noode gehad heb, alles van vooren aen selfs te onderfoecken en te doorgronden: ende daerom oock noch niet versceekert en ben, of wy hier in een selfde eerste beginfel getroffen hebben. Maer de uytkomst belangende, heb ick in veele questien ondervonden dat de myne van de haere geensins en verscheelt ²⁾. VE. sal vinden dat ick in 't eynde van dit Tractaet ³⁾, noch eenige van die questien bygevoegt hebbe, achterlaetende nochtans de werckingh; eensdeels om dat ick te veel moeyte te gemoet sagh, indien ick alles nae behooren wilde afdoen; ten anderen om dat my raetsaem dacht, iets overigh te laeten, 'twelck onse Lesers (soo der eenige zijn fullen) mochte dienen tot oeffeningh en tijdt-verdrijf.

In s'Graven-
Hage den 27
Apr. 1657.

VE. dienstwilligen dienaar

CHR. HUYGENS van ZUTLICHEM.

²⁾ Voir les p. 6—8 de l'Avertissement.

³⁾ Voir les p. 89—91.



DU CALCUL

DANS LES

JEUX DE HASARD.

[1656—1657].

Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée. Exemple: si quelqu'un parie de jeter avec un dé six points au premier coup, il est incertain s'il gagnera ou s'il perdra; mais ce qui est déterminé et calculable c'est combien la chance qu'il a de perdre son pari surpasse celle qu'il a de le gagner. De même, si je joue avec une autre personne à qui gagnera le premier trois parties et que j'en ai déjà gagné une, il est encore incertain lequel des deux l'emportera; mais on peut calculer avec certitude le rapport de ma chance de gagner à la sienne, et l'on fait par conséquent aussi de combien, si nous voulons interrompre le jeu, la part de l'enjeu à laquelle j'ai droit surpasse la sienne¹⁾. On peut calculer également pour quel prix je devrais raisonnablement céder mon jeu à quelqu'un qui désirerait le continuer en mon lieu. Bien des questions de ce genre peuvent se présenter en des cas semblables où il y a 2, 3 ou plusieurs personnes²⁾, et comme ces calculs ne sont pas universellement connus et peuvent souvent être utiles, j'en indiquerai brièvement la méthode, après quoi je considérerai aussi le jeu aux dés³⁾.

Dans ces deux matières je pars de l'hypothèse que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne. Exemple: si quelqu'un cache à mon infu trois

¹⁾ Voir la Prop. VI, p. 71.

²⁾ Voir les Prop. IV, V, VII, VIII, IX, p. 67—77.

³⁾ Voir les Prop. X—XIV, p. 77—87.



VAN
R E K E N I N G H
IN
SPELEN VAN GELUCK.
[1656—1657].

Al-hoewel in de spelen, daer alleen het geval plaets heeft, de uytkomsten onseecker zijn, soo heeft nochtans de kansse, die yemandt heeft om te winnen of te verliezen, haere seeckere bepaling. Als by exempel. Die met een dobbel-steen ten eersten een ses neemt te werpen, het is onseecker of hy het winnen sal of niet; maer hoe veel minder kans hy heeft om te winnen als om te verliezen, dat is in sich selven seecker, en werdt door reeckeningh uyt-gevonden. So mede, als ick tegen een ander in drie spelen uyt speel, ende een spel daer van gewonnen hebbe, het is noch onseecker wie eerst sal uyt wesen. Doch hoe dat mijn kansse staet tegen de syne, kan seeckerlijck bereeckent werden, en daer door oock bekend, ingevalle wy het spel wilden laten blijven, hoe veel my meerder toe-komen soude van 't geen ingeset is als hem ¹). Ofte oock indien yemandt anders mijn spel begeerde over te nemen, waer voor ick hem dat soude behooren te laten. Hier kunnen verscheyde questien uyt ontsaen tusschen 2, 3 of meerder getal van speelders ²), en dewijl diergelijcke reeckeningh geensins gemeen en is ende dickmaels kan te passe komen, soo sal ick hier in 't kort de wegh daer toe aenwijzen, ende daer na oock eenige verklaringe doen aengaende de dobbel-steenen ³).

Ick neeme tot beyder fundament, dat in het speelen de kansse, die yemant ergens toe heeft, even soo veel weerdt is als het geen, het welck hebbende hy weder tot defelfde kansse kan geraecken met rechtmatigh spel, dat is, daer in niemant verlies geboden werdt. By exempel. So yemandt sonder mijn weeten in

écus ¹⁾ dans une main et sept dans l'autre, et me donne à choisir entre les deux mains, je dis que cet offre a pour moi la même valeur que si j'étais certain d'obtenir cinq écus; en effet, lorsque je possède cinq écus, je puis de nouveau me mettre dans le cas d'avoir des chances égales d'obtenir trois ou sept écus, et cela dans un jeu équitable, comme cela fera démontré plus bas ²⁾.

PROPOSITION I.

Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$.

Afin de non seulement démontrer cette règle mais aussi de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x , je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne, dont l'enjeu est également x ; il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable, et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou $2x - a$ en gagnant le jeu; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $2x$, duquel je dois donner a à l'autre joueur. Si $2x - a$ était égal à b , j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b . Je pose donc $2x - a = b$, d'où je tire la valeur de ma chance $x = \frac{a+b}{2}$. La preuve en est aisée. En effet, possédant $\frac{a+b}{2}$, je puis

hasarder cette somme contre un autre joueur qui mettra également $\frac{a+b}{2}$, et convenir avec lui que le gagnant donnera a à l'autre. J'aurai de sorte une chance égale d'avoir a si je perds, ou b si je gagne; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $a+b$ et je lui en donne a .

En chiffres. Lorsque j'ai une chance égale d'avoir 3 ou d'avoir 7, la valeur de ma chance est 5 d'après cette Proposition; et il est certain qu'ayant 5 je puis me procurer de nouveau la même chance. En effet, si je joue 5 contre une autre personne dont la mise est également 5, à condition que le gagnant donnera 3 à l'autre, c'est là un jeu équitable, et il est évident que j'ai la même chance d'avoir 3 en perdant, ou d'avoir 7 en gagnant; car en ce cas j'obtiens 10, dont je lui en donne 3.

¹⁾ Le „schelling” est une ancienne monnaie hollandaise valant six sous; mais puisque la valeur de la pièce n'importe pas et qu'on trouve dans l'édition latine le mot „solidus”, qui signifie une certaine pièce d'or, nous employerons dans notre traduction française l'expression „écu”.

²⁾ Voir la Prop. I, qui suit.

d'eene handt 3 schellingen ¹⁾ verbergt, en in d'ander 7 schellingen, ende my te kiesen geeft welck van beyde ick begeere te hebben, ick segge dit my even soo veel weerdt te zijn, als of ick 5 schellingen seecker hadde. Om dat, als ick 5 schellingen hebbe, ick wederom daer toe kan geraecken, dat ick gelijcke kans sal hebben, om 3 of 7 schellingen te krijgen, en dat met rechtmatigh spel: gelijck hier naer sal betoont werden ²⁾).

I. VOORSTEL.

Als ick gelijcke kans hebbe om a of b te hebben, dit is my so veel weerdt als $\frac{a+b}{2}$.

Om defen regel niet alleen te bewijfen maer oock eerst uyt te vinden, soo zy gestelt x voor het geene dat mijn kansse weerdt is. Soo moet ick dan x hebbende weder tot defelfde kans kunnen geraecken met rechtmatig spel. Laet dit het spel zijn: dat ick tegen een ander speele om x , en dat den anderen daer tegen mede x in-fette: ende dat bedongen zij, dat de geene die wint aen die verliest sal geven a . Dit spel is rechtmaetigh, ende het blijktt dat ick hier door gelijcke kans heb om a te hebben, te weeten, als ick 't spel verlies; of $2x - a$, als ick 't win: want alfdan soo treck ick $2x$ die in-gefet zijn, daer van ick den anderen moet geven a . Indien nu $2x - a$ soo veel ware als b , soo soude ick ghelijcke kans hebben tot a of b . Ick stelle dan $2x - a \propto b$, so komt $x \propto \frac{a+b}{2}$, voor de waerde van mijn kans. En het bewijs hier van is licht. Want $\frac{a+b}{2}$ hebbende, soo kan ick dat tegen een ander waegen die mede $\frac{a+b}{2}$ sal in-fetten, ende bedingen dat die het spel wint, den anderen sal a geven. Waer door ick gelijcke kans sal bekomen om a te hebben, te weeten, als ick verlies, of b als ick win; want alfdan soo treck ick $a + b$ dat in-gefet is, ende geef hem daer van a .

In getaelen. Indien ick gelijcke kans heb om 3 te hebben of 7, soo is door dit Voorstel mijn kansse 5 weerdt; ende het is seecker dat ick 5 hebbende weder tot de selfde kansse kan geraecken. Want spelende om de selve tegen een ander die daer 5 tegen fet, met beding dat de geene die wint den anderen 3 sal geven; soo is dit rechtmaetig spel, ende het blijktt dat ick gelijcke kans hebbe om 3 te hebben, te weeten, als ick verlies, of 7 indien ick win; want alfdan treck ick 10, daer van ick hem 3 geef.

PROPOSITION II.

Avoir des chances égales d'obtenir a , b ou c me vaut $\frac{a + b + c}{3}$.

Pour trouver ceci, appelons derechef x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x , je puisse me procurer de nouveau les mêmes chances par un jeu équitable. Que ce jeu soit le suivant: Je joue contre deux autres personnes; chacun de nous trois met x ; je conditionne avec la première qu'elle me donnera b si elle gagne le jeu et réciproquement, avec la seconde qu'elle me donnera c si elle gagne et réciproquement. Il appert que ce jeu est équitable. J'aurai ainsi une chance égale d'avoir b , savoir si le premier joueur gagne, ou c , si le deuxième gagne, ou enfin $3x - b - c$ si je gagne moi-même; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $3x$, dont je donne b à l'un et c à l'autre. Or, si $3x - b - c$ était égal à a , j'aurais des chances égales d'avoir a , b ou c . Je pose donc $3x - b - c = a$, d'où je tire $x = \frac{a + b + c}{3}$, valeur de ma chance. On trouve de même qu'avoir des chances égales d'obtenir a , b , c ou d me vaut $\frac{a + b + c + d}{4}$, et ainsi de suite.

PROPOSITION III ¹⁾.

Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b , les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa + qb}{p + q}$.

Pour découvrir cette règle, appelons de nouveau x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x , je puisse rentrer dans mon premier état par un jeu équitable. À cet effet je prends un nombre de joueurs tel qu'avec moi il y en a $p + q$ en tout, dont chacun met x , de sorte que l'enjeu total fera $px + qx$; chacun

¹⁾ Cette Proposition fut communiquée par Huygens à de Carcavy dans une lettre du 6 juillet 1656 (p. 442 du T. I) en ajoutant qu'il s'en servait „dans toutes ces questions des parties du jeu”. Comparez les p. 19—20 de l'Avertissement.

II. VOORSTEL.

Als ick gelijke kans hebbe tot a of b of c , het is my foo veel weerdts als of ick $\frac{a+b+c}{3}$ hadde.

Om dit wederom te vinden, foo zy als vooren gestelt x voor de waerde van mijn kans. Soo moet ick dan x hebbende weder tot de selfde kansse kunnen geraecken door rechtmaetig spel. Laet dit het spel zijn, dat ick tegen 2 andere speele, infettende ieder van ons drien x , ende laet ick met den eenen dese voorwaerde maecken, dat foo hy het spel wint hy my sal geven b , ende ick b aen hem, foo ick het kome te winnen. Met den anderen laet ick dese voorwaerde maecken, dat hy het spel winnende my sal geven c , of ick aen hem c als ick het win. Het blijkt dat dit spel rechtmaetig is. Ende ick sal daer door gelijke kans hebben, om b te hebben, te weten, als het den eersten wint, of c , als het den tweeden wint, of $3x - b - c$ als ick het win; want dan treck ick $3x$ die ingeset zijn, en geve daer van aen den eenen b , aen den anderen c . Indien nu $3x - b - c$ gelijk waer aen a , so soude ick gelijke kans hebben tot a of b of c . So stel ick dan $3x - b - c \propto a$, en komt $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, voor de waerde van mijn kans. Op gelijke manier werdt gevonden, dat als ick gelijke kans hebbe tot a of b of c of d , dit foo veel weerdts is als $\frac{a+b+c+d}{4}$, ende foo voorts.

III. VOORSTEL ¹⁾.

Als het getal der kanssen die ick hebbe tot a is p , ende het getal der kanssen die ick tot b heb is q ; nemende altydt dat ieder kans even licht kan gebeuren: Het is my weerdts $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Om defen regel uyt te vinden, so zy wederom x gestelt voor het geene mijn kans weerdts is. So moet ick x hebbende wederom in staet als vooren kunnen geraecken door rechtmaetig spel. Laet ick hier toe foo veel speelders nemen, datse met my te faemen het getal van $p+q$ uytmaecken, infettende elck x , foo datter

joue pour son propre compte avec une même chance de gagner. Supposons en outre qu'avec q joueurs, c'est-à-dire avec chacun d'eux en particulier, je fasse cette convention que si l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la somme b , et que si moi je gagne, je lui donnerai la même somme. Supposons enfin qu'avec les $p-1$ joueurs qui restent, ou plutôt avec chacun d'eux en particulier, je fasse la convention que si l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la somme a , et que je lui donnerai également la somme a si c'est moi qui gagne la partie. Il est évident qu'à ces conditions le jeu est équitable, attendu que les intérêts d'aucun joueur ne se trouvent lésés. On voit de plus que j'ai maintenant q chances d'obtenir b , $p-1$ chances d'obtenir a et une chance (au cas où c'est moi qui gagne) d'avoir $px + qx - bq - ap + a$; en effet, dans ce dernier cas je reçois l'enjeu $px + qx$ dont je dois céder b à chacun des q joueurs et a à chacun des $p-1$ joueurs, ce qui fait en tout $qb + pa - a$. Or, si $px + qx - bq - ap + a$ était égal à a , j'aurais p chances d'avoir a (car j'avais déjà $p-1$ chances d'obtenir cette somme) et q chances d'avoir b ; je serais donc revenu à mes chances premières.

Je pose donc $px + qx - bq - ap + a = a$, et je trouve $x = \frac{ap + bq}{p + q}$ pour la valeur de ma chance, conformément à l'énoncé.

En chiffres. Si j'ai 3 chances de gagner 13, et 2 chances de gagner 8, je possède pour ainsi dire 11, d'après cette règle. Et il est aisé de faire voir qu'étant en possession de 11, je puis me procurer de nouveau ces mêmes chances. En effet, je puis jouer avec 4 autres personnes et chacun de nous cinq peut mettre 11; je conviendrai alors avec deux de ces personnes que si l'une d'elles gagne la partie elle me donnera 8 et que, si c'est moi qui gagne, je leur donnerai à chacune la même somme. De même je conviens avec les deux autres que celle des deux qui gagne la partie me donnera 13 et que, si moi je gagne, je leur donnerai à chacune 13 également. Ce jeu sera équitable. Et l'on voit que j'ai ainsi 2 chances d'avoir 8, savoir au cas où l'un des deux joueurs qui m'ont promis cette somme emporte l'enjeu, et 3 chances d'avoir 13, savoir si l'un des deux autres qui doivent me donner cette somme gagne la partie, ou si je la gagne moi-même. En effet, dans ce dernier cas je reçois l'enjeu qui est de 55, dont je dois donner 13 à chacun de deux joueurs et 8 à chacun de deux autres joueurs, de sorte qu'il m'en reste également 13.

PROPOSITION IV.

Supposons que je joue contre une autre personne à qui aura gagné le premier trois parties, et que j'aie déjà gagné deux parties et lui une. Je veux savoir quelle partie de l'enjeu m'est due au cas où nous voulons interrompre le jeu et partager équitablement les mises.

in fal staen $px + qx$, ende elck voor fijn hoeft speelende met even goede kans om te winnen. Voorts laet ick met soo veel defer speelders, als het getal q is, ieder in 't byzonder dit verding maecken, dat als hy het spel komt te winnen hy my fal b geven, of ick daer entegens het selfde aen hem als ick het win. Laet ick oock met de rest van de speelders, zijnde $p - 1$, dit verding maecken met elck in 't bysonder, dat hy het spel winnende my fal a geven, ende ick hem van gelijcken a indien ick het kome te winnen. Het blijktt dat dit spel met dese voorwaerden rechtmaetig is, niemandt hier door verongelijckt wesende. Het blijktt mede dat ick alnu q kanssen hebbe tot b , ende $p - 1$ kanssen tot a , en 1 kansse, (te weeten, als ick het win,) tot $px + qx - bq - ap + a$, want alsdan soo treck ick $px + qx$ dat ingeset is, waer van ick aen yder van q speelders moet geven b , en aen yder van $p - 1$ speelders a , maeckende te saemen $qb + pa - a$. Indien nu $px + qx - bq - ap + a$ gelijk waer aen a , soo soude ick p kanssen hebben tot a , (want ick alreede $p - 1$ kanssen daer toe hadde) ende q kanssen tot b , ende soude also tot mijn voorige kansse wederom geraeckt zijn. Soo stel ick dan te zijn $px + qx - bq - ap + a \propto a$; en komt $x \propto \frac{ap + bq}{p + q}$ voor het geene dat mijn kansse weerdt was, gelijk in 't begin is gestelt.

In getaelen. Indien ick 3 kanssen hebbe tot 13, en 2 kanssen tot 8, soo heb ick door desen regel soo veel als 11. En is licht te thoonen, dat ick 11 hebbende wederom tot de selfde kansse kan geraecken. Want speelende tegen 4 andere, en settende elck van ons vyven 11 in, soo fal ick met 2 van haer verdraegen elck in 't bysonder, dat soo hy het spel wint hy my 8 fal geven, of ick aen hem 8, indien ick het winne. Met de ander 2 van gelijcken, dat die van haer het spel wint my fal 13 geven, of ick aen hem 13 als ick het kom te winnen. Welck speelen rechtmaetig is. Ende het blijktt, dat ick daer door 2 kanssen hebbe tot 8, naementlijk als een van de twee die my 8 belooft hebben wint, en 3 kanssen tot 13, te weeten als een van de twee andere die my 13 gheven moeten wint, of als ick selver het spel win. Want ick het winnende soo treck ick 't geen ingeset is dat's 55, daer van ick aen elck van 2 moet geven 13, en aen elck van de 2 andere 8, soo dat voor my dan oock 13 overblijft.

IV. VOORSTEL.

Genomen dan dat ick tegens een ander speele ten dryen uyt en dat ick alreede 2 spelen hebbe en hy maer een. Ick wil weeten, ingevalle wy het spel niet en wilden voortspeelen, maer het geen ingeset is gerechtelijck wilden deelen, hoeveel my daer van komen soude.

Il est nécessaire de commencer par les cas les plus simples pour arriver à la solution des questions proposées en premier lieu ¹⁾ au sujet du partage de l'enjeu entre plusieurs joueurs dont les chances sont inégales.

Il faut remarquer d'abord qu'il suffit de tenir compte des parties qui manquent de part et d'autre ²⁾. Car il est certain que si nous jouions à qui aura gagné le premier 20 parties, et que j'eusse gagné 19 parties et mon adversaire 18, j'aurais le même avantage que dans le cas énoncé, où sur trois parties j'en ai gagné deux et lui une seule, et cela parce que dans les deux cas il ne me manque qu'une partie tandis qu'il lui en manque deux.

Ensuite, pour calculer la part qui revient à chacun de nous, il faut faire attention à ce qui arriverait si nous continuions le jeu. Il est certain que si je gagnais la première partie, j'aurais terminé le jeu, et qu'ainsi j'obtiendrais l'enjeu tout entier que j'appellerai a . Mais si l'autre joueur gagnait la première partie nos chances seraient désormais égales, attendu qu'il nous manquerait une partie à chacun; nous aurions donc chacun droit à $\frac{1}{2}a$. Or, il est évident que j'ai autant de chance de gagner la première partie que de la perdre. J'ai donc des chances égales d'avoir a ou $\frac{1}{2}a$, ce qui, d'après la première Proposition ³⁾, équivaut à la somme des moitiés, c'est-à-dire à $\frac{3}{4}a$, de sorte qu'il reste $\frac{1}{4}a$ pour mon adversaire. J'aurais d'ailleurs pu faire pour lui aussi un calcul direct, en suivant la même méthode. Il en ressort que celui qui voudrait continuer le jeu en mon lieu, pourrait m'offrir $\frac{3}{4}a$, et qu'on peut donc toujours hasarder 3 contre 1 en acceptant de gagner un jeu avant qu'un autre joueur en gagne deux.

PROPOSITION V.

Supposons qu'il me manque une partie à moi et trois à mon adversaire. Il s'agit de partager l'enjeu dans cette hypothèse.

Considérons de nouveau l'état où nous serions si moi je gagnais la première partie ou bien si mon adversaire la gagnait. Si je la gagnais, j'aurais l'enjeu a , mais si c'était lui qui la gagnait, il lui en manquerait encore 2 contre une qui me manquerait à moi; nous nous trouverions donc dans l'état considéré dans la proposition précédente, et il me reviendrait $\frac{3}{4}a$, comme nous l'avons vu à cet endroit. J'ai

¹⁾ Voir la p. 61.

²⁾ Comparez la note 1 de la p. 22.

Om nu tot de eerst voor-gestelde questien ¹⁾ te komen, aengaende de verdelingh onder verscheyde speelders te maecken, als haere kanssen ongelijck zijn, soo is 't noodigh van de lichtste te beginnen.

Voor eerst moet acht genomen werden alleen op de spelen, die weder-zijds noch ontbreecken. Want het is seecker, dat, of wy ten 20^{ten} uyt speelden, en dat ick 19 hadde, en die tegens my speelt 18, dat ick even het selfde voordeel soude hebben als nu, hebbende van drie spelen 2 gewonnen en hy een: door dien in beyde gevallen my noch maer een spel ontbreeckt en hem twee spelen.

Voorts om te vinden, wat deel ons elck toekomt, soo moet aengemerckt werden watter soude gebeuren indien wy voort speelden. Het is seecker indien ick het eerste spel quam te winnen, dan soude ick uyt wesen en hebben al dat ingeset is, het welck zy genoemd a . Maer indien den anderen het eerste spel won, dan zouden wy gelijcke kans hebben, elck noch een spel ontbreeckende, en daerom elck gerechtigd zijn tot $\frac{1}{2}a$. Het is nu seecker dat ick gelijcke kans heb om dat eerste spel te winnen of te verliezen. Soo heb ick dan gelijcke kans om a te hebben of $\frac{1}{2}a$, het welck door het 1^{ste} Voorstel ²⁾ soo veel is als of ick van beyde de helft hadde dat is $\frac{3}{4}a$, en blijft voor die tegens my speelt $\frac{1}{4}a$. Wiens rekening oock van cersten aen op de selve manier hadde konnen gemaect werden. Hier uyt blijkt, dat die mijn spel soude willen overnemen my $\frac{3}{4}a$ daer voor kan geven; en dat men dienvolgens altijd kan 3 tegen 1 setten, als men neemt 1 spel te winnen, eer dat een ander 2 spelen wint.

V. VOORSTEL.

Zij gestelt dat my 1 spel ontbreeckt, en die tegens my speelt 3 spelen. Nu moet men de verdeling maecken.

Laet ons wederom acht nemen, in wat staet wy fouden zijn, indien ick of hy het eerste spel quam te winnen. Als ick het won soo had ick het geen in-geset is dat is a , maer als hy het eerste spel won, dan fouden hem noch 2 spelen ontbreecken tegen mijn 1, en wy fouden daerom in staet zijn gelijck in 't voorgaende voorstel gestelt wierdt, en my toekomen $\frac{3}{4}a$, gelijck aldaer bethoont is. Soo heb

³⁾ Voir la p. 63.

donc des chances égales d'obtenir a ou $\frac{3}{4}a$, ce qui, d'après la première Proposition ¹⁾, me vaut $\frac{7}{8}a$. Reste $\frac{1}{8}a$ pour l'autre joueur. Ma chance est donc à la sienne comme 7 est à 1.

De même que ce calcul-ci dépend du calcul précédent, de même le résultat obtenu ici est nécessaire au calcul qui se rapporte au cas suivant, où il me manque une partie, tandis qu'il en manque quatre à mon adversaire. On trouve de la même façon qu'il me revient dans ce cas $\frac{15}{16}$ de l'enjeu, et $\frac{1}{16}$ à lui.

PROPOSITION VI.

Supposons qu'il me manque deux parties et qu'il en manque trois à mon adversaire.

La première partie aura maintenant pour effet, ou bien qu'il me manquera encore une partie à moi et trois à l'autre joueur (auquel cas il me reviendra $\frac{7}{8}a$ d'après ce qui précède), ou bien qu'il nous manquera deux parties à chacun de nous, auquel cas il me revient $\frac{1}{2}a$, attendu que nos chances seront devenues égales. Mais j'ai une chance contre une de gagner la première partie ou de la perdre; j'ai donc des chances égales d'obtenir $\frac{7}{8}a$ ou $\frac{1}{2}a$, ce qui me vaut $\frac{11}{16}a$ d'après la première Proposition ¹⁾. Onze parties de l'enjeu me sont donc dues contre cinq à mon adversaire.

PROPOSITION VII.

Supposons qu'il me manque encore deux parties et lui quatre.

Ayant gagné la première partie, j'aurai donc encore 1 partie à gagner contre 4; l'ayant perdue, encore 2 contre 3. J'ai donc des chances égales d'avoir $\frac{15}{16}a$ ou $\frac{11}{16}a$, ce qui me vaut $\frac{13}{16}a$ d'après la première Proposition ¹⁾. Il en résulte

¹⁾ Voir la p. 63.

ick dan een kans tegen een om a te hebben of $\frac{3}{4}a$, het welck so veel is door het 1^{ste} Voorstel ¹⁾ als $\frac{7}{8}a$. En blijft $\frac{1}{8}a$ voor den anderen. Soo dat mijn kans is tot de syne als 7 tot 1.

Gelijck nu tot dese reeckeningh vereyscht is geweest de voorgaende, so is wederom dese nodigh tot de volgende, te weeten, als men stelt dat my 1 spel ontbreekt, ende mijn party 4 spelen. En werdt op gelijcke manier bevonden, dat my komt $\frac{15}{16}$ van 't geen ingefet is, en hem $\frac{1}{16}$.

VI. VOORSTEL.

Zij gestelt dat my twee spelen ontbreecken, en hem die tegen my speelt drie spelen.

Nu fal gebeuren door het eerste spel, of dat my noch 1 spel fal ontbreecken en hem 3 (toekomende my daerom door het voorgaende $\frac{7}{8}a$), of dat ons elck noch twee spelen fullen ontbreecken, waer door my komt $\frac{1}{2}a$, om dat dan elck even goede kans heeft. Maer ick heb een kans tegen een, om het eerste spel te winnen of te verliezen; soo heb ick dan ghelijcke kans tot $\frac{7}{8}a$ of $\frac{1}{2}a$, het welck my weerdt is $\frac{11}{16}a$ door het eerste Voorstel ¹⁾. Soo dat my komen elf deelen van 't geen ingefet is, en die tegens my speelt vijf deelen.

VII. VOORSTEL.

Zy gestelt dat aen my noch twee spelen ontbreecken en hem 4 spelen.

Soo fal ick het eerste spel winnende noch 1 spel tegen 4 te winnen hebben; of, het selve verliefende, noch 2 tegen 3. Soo dat ick gelijcke kans heb tot $\frac{15}{16}a$ of $\frac{11}{16}a$, dat soo veel is als $\frac{13}{16}a$, door het 1^{ste} Voorstel ¹⁾. Waer uyt blijktt dat het

qu'il est plus avantageux d'avoir deux parties à gagner contre quatre, qu'une contre deux. Car dans ce dernier cas: à favoir le cas d'une partie contre deux, ma part est $\frac{3}{4}a$ d'après la 4^{ième} Proposition ¹⁾, ce qui est moins que $\frac{13}{16}a$.

PROPOSITION VIII.

Supposons maintenant que trois personnes jouent ensemble et qu'il manque une partie à la première ainsi qu'à la deuxième, mais qu'il en manque deux à la troisième.

Pour calculer la part du premier joueur, il faut d'erechef tenir compte de ce qui lui reviendrait si lui-même ou si l'un des deux autres gagnait la première partie. S'il la gagnait, il obtiendrait l'enjeu que j'appelle a . Si le deuxième gagnait cette partie, le premier n'aurait rien, car le deuxième aurait terminé le jeu. Si le troisième gagnait, il manquerait encore une partie à chacun des trois: par suite le premier, ainsi que chacun des deux autres, aurait droit à $\frac{1}{3}a$. Le premier a donc 1 chance d'obtenir a , 1 chance d'obtenir 0, et 1 chance d'obtenir $\frac{1}{3}a$ (car chacun des trois a la même chance de gagner la première partie), ce qui lui vaut $\frac{4}{9}a$ d'après la deuxième Proposition ²⁾. Au deuxième joueur revient donc la même part, c'est-à-dire, $\frac{4}{9}a$, de sorte qu'il reste $\frac{1}{9}a$ pour le troisième. On aurait pu trouver directement la part de ce dernier et calculer en partant de là la part des autres ³⁾.

PROPOSITION IX ⁴⁾.

Pour calculer la part de chacun d'un nombre donné de joueurs, auxquels manquent des parties en nombres donnés pour chacun d'eux séparément ⁵⁾, il faut d'abord se rendre

¹⁾ Voir la p. 67.

²⁾ Voir la p. 65.

³⁾ Voir pour une rédaction antérieure de la solution du même problème le début de l'Appendice I, p. 92—93.

beter kans is 2 spelen te moeten winnen tegen 4, als een spel tegen twee. Want in dit laetste geval, te weeten, van 1 tegen 2, so is mijn deel $\frac{3}{4}a$, door het 4^{de} Voorstel ¹⁾, zijnde minder als $\frac{13}{16}a$.

VIII. VOORSTEL.

Laet ons nu stellen dat drie perfoonen t'samen speelen, daer van den eersten 1 spel ontbreeckt, den tweeden mede 1 spel, maer den derden 2 spelen.

Om het deel van den eersten te vinden, so moet weder aengemerckt werden wat hem soude komen, indien hy of een van de twee anderen het eerste spel quam te winnen. Als hy het won soo had hy het geen dat ingeset is, 't welck zy a . Als het den tweeden won soo hadde den eersten niets, want den tweeden soude daar mede uyt zijn. Als het den derden won soo soude aen elck van drien noch 1 spel ontbreecken, en daerom den eersten so wel als elck van d'andere $\frac{1}{3}a$ toekomen. Soo isser dan voor den eersten 1 kans tot a , 1 kans tot 0, en een kans tot $\frac{1}{3}a$, (want het even licht kan gebeuren aen yeder van drien het eerste spel te winnen,) het welck hem weerdt is $\frac{4}{9}a$ door het 2^{de} Voorstel ²⁾. Soo komt dan oock voor den tweeden $\frac{4}{9}a$, en voor den derden blijft over $\frac{1}{9}a$. Wiens deel in 't bysonder oock hadde konnen gevonden worden, en daer door de andere haer deelen bepaelt ³⁾.

IX. VOORSTEL ⁴⁾.

Om tusschen soo veel speelders als voor-gestelt zijn, waer van d'eene meer en d'ander minder speelen ontbreecken een ieder haer deel te vinden ⁵⁾, soo moet ingesien worden, wat

⁴⁾ Cette Proposition manquait dans le manuscrit envoyé à van Schooten le 20 avril 1656, elle doit avoir été ajoutée en 1656 après le 6 mai, date de la Pièce N^o. 289, p. 415 du T. I, ou en 1657; voir encore les pp. 5, 7 et 8 de l'Avertissement.

⁵⁾ Voir, sur la solution générale de ce problème, les p. 21—25 et la note 3 de la p. 28 de l'Avertissement.

compte de ce qui reviendrait à celui dont on veut savoir la part dans le cas où lui et dans ceux où chacun des autres à son tour aurait gagné la première partie suivante. En ajoutant toutes ces parts et en divisant la somme par le nombre des joueurs on trouve la part cherchée du joueur considéré.

Supposons que 3 personnes A, B et C jouent ensemble et qu'il manque 1 partie à A, 2 à B et également 2 à C. On veut savoir quelle part de l'enjeu que j'appelle q revient au joueur B.

Nous devons examiner d'abord à quelles parts B aurait droit, si lui-même ou A ou C aurait gagné la première partie suivante. Si A la gagnait, il aurait terminé le jeu. B recevrait par conséquent 0. Si B était lui-même le gagnant, 1 partie lui manquerait encore, ainsi qu'à A, tandis qu'il en manquerait 2 à C. B aurait donc droit à $\frac{4}{9}q$ d'après la huitième Proposition.

Enfin, si C gagnait la première partie suivante, il manquerait 1 partie à A et à C, tandis qu'il en manquerait 2 à B; B, par conséquent, aurait droit à $\frac{1}{9}q$ d'après la même Proposition VIII.

Il faut maintenant ajouter les parts qui reviendraient à B dans ces trois hypothèses, savoir 0, $\frac{4}{9}q$ et $\frac{1}{9}q$. Il vient $\frac{5}{9}q$. En divisant ce nombre par 3, le nombre des joueurs, on trouve $\frac{5}{27}q$. C'est là la part juste du joueur B.

On le démontre par la deuxième Proposition ¹⁾. En effet, comme B a des chances égales d'obtenir 0, $\frac{4}{9}q$ ou $\frac{1}{9}q$, il possède, d'après cette Proposition, pour ainsi

dire $\frac{0 + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q}{3}$ ou $\frac{5}{27}q$ ²⁾. Et il est certain que le diviseur 3 est égal au nombre des joueurs.

Mais pour savoir ce qui reviendra dans chaque cas à chaque joueur lorsque lui-même ou l'un quelconque des autres aura gagné la première partie suivante, il faut d'abord faire le calcul pour les cas les plus simples et ensuite, en partant de là, pour les cas suivants. Car de même que le dernier cas que nous avons considéré ne pouvait être soumis au calcul sans que d'abord la huitième Proposition eût été résolue, dans laquelle les parties manquantes étaient aux nombres de 1, de 1 et de 2, de même aussi la part de chaque joueur au cas où les nombres des parties manquantes sont 1, 2, 3 ³⁾ ne peut être calculée sans qu'on cherche d'abord cette

¹⁾ Voir la p. 65.

hem, wiens deel men begeert te weten, soude toekomen, indien of hy, of elck van d'andere in 'tbesonder het eerste volgende spel quam te winnen. Dit dan alles te faemen geadeert en door het getal der speelders gedeelt, soo komt het gefochte gedeelte van den eenen.

Zy genomen dat 3 perfoonen A, B, en C te faemen speelen, en dat aen A een spel ontbreekt, aen B 2 spelen, en aen C van gelijcken 2 spelen. Men begeert te weten wat deel aen B toekomt van het geene ingeset is, het welck zy genoemt q .

Voor eerst moeten wy ondersoecken wat B soude komen, als hy selfs, of A, of C het eerste volgende spel quam te winnen. Als het A won, so soude hy uyt zijn, en dienvolgens soude B toekomen 0. Als B selfs het won, so ontbrack hem noch 1 spel, en aen A mede 1 spel, maer aen C 2 spelen. Daerom soude B in dit geval toekomen $\frac{4}{9}q$ door het 8^{ste} Voorstel.

Eyndelijk als C het eerste volgende spel quam te winnen, soo soude A en C elck 1 spel ontbreecken, maer aen B 2 spelen; en dienvolgens soude B komen $\frac{1}{9}q$, door het selfde 8^{ste} Voorstel. Nu moet geadeert werden het geen in deze 3 voorvallen aen B soude toekomen, te weten, 0, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$ en komt $\frac{5}{9}q$. Dit door 3, het getal der speelders, gedeelt, komt $\frac{5}{27}q$. 'Twelck B zijn gerechte deel is. Het bewijs nu hier van blijkt door het 2^{de} Voorstel ¹⁾. Want naer dien B gelijcke kans

heeft tot 0, $\frac{4}{9}q$, of $\frac{1}{9}q$, soo heeft hy door het 2^{de} Voorstel soo veel als
$$0 + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q$$

3
dat is $\frac{5}{27}q$ ²⁾. Ende het is seecker dat desen divisor 3 het getal van de speelders is.

Doch om te weten, wat iemandt komt in elck geval, te weten, als hy selfs of een van d'andere het eerste volgende spel wint: soo moeten de simpelste voorvallen eerst uygevonden werden, en door haer behulp de volgende. Want gelijk dit laetste voorval niet konde afgedaen werden sonder dat eerst dat van het 8^{ste} Voorstel uytgereeckent was, in 't welck de resterende spelen waeren 1, 1, 2, soo kan insgelijcks ieders deel niet gevonden werden in so een geval, als de resterende spelen zijn 1, 2, 3³⁾, of men moet eerst uytgereeckent hebben het voorval van 1, 2, 2

²⁾ Le même problème est résolu dans l'Appendice I à la p. 93.

³⁾ Ce problème aussi est traité dans l'Appendice I aux p. 93—95; mais Huygens a manqué alors la solution exacte.

part dans le cas des nombres 1, 2, 2, comme nous venons de le faire, ainsi que dans celui des nombres 1, 1, 3, ce qui peut être fait d'après la huitième Proposition. C'est en suivant cette méthode qu'on trouve les parts correspondant aux nombres du tableau suivant, ainsi qu'à une infinité d'autres.

Tableau pour trois joueurs.

Parties qui leur manquent.	1.1.2	1.2.2	1.1.3	1.2.3
Leurs parts.	4.4.1	17.5.5	13.13.1	19.6.2
	9	27	27	27

Parties qui leur manquent.	1.1.4	1.1.5	1.2.4	1.2.5
Leurs parts.	40.40.1	121.121.1	178.58.7	542.179.8
	81	243	243	729

Parties qui leur manquent.	1.3.3	1.3.4	1.3.5
Leurs parts.	65.8.8	616.82.31	629.87.13
	81	729	729

Parties qui leur manquent.	2.2.3	2.2.4	2.2.5	2.3.3	2.3.4	2.3.5
Leurs parts.	34.34.13	338.338.53	353.353.23	133.55.55	451.195.83	1433.635.119
	81	729	729	243	729	2187

À l'égard des dés, on peut poser ces questions : à savoir en combien de fois l'on peut accepter de jeter avec un dé un 6 ou bien un des autres nombres; de même en combien de fois 2 fix avec 2 dés ou 3 fix avec 3 dés. Et bien d'autres questions encore. Pour les résoudre, il faut remarquer ce qui suit.

D'abord qu'on peut faire avec un dé six coups différents également vraisemblables. Car je suppose que le dé a la forme d'un *Cube* parfait.

Ensuite qu'on peut faire 36 coups différents avec 2 dés, lesquels ont aussi des vraisemblances égales. En effet, avec chaque coup du premier dé chacun des 6 coups du deuxième dé peut se combiner. Et 6 fois 6 font 36.

De même qu'il y a 216 coups de 3 dés. Car avec chacun des 36 coups

gelijk wy terftond gedaen hebben, ende noch dat van 1, 1, 3, het welck door behulp van het 8^{ste} Voortfel mede konde bereeckent werden. Op dese manier dan werden vervolgens al de voorvallen uitgevonden, die in de volgende tafel zijn verrat, en oneyndelijke andere.

Tafel voor drie Speelders.

Spelen die haer ontbrecken.

Haer deelen.

1.1.2	1.2.2	1.1.3	1.2.3
4.4.1	17.5.5	13.13.1	19.6.2
9	27	27	27

Spelen die haer ontbrecken.

Haer deelen.

1.1.4	1.1.5	1.2.4	1.2.5
40.40.1	121.121.1	178.58.7	542.179.8
81	243	243	729

Spelen die haer ontbrecken.

Haer deelen.

1.3.3	1.3.4	1.3.5
65.8.8	616.82.31	629.87.13
81	729	729

Spelen die haer ontbrecken.

Haer deelen.

2.2.3	2.2.4	2.2.5	2.3.3	2.3.4	2.3.5
34.34.13	338.338.53	353.353.23	133.55.55	451.195.83	1433.635.119
81	729	729	243	729	2187

De dobbel-steen aengaende konnen dese questien werden voorgestelt, te weeten, van hoeveel reyfen men kan nemen met eene steen een 6 te werpen of een van d'ander ooghen. Oock van hoeveel reyfen 2 fessen met 2 steenen, of 3 fessen met 3 steenen. Ende noch veel andere. Om welke te solveeren, so moet hier op werden acht genomen.

Eerstelijck dat op 1 steen zijn 6 verscheyde werpen, die even licht konnen gebeuren. Want ick neeme dat een dobbel-steen de perfecte figure van een *Cubus* heeft.

Voorts, dat op 2 steenen sijn 36 verscheyde werpen, die insgelijcx even licht konnen voorkomen. Want tegen elcke werp van de eene steen kan een van de 6 werpen van d'andere steen te gelijk boven leggen. En 6 mael 6 maeckt 36.

Oock dat op 3 steenen zijn 216 werpen. Want tegen elck van de 36 werpen

des 2 dés peut se combiner l'un quelconque des 6 coups du troisieme. Et 6 fois 36 font 216.

On trouve de la même façon qu'il y a 6×216 ou 1296 coups de quatre dés; et qu'on peut en continuant ainsi calculer le nombre de coups pour un nombre quelconque de dés: on multiplie par 6 le nombre précédent de coups, chaque fois qu'on ajoute un nouveau dé.

Ensuite, il faut savoir qu'avec deux dés on ne peut faire qu'un coup de 2 ou de 12 points, et 2 coups de 3 ou de 11 points. En effet, si nous appelons les dés A et B respectivement, il est évident que pour jeter 3 points A peut donner un as et B un 2, ou bien B un as et A un 2. De même pour obtenir 11 points, A peut donner 5 et B 6, ou bien A 6 et B 5. Le coup de 4 points est triple, savoir A 1, B 3, ou A 3, B 1, ou A 2, B 2. Le coup de 10 points est également triple. Celui de 5 ou de 9 points, quadruple. Celui de 6 ou de 8 points, quintuple. Celui de 7 points, sextuple.

$$\text{Avec 3 dés l'on trouve pour } \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ ou } 18 \\ 4 \text{ ou } 17 \\ 5 \text{ ou } 16 \\ 6 \text{ ou } 15 \\ 7 \text{ ou } 14 \\ 8 \text{ ou } 13 \\ 9 \text{ ou } 12 \\ 10 \text{ ou } 11 \end{array} \right\} \text{ points } \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 15 \\ 21 \\ 25 \\ 27 \end{array} \right\} \text{ coups différents.}$$

PROPOSITION X.

Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter un fix avec un dé.

Il est certain que le joueur qui accepte de jeter un 6 en un seul coup à 1 chance de gagner l'enjeu et 5 de perdre. Car il y a 5 coups contre lui et pas plus qu'un seul pour lui. Appelons l'enjeu a . Il a donc 1 chance d'obtenir a et 5 chances de n'obtenir rien, ce qui d'après la deuxième Proposition ¹⁾ lui vaut $\frac{1}{6}a$. Il reste $\frac{5}{6}a$ pour celui qui l'engage à jeter le dé. Celui qui joue une partie d'un seul coup, ne peut donc mettre que 1 contre 5.

La part de celui qui parie de jeter un 6 en deux coups, est calculée de la façon suivante. S'il jette un 6 la première fois, il gagne a . S'il manque son coup, il en a encore un, ce qui lui vaut $\frac{1}{6}a$ d'après le calcul précédent. Mais il n'a qu'une chance de jeter un 6 du premier coup et il en a 5 de manquer ce coup. Il a donc

der 2 steenen kan een van de 6 werpen komen, die op de derde zijn. En 6 mael 36 maeckt 216.

Van gelijcken blijkt, dat op 4 steenen zijn 6 mael 216 werpen, dat is, 1296; en dat men soo voort de werpen van soo veel steenen als men wil kan bereeckenen, altijd door het toe-doen van eene steen 6 mael de werpen der voorgaende nemende.

Vorders moet men weten, dat op twee steenen maer eene werp en is van 2 of 12 oogen, en 2 werpen van 3 of 11 oogen. Want gevende aen de steenen de naemen van A en B, soo blijkt dat om 3 oogen te werpen op A een aes kan zijn, en op B een 2; of op B een aes, en op A een 2. Van gelijcken om 11 oogen te hebben, so kan op A 5 zijn, en op B 6; of op A 6 en op B 5. Van 4 oogen zijnder 3 werpen, te weten, A 1, B 3; of A 3, B 1; of A 2, B 2. Van 10 oogen insgelijcks 3 werpen. Van 5 of 9 oogen 4 werpen. Van 6 of 8 oogen 5 werpen. Van 7 oogen 6 werpen.

Op 3 steenen vindt men van	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ of } 18 \\ 4 \text{ of } 17 \\ 5 \text{ of } 16 \\ 6 \text{ of } 15 \\ 7 \text{ of } 14 \\ 8 \text{ of } 13 \\ 9 \text{ of } 12 \\ 10 \text{ of } 11 \end{array} \right\}$	oogen	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 15 \\ 21 \\ 25 \\ 27 \end{array} \right\}$	werpen.

X. VOORSTEL.

Te vinden van hoeveel reysen men kan neemen een 6 te werpen met eene steen.

Die het ten eersten neemt, het is seecker dat hy 1 kans heeft om te winnen, ende te hebben het geen ingeset is, tegen 5 kanffen om te verliezen. Want daer sijn 5 werpen tegen hem, en maer een voor hem. Het geen ingeset is zy genoemt a . Soo heeft hy dan 1 kans om te hebben a , en 5 kanffen om 0 te hebben, het welck door het 2^{de} Voorstel ¹⁾ so veel is als $\frac{1}{6}a$. En blijft voor die het hem geeft te werpen $\frac{5}{6}a$. Soo dat hy maer 1 tegen 5 kan setten, die het ten eersten neemt.

Die van twee eens een 6 neemt te werpen, werdt sijn deel aldus bereeckent. Indien hy de eerste reys een 6 raeckt, soo heeft hy a . Indien hy mist, soo heeft hy noch eene werp, dewelcke door het voorgaende soo veel is als $\frac{1}{6}a$. Maer hy heeft maer een kans om in de eerste reys een 6 te werpen, en 5 kanffen om die te missen.

¹⁾ Voir la p. 65; mais il s'agit plutôt de la troisième Proposition qu'on trouve à la même page.

au commencement 1 chance d'obtenir a et 5 chances d'obtenir $\frac{1}{6}a$, ce qui lui vaut $\frac{11}{36}a$ d'après la deuxième Proposition. Il reste $\frac{25}{36}a$ pour celui qui gage contre lui. Celui qui joue en 2 coups peut donc mettre 11 contre 25, ce qui est moins que 1 contre 2.

En partant de ce résultat, on calcule de la même manière que la part de celui qui parie de jeter un 6 en trois coups est $\frac{91}{216}a$. Il peut donc mettre 91 contre 125, c'est-à-dire à peu près 3 contre 4.

La part de celui qui joue en 4 coups est $\frac{671}{1296}a$. Il peut donc mettre 671 contre 625, c'est-à-dire plus que 1 contre 1.

La part de celui qui joue en 5 coups est $\frac{4651}{7776}a$; il peut mettre 4651 contre 3125, c'est-à-dire à peu près 3 contre 2.

La part de celui qui joue en 6 coups est $\frac{31031}{46656}a$, et il peut mettre 31031 contre 15625, c'est-à-dire à peu près 2 contre 1.

On peut poursuivre ce calcul successivement pour chaque nombre de coups. Mais on peut aussi avancer par de plus grands bonds, comme nous l'indiquerons à la Proposition suivante; sans quoi le Calcul deviendrait fort long.

PROPOSITION XI.

Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter 2 fix avec 2 dés.

Celui qui joue en un seul coup, a 1 chance de gagner, c'est-à-dire d'avoir a , contre 35 chances de perdre, c'est-à-dire d'avoir 0, attendu qu'il y a 36 coups.

De sorte qu'il a $\frac{1}{36}a$ d'après la deuxième Proposition ¹⁾.

Quant à celui qui joue en 2 coups, il gagne a s'il jette 2 fix la première fois. S'il manque son coup la première fois, il lui en reste encore un, ce qui lui vaut $\frac{1}{36}a$ d'après ce que nous venons de dire. Mais il n'a qu'une chance de jeter 2 fix la première fois contre 35 chances de manquer son coup. Il a donc au commence-

¹⁾ Voir la p. 65.

So heeft hy dan van eerften aen 1 kans om a te hebben, en 5 kanffen tot $\frac{1}{6}a$, het welck door het 2^{de} Voorftel foo veel is als $\frac{11}{36}a$. Ende blijft voor die het hem geeft $\frac{25}{36}a$. Soo dat die het van twee neemt 11 tegen 25 kan ftellen, dat is, min als 1 tegen 2.

Hier uyt nu werdt op defelve manier bereeckent, dat die van dryen eens neemt een 6 te werpen, zijn deel is $\frac{91}{216}a$. Soo dat hy kan 91 tegen 125 fetten, dat is, weynigh min als 3 tegen 4.

Die het van vieren neemt, fijn deel is $\frac{671}{1296}a$. Soo dat hy 671 tegen 625 kan fetten, dat is, meer als 1 tegen 1.

Die het van vyven neemt, fyn deel is $\frac{4651}{7776}a$, ende kan 4651 tegen 3125 fetten, dat is, weynig min als 3 tegen 2.

Die het van fessen neemt, fijn deel is $\frac{31031}{46656}a$, ende kan 31031 tegen 15625 fetten, dat is, weynigh min als 2 tegen 1.

Aldus kan men vervolgens yder getal van werpen vinden. Maer men kan oock met grooter fprongen voort gaen, gelijk wy in 't volgende Voorftel aenwyfen fullen, sonder 't welck de Reeckening anders feer lang soude vallen.

XI. VOORSTEL.

Te vinden van hoe veel reysen men kan neemen 2 fessen te werpen met 2 fteenen.

Die het ten eerften neemt, heeft 1 kans om te winnen, dat is, om a te hebben, tegen 35 kanffen om te verliefen ofte 0 te hebben; om datter 36 werpen zijn. Sulcx dat hy door het 2^{de} Voorftel 1) heeft $\frac{1}{36}a$.

Die het van twee neemt, indien hy de eerfte reys 2 fessen werpt, foo heeft hy a . Indien hy d'eerfte reys mist, foo heeft hy noch eene werp overig, dat is, door 't geen gefeyt is, foo veel als $\frac{1}{36}a$. Maer hy heeft maer 1 kans om in de eerfte reys 2 fessen te werpen, tegen 35 kanffen om die te missen. Soo heeft hy dan van eerften aen 1 kanffe tot a , en 35 kanffen tot $\frac{1}{36}a$, het welck door het 2^{de} Voor-

ment 1 chance d'obtenir a et 35 chances d'obtenir $\frac{1}{36}a$, ce qui lui vaut $\frac{71}{1296}a$

d'après la deuxième Proposition. Il reste $\frac{1225}{1296}a$ pour celui qui l'engage à jeter.

On peut trouver en partant de là la chance ou la part de celui qui joue en 4 coups; on peut sauter le cas du jeu en 3 coups.

En effet, celui qui joue en 4 coups, obtient a , s'il jette 2 fix l'une des deux premières fois; sinon, il lui reste encore 2 coups, ce qui lui vaut $\frac{71}{1296}a$ d'après le

calcul précédent. Mais d'après le même calcul il a 71 chances de jeter 2 fix l'une des deux premières fois, contre 1225 chances de les manquer. Il a donc au

commencement 71 chances d'obtenir a et 1225 chances d'obtenir $\frac{71}{1296}a$; ce

qui, d'après la deuxième Proposition, lui vaut $\frac{178991}{1679616}a$. Il reste $\frac{1500625}{1679616}a$ pour

celui qui gage contre lui. Leurs chances sont donc l'une à l'autre comme 178991 est à 1500625.

Partant de là, on trouve de la même manière la chance de celui qui parie de jeter une fois 2 fix en 8 coups. Ensuite, en partant de là, la chance de celui qui joue en 16 coups. Et en partant de la chance de ce dernier, jointe à celle de celui qui joue en 8 coups, on trouve la chance de celui qui joue en 24 coups. Dans ce calcul, comme il s'agit surtout de chercher pour quel nombre de coups les chances des deux joueurs commencent à devenir égales, on peut omettre une partie des derniers Chiffres des nombres qui sans cela deviendraient très grands. Je trouve que celui qui joue en 24 coups a encore un léger désavantage, et qu'on ne peut accepter la partie avec avantage qu'en jouant en 25 coups au moins ¹⁾.

PROPOSITION XII.

Trouver le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 fix du premier coup.

Cela équivaut à vouloir savoir en combien de coups d'un seul dé l'on peut compter jeter deux fois un 6. D'après ce que nous avons démontré plus haut ²⁾, celui qui accepterait de jeter 2 fix en 2 coups, aurait droit à $\frac{1}{36}a$.

¹⁾ On trouvera aux p. 26—28 de l'Avertissement une discussion du problème en question et de celui qui le suit.

ftel foo veel is als $\frac{71}{1296}a$. En blijft voor die het hem geeft te werpen $\frac{1225}{1296}a$. Hier uyt nu kan gevonden worden, wat kans ofte deel hy heeft die het neemt van 4 werpen, overslaende de kanffe van die het neemt van dryen.

Want die het van vieren neemt, indien hy het doet in een van de 2 eerfte reysen, foo heeft hy a ; indien niet, foo heeft hy noch 2 werpen overig, dat is, door 't geen te vooren gefeyt is, foo veel als $\frac{71}{1296}a$. Maer hy heeft oock door het selve 71 kanffen om van de 2 eerfte werpen eens 2 seffen te werpen, tegen 1225 kanffen om die te missen. Soo heeft hy dan van eerften aen 71 kanffen tot a , en 1225 kanffen tot $\frac{71}{1296}a$; het welck door het 2^{de} Voorstel so veel weerdt is als $\frac{178991}{1679616}a$. Ende blijft voor die het hem geeft $\frac{1500625}{1679616}a$. Staende haere kanffen tegen een, als 178991 tegen 1500625.

Hier uyt werdt vorders op deselve manier gevonden de kans, van die van 8 reysen eens 2 seffen neemt te werpen. En daer uyt dan wederom de kans, van die het neemt van 16 reysen. En uyt dese sijn kans, ende uyt de kans van die het neemt van 8 werpen, werdt gevonden de kans van die het neemt van 24^{gen}. In welcke werckingh, alsoo voornamentlijk maer gefocht werdt in wat getal van werpen de gelijcke kanffe begint tusschen die het neemt en geeft, foo magh men van de getalen, die anders seer groot souden werden, een deel van de achterste Cijfers af-snijden. Ick vinde dat die het neemt van 24^{gen}, noch yets te kort komt; en dat het eerst van 25^{gen} genomen kan werden met voordeel ¹⁾.

XII. VOORSTEL.

Te vinden met hoe veel steenen men kan nemen ten eersten 2 seffen te werpen.

Dit is foo veel dan of men wilde weten, in hoe menige werp met eene steen men kan nemen tweemaal een 6 te raecken. Het welck die het in 2 werpen nam, soude, door het geen hier te vooren is bewesen ²⁾, $\frac{1}{36}a$ toekomen.

²⁾ Voir l'avant-dernier alinéa de la p. 81.

Quant à celui qui jouerait en 3 coups, si son premier coup n'était pas un 6, il lui resterait encore 2 coups lesquels devraient être des 6 l'un et l'autre; ce que nous avons dit valoir $\frac{1}{36}a$. Mais si son premier coup est un 6, il ne lui faut plus jeter qu'un seul 6 dans les deux coups suivants, ce qui d'après la dixième Proposition ¹⁾ lui vaut $\frac{11}{36}a$. Or, il est certain qu'il a 1 chance de jeter un 6 du premier coup contre 5 chances de le manquer. Il a donc au commencement 1 chance d'obtenir $\frac{11}{36}a$ et 5 chances d'obtenir $\frac{1}{36}a$, ce qui d'après la deuxième Proposition ²⁾ lui vaut $\frac{16}{216}a$ ou $\frac{2}{27}a$. Prenant ainsi chaque fois un coup de plus, on trouve qu'on peut accepter avec avantage de jeter 2 six avec un dé en 10 coups ou avec 10 dés en un coup ³⁾.

PROPOSITION XIII.

Dans l'hypothèse que je joue un coup de deux dés contre une autre personne à condition que s'il vient 7 points, j'aurai gagné, mais qu'elle aura gagné s'il en vient 10, et que nous partagerons l'enjeu en parties égales s'il vient autre chose, trouver la part qui revient à chacun de nous.

Comme parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 6 de 7 points et 3 de 10 points, il en reste 27 qui ne font gagner ni l'un ni l'autre. Dans ce dernier cas, nous avons chacun droit à $\frac{1}{2}a$. Mais enfin, j'ai 6 chances de gagner, c'est-à-dire d'avoir a , et 3 chances de perdre, c'est-à-dire d'avoir 0; ce qui d'après la deuxième Proposition ²⁾ me vaut $\frac{2}{3}a$ pour ce cas. J'ai donc au commencement 27 chances d'avoir $\frac{1}{2}a$ et 9 chances d'avoir $\frac{2}{3}a$; ce qui d'après la deuxième Proposition me vaut $\frac{13}{24}a$. Et il reste $\frac{11}{24}a$ pour l'autre joueur.

¹⁾ Voir les p. 79—81.

²⁾ Voir la p. 65 et consultez la note 1 de la p. 79.

Die het in dryen nam, indien zijn eerste werp geen 6 en waer, soo had hy noch 2 werpen, die beyde een 6 fouden moeten zijn; het welck gefeyt is soo veel weerdte te zijn als $\frac{1}{36}a$. Maer zijn eerste werp een 6 wesende, soo behoeft hy van tweeën noch maer eens een 6 te werpen, het welck soo veel is door het 1^{de} Voorstel ¹⁾ als of hy $\frac{11}{36}a$ hadde. Nu is seecker dat hy 1 kans heeft om ten eersten een 6 te werpen, tegen 5 kanssen om die te missen. Soo heeft hy dan van eersten aen 1 kans tot $\frac{11}{36}a$, en 5 kanssen tot $\frac{1}{36}a$, het welck door het 2^{de} Voorstel ²⁾ soo veel is als $\frac{16}{216}a$ of $\frac{2}{27}a$. Op dese manier t'elckens een werp meer nemende soo werdt bevonden, dat in 10 werpen met eene steen, of met 10 steenen ten eersten, kan genomen werden 2 sessen te werpen, en dat met voordeel ³⁾.

XIII. VOORSTEL.

Als ick tegen een ander speel met 2 steenen alleen eene werp, op conditie, dat, indien der 7 oogen komen, ick winnen sal; maer hy, indiender 10 oogen komen; en ingevalle iets anders, dat wy dan gelijckelijck deelen sullen het geen ingeset is: Te vinden wat deel daer van ons elck toekomt.

Dewijl van de 36 werpen, die op 2 steenen zijn, 6 werpen zijn van 7 oogen, en 3 werpen van 10 oogen, soo resteren noch 27 werpen, die het spel kunnen kamp maecken. Het welck gebeurende so komt ons ieder $\frac{1}{2}a$. Maer als het geen kamp is, soo heb ick 6 kanssen om te winnen dat is om a te hebben, en 3 kanssen om te verliezen ofte 0 te hebben; het welck door het 2^{de} ²⁾ soo veel is, als of ick in sulcken geval $\frac{2}{3}a$ hadde. Soo heb ick dan van eersten aen 27 kanssen tot $\frac{1}{2}a$, en 9 kanssen tot $\frac{2}{3}a$; het welck door het 2^{de} soo veel is als $\frac{13}{24}a$. En blijft voor den anderen $\frac{11}{24}a$.

³⁾ Voir la note 1 de la p. 82.

PROPOSITION XIV.

Si un autre joueur et moi jettent tour à tour 2 dés à condition que j'aurai gagné dès que j'aurai jeté 7 points et lui dès qu'il en aura jeté 6, tandis que je lui laisse le premier coup, trouver le rapport de ma chance à la sienne.

Soit x la valeur de ma chance, et a l'enjeu. La chance de l'autre joueur a donc la valeur $a - x$. Il est évident aussi que chaque fois que c'est son tour de jeter, ma chance aura de nouveau la valeur x . Mais chaque fois que c'est mon tour de jeter, ma chance doit avoir une valeur supérieure, mettons y . Or, attendu que parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 5 qui peuvent donner 6 points à mon adversaire et lui faire gagner la partie, et 31 coups à son désavantage, c'est-à-dire qui amènent mon tour de jeter, j'ai 5 chances d'avoir 0 lorsqu'il jette la première fois, et 31 chances d'avoir y ; ce qui d'après la troisième Proposition ¹⁾, me vaut $\frac{31y}{36}$. Mais nous avons posé que ma chance valait x au

commencement du jeu. De sorte que $\frac{31y}{36} = x$, partant $y = \frac{36x}{31}$. Nous avons posé en outre que ma chance vaut y , lorsque c'est mon tour de jeter. Mais lorsque je jette, j'ai 6 chances d'avoir a , attendu qu'il y a 6 coups de 7 points qui me font gagner; et j'ai 30 chances de faire revenir le tour de mon adversaire, c'est-à-dire d'avoir pour ma part x . La valeur y est donc équivalente à 6 chances d'avoir a et 30 chances d'avoir x ; ce qui, d'après la troisième Proposition, me vaut $\frac{6a + 30x}{36}$. Cette expression étant donc égale à y , et y d'après ce qui précède à $\frac{36x}{31}$, il faut que $\frac{30x + 6a}{36}$ soit égal à $\frac{36x}{31}$, d'où l'on tire $x = \frac{31a}{61}$; valeur de ma chance. Par conséquent, la chance de mon adversaire vaudra $\frac{30a}{61}$. Le rapport de nos chances est donc de 31 à 30 ²⁾.

¹⁾ Voir la p. 65. C'est la seule fois que la Prop. III est citée dans le présent Traité. Comparez la note 1 de la p. 79.

²⁾ Consultez encore sur cette Proposition les pp. 4 et 6 de l'Avertissement et la note 2 de la p. 88.

XIV. VOORSTEL.

Als ick en noch een ander met beurten werpen met 2 steenen, ende bespreecken dat ick sal winnen, soo haest ick 7 ooghen werp, ende hy, soo haest als hy 6 ooghen werpt, mits dat ick hem de voorwerp geve. Te vinden in wat reden mijn kans tegen de sijne staet.

Laet mijn kans weert sijn x , ende het geen ingeset is sy genoecht a ; soo is dan de kans van den anderen weerd $a - x$. Het blijkt oock dat elcke mael, als sijn beurt van werpen weder komt, mijn kans dan weder moet x weerd zijn. Maer soo dickmaels als het mijn beurt is te werpen, soo moet mijn kans meerder weerd zijn. Laet ons y stellen voor het geene datse dan weerd is. Overmits nu datter 5 werpen zijn van de 36 werpen op 2 steenen, die mijn tegen speelder 6 ooghen kunnen geven, ende het spel doen winnen, en 31 werpen die hem doen missen, dat is, die mijn beurt van werpen doen komen: soo heb ick dan, als hy begint te werpen, 5 kanssen om o te hebben, en 31 kanssen om te hebben y ; het welck door het 3^{de} Voorstel 1) weerd is $\frac{31y}{36}$. Maer daer is gestelt, dat mijn kans van eersten aan x weerd is. Soo is dan $\frac{31y}{36} \propto x$, en daerom $y \propto \frac{36x}{31}$. Voorts soo is gestelt, dat, mijn beurt van werpen gekomen zijnde, mijn kans dan y weerd is. Maer ick fullende werpen, soo heb ick 6 kanssen tot a ; om datter 6 werpen zijn van 7 ooghen, dewelcke my doen winnen; en ick heb 30 kanssen om de beurt van mijn tegen-speelder te doen wederkeeren, dat is, om voor my x te hebben. Soo is dan y soo veel weerd als 6 kanssen tot a en 30 kanssen tot x ; 't welck door het 3^{de} Voorstel soo veel is als $\frac{6a + 30x}{36}$. Dit dan zijnde gelijk aen y , ende te voren gevonden zijnde $\frac{36x}{31} \propto y$, soo moet $\frac{30x + 6a}{36}$ gelijk zijn aen $\frac{36x}{31}$; waer uyt gevonden werdt $x \propto \frac{31a}{61}$, het welck de weerde is van mijn kans. En diensvolgens sal de kans van die tegens my speelt weerd zijn $\frac{30a}{61}$. Soo dat onse kanssen tegen malkanderen staen, als 31 tot 30 2).

Je termine en faisant suivre encore quelques Propositions¹⁾.

I²⁾. A et B jouent ensemble avec 2 dés à la condition suivante : A aura gagné s'il jette 6 points, B s'il en jette 7. A fera le premier un seul coup ; ensuite B 2 coups successifs ; puis de nouveau A 2 coups, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre aura gagné. On demande le rapport de la chance de A à celle de B ? Réponse : comme 10355 est à 12276.

II³⁾. Trois joueurs A, B et C prennent 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs ; ils jouent à cette condition que celui gagnera qui aura le premier, en choisissant à l'aveuglette, tiré un jeton blanc, et que A choisira le premier, B ensuite, puis C, puis de nouveau A et, ainsi de suite, à tour de rôle. On demande le rapport de leurs chances ?

III⁴⁾. A parie contre B, que de 40 cartes, dont dix de chaque couleur, il en tirera 4 de manière à en avoir une de chaque couleur. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 1000 est à 8139.

IV⁵⁾. On prend comme plus haut 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs. A parie

¹⁾ Voir sur ces Exercices les p. 29—30 de l'Avertissement.

²⁾ On doit ce problème à Fermat ; voir la p. 433 du T. I. Après avoir résolu la Prop. XIV de Huygens, transmise à lui par l'intermédiaire de Carcavy (voir les pp. 428 et 430 du T. I), Fermat inventa ce problème plus compliqué, qu'il fit parvenir à Huygens par la même voie (voir la lettre du 22 juin 1656 de Carcavy, p. 432 du T. I et l'Appendice, p. 433 du même Tome, qui y appartient). Huygens en envoya sa solution à Carcavy par sa lettre du 6 juillet 1656 (p. 442 du T. I). On trouve les solutions de de Monmort et de Jacques Bernoulli respectivement aux pp. 216—217 et 49—51 de leurs ouvrages, cités dans les notes 11 et 13 de la p. 9 du présent Tome ; celle de Struyck aux p. 32—34 de l'édition française de ses Œuvres, citée dans la note 14 de la p. 9. Et nous avons reproduit celle de Spinoza dans la note 7 de la p. 29.

³⁾ Aux p. 57—65 de son „Ars conjectandi” Bernoulli distingue trois interprétations différentes qu'on peut donner à l'énoncé de ce problème. En premier lieu on peut supposer que chaque jeton noir qui ait été tiré est remis parmi les autres jetons, de sorte que les joueurs ont toujours à choisir entre 4 jetons blancs et 8 noirs. En second lieu, lorsque les jetons ne sont pas remis, on peut supposer que les joueurs prennent *tous ensemble* 12 jetons, ou bien que *chaque* joueur prend 12 jetons pour en tirer un lorsque c'est son tour de jouer.

Huygens, comme il résulte du § 1 de l'Appendice II, p. 96 du présent Tome, avait en vue la première de ces trois interprétations, tandis que Hudde adopta la deuxième dans la

Volgen tot een besfluyt noch eenige Voorstellen ¹⁾.

I ²⁾. A en B speelen teghen malkander met 2 steenen, op dese conditie: dat A fal winnen als hy 6 oogen werpt, maer B fal winnen als hy 7 oogen werpt. A fal eerst eene werp doen; daernae B twee werpen achtervolgens; dan weder A 2 werpen; en soo voorts, tot dat d'een of d'ander fal winnen. De vrage is in wat reden de kans van A staet tegen die van B? antw. als 10355 tot 12276.

II ³⁾. Drie speelders A, B en C nemende 12 schijven, van de welke 4 wit zijn en 8 swart, speelen op conditie, dat die van haer blindeling eerst een witte schyve fal gekofen hebben winnen fal, en dat A de eerste fal nemen, B de tweede, en dan C, en dan wederom A, en soo vervolgens met beurten. De vraghe is in wat reden haere kanssen staen tegens malkander?

III ⁴⁾. A wed tegens B, dat hy uyt 40 kaerten, dat is, 10 van ieder soort, 4 kaerten uyttrecken fal, soo dat hy van elcke foorte een fal-hebben. Hier wordt de kans van A tegen die van B gevonden, als 1000 tegen 8139.

IV ⁵⁾. Genomen hebbende ghelijck hier te vooren 12 schyven, 4 witte en 8 swarte; soo wed A tegen B dat hy blindeling 7 schyven fal daer uyt nemen,

solution qu'il envoya à Huygens en 1665; voir les p. 10—11 de l'Avertissement. Bernoulli, au lieu cité, résoud le problème pour chacune des trois interprétations. De Monmort, p. 219—220 de son „Essay”, de Moivre, p. 229—232 du Mémoire de 1711, cité dans la note 12 de la p. 9 et p. 49—57 de sa „Doctrine of chances”, citée dans la même note, et Struyck, p. 34—38 de l'édition française de ses „Œuvres”, s'occupent tous de la première et de la deuxième interprétation, la troisième étant en effet un peu forcée, et donnent les solutions qui y correspondent.

⁴⁾ Ce problème est dû à Fermat; voir la p. 434 du T. I. Huygens dans sa lettre à Carcavy en donne la solution numérique sans y ajouter son analyse (p. 444 du même Tome). On trouve la solution de de Monmort aux p. 221—222 de son „Essay”, celles de Bernoulli aux pp. 66 et 144—145 de l'„Ars conjectandi”, celle de Struyck aux p. 38—39 de ses „Œuvres”.

⁵⁾ Le problème admet deux interprétations différentes sur lesquelles on peut consulter le deuxième alinéa de la note 6 de la p. 96 et les notes 1 et 2 de la p. 100 du présent Tome. À la p. 20 de l'Avertissement nous avons comparé les solutions de Huygens (p. 97—101) aux solutions plus simples obtenues à l'aide de l'analyse combinatoire, telles qu'on en trouve chez de Monmort (p. 220—221 de son „Essay”), chez de Moivre (p. 235—236 du Mémoire de 1711), chez Bernoulli, (p. 145—146 de l'„Ars conjectandi”) et chez Struyck (p. 39—40 de ses „Œuvres”).

contre B que parmi 7 jetons qu'il en tirera à l'aveuglette, il se trouvera 3 blancs. On demande le rapport de la chance de A à celle de B.

V¹). Ayant pris chacun 12 jetons, A et B jouent avec 3 dés à cette condition qu'à chaque coup de 11 points, A doit donner un jeton à B, mais que B en doit donner 1 à A à chaque coup de 14 points, et qui celui là gagnera qui fera le premier en possession de tous les jetons. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 244140625 est à 282429536481.

F I N.

¹) Ce problème fut proposé par Pascal à Fermat. Huygens en reçut communication dans une lettre de Carcavy, datée du 28 septembre 1656 (p. 493 du T. I). Il en envoya la solution à Carcavy au 12 octobre 1656 (p. 505—506 du T. I). Plus tard, probablement en 1676 (voir la p. 15 de l'Avertissement), Huygens s'occupa de nouveau du problème et en élabora une solution qu'on trouve aux p. 151—155 du présent Tome. Dans la note 2 de la p. 154 nous

onder welke 3 witte fullen zijn. Men vraegt in wat reden de kans van A staet tegen die van B.

V¹). A en B genomen hebbende elck 12 penningen spelen met 3 dobbelsteenen op dese conditie: dat, als'er 11 oogen geworpen worden, A een penning aen B moet geven; maer als'er 14 geworpen werden, dat dan B een penning aen A moet geven; en dat hy het spel winnen sal, die eerst al de penningen sal hebben. Hier werdt ghevonden de kans van A tegen die van B te zijn, als 244140625 tot 282429536481.

E Y N D E.

citons les solutions de Bernoulli, de de Monmort, de de Moivre et de Struyck. Ajoutons encore que c'est à ce problème que les célèbres recherches sur la durée des parties doivent leur origine; voir les p. 268—277 de l'édition de 1713 (citée dans la note 11 de la p. 9 du présent Tome) de l'„Essay” de de Monmort, les p. 251—264 du Mémoire de 1711 de de Moivre, les p. 162—191 de sa „Doctrine of chances”, comme aussi les p. X—XI de la Préface de ce dernier ouvrage.

APPENDICE I¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

[1656].

S'il reste 1 jeu à gagner à A et 1 à B, et 2 jeux à C, combien vaudra la place de chacun posé qu'ils ayent mis chacun 2 escus au jeu.

Si C perd le premier jeu il perdra 2 escus, s'il le gagne il sera quitte, mais c'est deux contre un qu'il gagne ce premier jeu, il a donc deux hazards pour perdre 2 escus, et 1 pour estre quitte. Partant je dis que sa part des 6 escus est $\frac{2}{3}$ escu²⁾. Car prenant ces $\frac{2}{3}$ d'escu, il trouvera deux autres qui mettront $\frac{2}{3}$ d'escu contre ses $\frac{2}{3}$ ³⁾. Et [ils] joueront à qui aura le tout, sçavoir 2 escus, en quoy il aura mesme chance qu'auparavant, à sçavoir 2 hazards pour perdre ses $\frac{2}{3}$ d'escu, c'est à dire 2 escus, y adjoustant ce qu'il aura laissé à A et B: et un hazard pour

¹⁾ Cet Appendice, emprunté à une feuille séparée, contient la solution de la Prop. VIII (p. 73) du texte du Traité que nous venons de reproduire et de deux problèmes, traités (p. 77) dans la Prop. IX du même Traité. C'est probable qu'il fut composé à l'occasion de la correspondance, en 1656, avec Carcavy; voir les p. 6—8 de l'Avertissement.

²⁾ Consultez la Prop. III, p. 65. D'ailleurs Huygens au lieu de se rapporter à cette Proposition fait suivre une démonstration qui en est indépendante.

³⁾ De cette manière Huygens fait reposer la démonstration de sa solution sur l'axiome qu'il a énoncé au commencement du deuxième alinéa de la p. 61.

estre quite, en gagnant aux deux autres chacun leur $\frac{2}{3}$ d'escu. Car ainsi il aura 2 escus, comme auparavant qu'il avoit joué contre A et B. Il s'en suit que les places de A et de B valent chacune $2\frac{2}{3}$ escus. Et si l'on divise ce qui est au jeu en 9 parties, A en prendra 4. B. 4. C. 1⁴⁾.

S'il reste 1 jeu à gagner à A. 2 à B. et 2 à C, 6 escus au jeu.

Si A gagne le premier il gagne 4 escus. si B ou C le gagne, A gagne $\frac{2}{3}$ escus par la precedente, donques A a 2 hazards pour gagner $\frac{2}{3}$ escus et 1 hazard pour gagner 4 escus. Je dis que des 6 escus sa part est $3\frac{7}{9}$ escu. C'est à dire qu'il gagne $1\frac{7}{9}$ escus, car prenant outre ses 2 escus qu'il avoit mis, encore $1\frac{7}{9}$ escus que je dis qu'il gagne il mettra $\frac{10}{9}$ escus contre deux autres qui en mettront $\frac{10}{9}$ escus chacun, pour jouer qui aura tout. Et par ainsi il aura 1 hazard pour gagner $\frac{30}{9}$ escus qui avec les $\frac{6}{9}$ escus qu'il aura mis a part, le feront gagner 4 escus et deux hazards pour ne gagner que $\frac{6}{9}$ c'est $\frac{2}{3}$ escus qu'il aura mis à part. donc B et C auront des 6 escus chacun $1\frac{1}{9}$ escus. Et si l'on divise ce qui est au jeu en 27 parties, A prendra 17. B et C chacun 5⁵⁾.

S'il reste 1 à A. 2 à B. 3 jeux à C. 6 escus au jeu. combien vaut la place de chacun.

Si A gagne le premier jeu il gagne 4 escus. s'il le perd il a un hazard pour gagner $\frac{2}{3}$ escus⁶⁾ et un pour gagner $1\frac{7}{9}$ escus⁷⁾, qui vaut autant que s'il estoit

⁴⁾ Comparez la solution de la Prop. VIII, p. 73.

⁵⁾ Comparez le deuxième cas de la „Table pour trois joueurs”, p. 77.

⁶⁾ Évidemment il s'agit ici du cas où c'est B qui gagne. Alors il reste à A 1 jeu, à B 1 et à C 3 jeux à gagner. Huygens aurait donc dû calculer les „hazards” de ce cas et il aurait trouvé $\frac{8}{9}$ au lieu de $\frac{2}{3}$ écu. Ce n'est que par mégarde qu'il a pris ce dernier nombre qui se rapporte au cas, traité au début de cette Pièce, où il manque à A 1 jeu, à B 1 et à C 2 jeux.

⁷⁾ On lit en marge „par précédente”; voir, en effet, la solution du cas où il reste à A 1 à B 2 et à C 2 jeux à gagner.

affeuré de gagner (en cas de perte du dit premier jeu) $\frac{11}{9}$ escus, qui vaut la moitié des dits $\frac{2}{3} + 1\frac{7}{9}$. Or il a deux hazards pour perdre le premier jeu, et un hazard pour le gagner. donques il a un hazard pour gagner 4 escus et 2 pour gagner $\frac{11}{9}$ escus. Je dis qu'il gagne $2\frac{4}{27}$ ou bien $\frac{58}{27}$ escus. Car prenant cecy et mettant a part $\frac{11}{9}$ escus il mettra le reste qui est $\frac{25}{27}$ contre deux autres qui mettront chacun autant. Et ainsi il aura 1 hazard pour gagner $\frac{25}{9}$ escus cest a dire (y adjoutant $\frac{11}{9}$ qu'il s'est reservé) $\frac{36}{9}$ ou 4 escus et 2 hazards pour ne gagner que les $\frac{11}{9}$ escus qu'il s'est reservé. Sa part donc des 6 escus est $2 + 2 + \frac{4}{27}$ escus c'est $4\frac{4}{27}$ escus ¹⁾.

Pour scavoir combien aura B. Je dis, si B gagne le premier jeu il gagnera $\frac{2}{3}$ escus ²⁾ per primam. s'il le perd, il court fortune esgale de perdre 2 escus ou de perdre $\frac{8}{9}$ escus per secundam. qui est autant que si en perdant ce premier jeu il perdoit $\frac{13}{9}$ escus scavoir la moitié de $2 + \frac{8}{9}$. Or il a 2 hazards pour perdre le 1^{er} jeu et 1 hazard pour le gagner. Donq il a 2 hazards pour perdre $\frac{13}{9}$ escus et 1 hazard pour gagner $\frac{2}{3}$ escus. Je dis qu'il aura des 6 escus $\frac{34}{27}$ ou $1\frac{7}{27}$ escus ³⁾. Car prenant $\frac{34}{27}$ escus il en mettra $\frac{19}{27}$ escus contre deux autres qui chacun en mettront autant et ainsi aura 1 hazard pour gagner $\frac{19}{9}$ escus, qui avec $\frac{15}{27}$ escus ou $\frac{5}{9}$

¹⁾ En vérité $4\frac{2}{9}$.

²⁾ Même confusion entre les cas 1, 1, 2 et 1, 1, 3. On doit remplacer, comme auparavant $\frac{2}{3}$ par $\frac{8}{9}$.

³⁾ En vérité $1\frac{1}{3}$.

⁴⁾ En vérité $\frac{4}{9}$.

qu'il a reservez apart font $\frac{24}{9}$ ou $2\frac{2}{3}$, c'est à dire qu'il gaignera $\frac{2}{3}$ escus.

Et deux hazards pour n'avoir que les $\frac{5}{9}$ escus reservez, c'est en perdre $\frac{13}{9}$ escus parce qu'il avoit mis 2 escus au jeu.

Il s'en suit que C aura des 6 escus $\frac{16}{27}$ ⁴⁾. Ergo si l'on divise le tout en 81 parties, A prendra 56, B 27, C 8 ⁵⁾.

⁵⁾ Dans le „Tableau pour trois joueurs” (p. 77 du présent Tome) cette solution erronée est remplacée par la véritable d'après laquelle de 27 parties A en prendra 19, B 6 et C 2.

APPENDICE II¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

[1665.]

§ 1²⁾.

A B C
x y z³⁾

A heeft kanffen 4 tot a , 8 tot z ⁴⁾

$$\frac{4a + 8z}{12} \propto x^5)$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}z \propto x$$

B heeft kanffen 4 tot 0, 8 tot x

$$\frac{0 + 8x}{12} \propto y$$

$$\frac{2}{3}x \propto y$$

$$\frac{2}{3}x \propto \frac{3}{2}z; x \propto \frac{9}{4}z$$

$$\frac{9}{4}z \propto \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}z; z \propto \frac{4}{19}a; y \propto \frac{6}{19}a; x = \frac{9}{19}a$$

C heeft kanffen 4 tot 0, 8 tot y

$$\frac{8y}{12} \propto z$$

$$y = \frac{3}{2}z$$

¹⁾ Cet Appendice, que nous avons divisé en paragraphes, contient les solutions de Huygens du deuxième et du quatrième des Exercices ajoutés par lui à son Traité (voir la p. 89 du présent Tome). D'après le lieu qu'il occupe aux p. 42—44 du Manuscrit C il doit dater de 1665. On retrouve les résultats des §§ 1 et 2 dans la lettre de Huygens à Hudde du 4 avril 1665, p. 304 du T. V. Consultez encore, à propos des §§ 2—4, la p. 20 de l'Avertissement.

²⁾ Ce paragraphe traite du deuxième Exercice.

³⁾ x, y et z représentent respectivement les espérances mathématiques des trois joueurs A, B, C au commencement du jeu.

⁴⁾ Traduction: „A a 4 chances d'avoir a , 8 d'avoir z ”. a représente l'enjeu.

⁵⁾ D'après la Prop. III, p. 65 du présent Tome. \propto est le signe d'égalité employé par Huygens.

⁶⁾ Traduction: „A parie contre B que parmi 12 jetons, dont 4 blancs et 8 noirs, il prendra à

§ 2.

A wedt tegen B dat hij uit 12 schijven, daer van 4 witte en 8 swarte sijn, sal 7 schijven blindeling nemen waeronder 3 witte sullen sijn, en niet meer. Vraghe wat reden de kans van A heeft tegen die van B, facit als 35 tot 64 ⁶⁾.

Soo A genomen hebbende 6 schijven heeft 3 witte en 3 swarte. foo heeft 1 kans tot 0 en 5 kanfen tot a (pot) ⁷⁾. $\frac{0 + 5a}{6} \propto \frac{5a}{6}$ ⁸⁾

$$6 \text{ [schijven]} \quad 2 \text{ [wit]} \quad 4 \text{ [zwart]} \quad \frac{2 \cdot a + 4 \cdot 0}{6} \propto \frac{1}{3}a$$

$$5 \quad " \quad 3 \quad " \quad 2 \quad " \quad \frac{1 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{5}{6}a}{7} \propto \frac{5}{7}a$$

$$5 \quad " \quad 2 \quad " \quad 3 \quad " \quad \frac{2 \cdot \frac{5}{6}a + 5 \cdot \frac{1}{3}a}{7} \propto \frac{10}{21}[a]$$

$$5 \quad " \quad 1 \quad " \quad 4 \quad " \quad \frac{3 \cdot \frac{1}{3}[a] + 4 \cdot 0}{7} \propto \frac{1}{7}[a]$$

$$4 \quad " \quad 3 \quad " \quad 1 \quad " \quad \frac{1 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{5}{7}[a]}{8} \propto \frac{5}{8}[a]$$

$$4 \quad " \quad 2 \quad " \quad 2 \quad " \quad \frac{2 \cdot \frac{5}{7}[a] + 6 \cdot \frac{10}{21}[a]}{8} \propto \frac{15}{28}[a]$$

l'aveuglette 7 jetons dont 3 seront blancs, et pas plus. On demande le rapport de la chance de A à celle de B; réponse: comme 35 est à 64".

On voit que ce problème est identique au quatrième des Exercices qu'on trouve aux p. 89—91. Seulement, en conséquence d'un malentendu qui avait eu lieu entre lui et Hudde sur la conception du problème, Huygens a ajouté à l'énoncé les mots „en niet meer”, qui indiquent que, pour gagner, A doit prendre 3 jetons blancs „et pas plus”. Consultez sur le malentendu en question les pp. 304 et 307 du Tome V.

⁷⁾ Traduction: „Si A, ayant pris 6 jetons, en a 3 de blanc et 3 de noir, il a une chance d'avoir zéro et 5 d'avoir a (l'enjeu)”.

⁸⁾ Comme on le verra Huygens suppose que les jetons sont pris l'un après l'autre et il commence par calculer l'espérance mathématique de A après le sixième coup dans les deux seuls cas où celui-ci peut gagner au septième coup. Ensuite il considère la situation du jeu après le cinquième coup, et ainsi de suite, pour remonter enfin jusqu'au commencement du jeu.

4 [schijven]	1 [wit]	3 [zwart]	$\frac{3 \cdot \frac{10}{21}[a] + 5 \cdot \frac{1}{7}[a]}{8} \propto \frac{15}{56}[a]$
4	”	0	$\frac{4 \cdot \frac{1}{7}[a] + 4 \cdot 0}{8} \propto \frac{1}{14}[a]$
3	”	3	$\frac{1 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{5}{8}[a]}{9} \propto \frac{5}{9}[a]$
3	”	2	$\frac{2 \cdot \frac{5}{8}[a] + 7 \cdot \frac{15}{28}[a]}{9} \propto \frac{5}{9}[a]$
3	”	1	$\frac{3 \cdot \frac{15}{28}[a] + 6 \cdot \frac{15}{56}[a]}{9} \propto \frac{5}{14}[a]$
3	”	0	$\frac{4 \cdot \frac{15}{56}[a] + 5 \cdot \frac{1}{14}[a]}{9} \propto \frac{10}{63}[a]$
2	”	2	$\frac{2 \cdot \frac{5}{9}[a] + 8 \cdot \frac{5}{9}[a]}{10} \propto \frac{5}{9}[a]$
2	”	1	$\frac{3 \cdot \frac{5}{9}[a] + 7 \cdot \frac{5}{14}[a]}{10} \propto \frac{5}{12}[a]$
2	”	0	$\frac{4 \cdot \frac{5}{14}[a] + 6 \cdot \frac{10}{63}[a]}{10} \propto \frac{5}{21}[a]$
1	”	1	$\frac{3 \cdot \frac{5}{9}[a] + 8 \cdot \frac{5}{12}[a]}{11} \propto \frac{15}{33}[a]$
1	”	0	$\frac{4 \cdot \frac{5}{12}[a] + 7 \cdot \frac{5}{21}[a]}{11} \propto \frac{10}{33}[a]$
0	”	0	$\frac{4 \cdot \frac{15}{33}[a] + 8 \cdot \frac{10}{33}[a]}{12} \propto \frac{35}{99}[a]$

Ergo de kans van A tot die van B als 35 tot 64 ¹⁾).

§ 3²).

De voorgaande kans van A is nootfakelijk even foo veel dan of hij uyt de voorlegde 12 schijven moeste nemen 5 waeronder 1 witte³).

$$4 \text{ [schijven]} \ 1 \text{ [wit]} \ 3 \text{ [zwart]} \ \frac{3 \cdot 0 + 5 \cdot a}{8} [\infty] \ \frac{5}{8}a$$

$$4 \quad " \quad 0 \quad " \quad 4 \quad " \quad \frac{4 \cdot a + 4 \cdot 0}{8} [\infty] \ \frac{1}{2}a$$

$$3 \quad " \quad 1 \quad " \quad 2 \quad " \quad \frac{3 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{5}{8}[a]}{9} [\infty] \ \frac{5}{12}[a]$$

$$3 \quad " \quad 0 \quad " \quad 3 \quad " \quad \frac{4 \cdot \frac{5}{8}[a] + 5 \cdot \frac{1}{2}[a]}{9} [\infty] \ \frac{5}{9}[a]$$

$$2 \quad " \quad 1 \quad " \quad 1 \quad " \quad \frac{3 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{5}{12}[a]}{10} [\infty] \ \frac{7}{24}[a]$$

$$2 \quad " \quad 0 \quad " \quad 2 \quad " \quad \frac{4 \cdot \frac{5}{12}[a] + 6 \cdot \frac{5}{9}[a]}{10} [\infty] \ \frac{1}{2}[a]$$

$$1 \quad " \quad 1 \quad " \quad 0 \quad " \quad \frac{3 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{7}{24}[a]}{11} [\infty] \ \frac{7}{33}[a]$$

$$1 \quad " \quad 0 \quad " \quad 1 \quad " \quad \frac{4 \cdot \frac{7}{24}[a] + 7 \cdot \frac{1}{2}[a]}{11} [\infty] \ \frac{14}{33}[a]$$

$$0 \quad " \quad 0 \quad " \quad 0 \quad " \quad \frac{4 \cdot \frac{7}{33}[a] + 8 \cdot \frac{14}{33}[a]}{12} [\infty] \ \frac{35}{99}[a]. \text{ bon.}$$

¹) Traduction: „Par conséquent la chance de A est à celle de B comme 35 est à 64”.

²) Ce paragraphe contient une vérification de la solution obtenue au paragraphe précédent.

³) Traduction: „La chance précédente de A est nécessairement aussi grande que dans le cas où parmi les 12 jetons mentionnés il en devait prendre 5 dont un blanc”. Remarquons qu’il s’agit dans ce dernier cas des jetons qui, suivant la première supposition, n’ont pas été pris, dont 4 sont noirs et 1 blanc. Nous appellerons le problème qui s’y rattache: le problème complémentaire.

§ 4 ¹⁾.

ijsdem positis, mæ datter ten minste 3 witte onder de 7 getrocken schijven fullen sijn ²⁾).

$$4 \text{ [schijven]} \text{ } 1 \text{ [wit]} \text{ } 3 \text{ [zwart]} \frac{3 \cdot 0 + 5 \cdot a}{8} [\infty] \frac{5a}{8} \text{ } ^{3)}$$

$$3 \text{ " } 1 \text{ " } 2 \text{ " } \frac{3 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{5}{8}[a]}{9} [\infty] \frac{5}{12}[a]$$

$$3 \text{ " } 0 \text{ " } 3 \text{ " } \frac{4 \cdot \frac{5}{8}[a] + 5 \cdot a}{9} [\infty] \frac{5}{6}[a]$$

$$2 \text{ " } 1 \text{ " } 1 \text{ " } \frac{3 \cdot 0 + 7 \cdot \frac{5}{12}[a]}{10} [\infty] \frac{7}{24}[a]$$

$$2 \text{ " } 0 \text{ " } 2 \text{ " } \frac{4 \cdot \frac{5}{12}[a] + 6 \cdot \frac{5}{6}[a]}{10} [\infty] \frac{2}{3}[a]$$

$$1 \text{ " } 1 \text{ " } 0 \text{ " } \frac{3 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{7}{24}[a]}{[11]} [\infty] \frac{7}{33}[a]$$

¹⁾ Ce paragraphe contient la solution du quatrième Exercice proposé par Huygens si l'on donne à ce problème l'interprétation que Hudde y avait attachée; comparez le deuxième alinéa de la note 6 qui commence à la p. 96.

²⁾ Traduction: „[Solution du problème précédent] sous les mêmes suppositions, mais avec cette différence qu'il faut qu'il y ait *au moins* trois blancs parmi les 7 jetons qu'on a pris”.

³⁾ Pour simplifier le calcul Huygens commence par remplacer le problème en question par le problème complémentaire (voir la note 3 de la p. 99) d'après lequel A prend 5 jetons dont quatre, au moins, doivent être noirs. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de discuter le cas de 4 jetons dont 0 blancs et 4 noirs, parce qu'alors le cinquième coup fera toujours gagner A.

⁴⁾ C'est, en effet, le résultat obtenu par Hudde; voir la p. 304 du T.V. Ajoutons qu'un peu plus haut dans le Manuscrit C, aux p. 36—37, on rencontre un autre calcul qui se rapporte au même problème et qui doit avoir précédé celui que nous avons reproduit. Ce calcul fut biffé plus tard et Huygens le signala comme „misrekent” (mal calculé). En le parcourant, on s'aperçoit d'abord que Huygens y a suivi, comme dans ce § 4, l'interprétation de Hudde,

$$1 \text{ [schijven]} 0 \text{ [wit]} 1 \text{ [zwart]} \frac{4 \cdot \frac{7}{24} [a] + 7 \cdot \frac{2}{3} [a]}{[11]} [\infty] \frac{35}{66} [a]$$

$$0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad \frac{4 \cdot \frac{7}{33} [a] + 8 \cdot \frac{35}{66} [a]}{[12]} [\infty] \frac{42}{99} [a]$$

$$\begin{array}{l} 42 \text{ [tot]} 57 \\ 14 \text{ [tot]} 19. \text{ bon } ^4). \end{array}$$



puisqu'il considère le jeu comme gagné quand A, déjà en possession de 2 jetons blancs et de 3 jetons noirs, prend ensuite 1 jeton blanc. De cette manière il trouve dans ce cas de

2 jetons blancs et 3 jetons noirs pour l'espérance mathématique de A : $\frac{2a + 5 \cdot \frac{1}{3}a}{7} = \frac{11}{21}a$, au

lieu de $\frac{10}{21}a$, comme au § 2 de la présente Pièce. Il aurait donc dû arriver au résultat obtenu par Hudde, mais au cas de 1 jeton blanc et 4 jetons noirs il commet une erreur de calcul en

écrivant „ $\frac{3 \cdot a + 0}{7} \propto \frac{3}{7}a$ ” au lieu de $\frac{3 \cdot \frac{1}{3}a + 0}{7} \propto \frac{1}{7}a$; ce qui explique l'inexactitude du résultat final auquel il parvient.

APPENDICE III¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

[1665.]

J[an] heeft 2 witte schijven en 1 swarte, maer P. heeft 1 witte en 2 swarte. En ieder uit sijn schijven met beurten een uytkiefende blindeling, die een swarte krijgt moet een δ (ducaet) infetten, maar die een witte krijgt, strijckt alles dat ingefet is, en J kiest eerst als noch niets ingefet is. de vraghe is hoe veel J van eersten aen hier door wint of verliest, antw. J wint $\frac{207}{343}$ van een ducac²⁾.

+ a is 't geen heeft P. als hij o tegen o heeft ingefet en J. moet werpen³⁾.

— b „ „ „	Jan „ „	1 „ 0 „ „	„ „ „	P. „ „
— c „ „ „	P. „ „	1 „ 1 „ „	„ „ „	J. „ „
— d „ „ „	Jan „ „	2 „ 1 „ „	„ „ „	P. „ „
— e „ „ „	P. „ „	2 „ 2 „ „	„ „ „	J. „ „
— f „ „ „	Jan „ „	3 „ 2 „ „	„ „ „	P. „ „
— g „ „ „	P. „ „	3 „ 3 „ „	„ „ „	J. „ „
— h „ „ „	J. „ „	4 „ 3 „ „	„ „ „	P. „ „ ⁴⁾

¹⁾ Cet Appendice est emprunté aux p. 45—47 du Manuscrit C; ces pages étaient numérotées 1—3 par Huygens. On y trouve la solution d'un problème posé par Huygens dans une lettre à Hudde du 10 mai 1665; voir les p. 352—353 du Tome V. Ajoutons que ce problème était une modification d'un autre problème proposé par Hudde à Huygens dans la lettre du 5 mai 1665; voir les p. 350—351 du même Tome. On peut encore consulter sur ces problèmes les p. 34—37 de l'Avertissement.

²⁾ Traduction: „J[ean] a 2 jetons blancs et 1 noir, mais P. 1 blanc et 2 noirs. Et chacun à son tour choisit à l'aveuglette un de ses jetons. Celui qui obtient un jeton noir doit ajouter un δ (ducat) à l'enjeu, mais celui qui obtient un jeton blanc reçoit tout ce qui a été mis. Et J. choisit la première fois, quand il n'y a encore rien à l'enjeu. On demande combien est l'avantage ou le désavantage de J. au commencement du jeu. Rép. J. gagne $\frac{207}{343}$ d'un ducat.”

+ k is 't geen heeft J. als hij o tegen o heeft ingefet en P. moet werpen.

— l „ „ „	P. „ „ 1 „	0 „ „ „	J. „ „ „
— m „ „ „	J. „ „ 1 „	1 „ „ „	P. „ „ „
— n „ „ „	P. „ „ 2 „	1 „ „ „	J. „ „ „
— o „ „ „	J. „ „ 2 „	2 „ „ „	P. „ „ „
— p „ „ „	P. „ „ 3 „	2 „ „ „	J. „ „ „

⁵⁾

$$1. - b \text{ en } 2. + k^6)$$

$$-a \propto \frac{-b + 2k}{3}$$

$$-3a + b \propto 2k$$

$$a \propto \frac{b - 2k}{3}$$

$$-b \propto 1. - \delta \quad 2. + c^7)$$

$$-b \propto \frac{-\delta + 2c}{3}$$

$$\frac{1}{3}b \propto \frac{-2c + \delta}{9}$$

$$-c \propto 2. - \delta \quad 1. + d$$

$$\frac{2}{9}c \propto -\frac{2}{27}d + \frac{4}{27}\delta^8)$$

$$-d \propto 1. - 2\delta \quad 2. + e$$

$$\frac{2}{27}d \propto \frac{4}{81}\delta - \frac{4}{81}e$$

$$-e \propto 2. - 2\delta \quad 1. + f$$

$$-\frac{4}{81}e \propto -\frac{16}{243}\delta + \frac{4}{243}f$$

$$-f \propto 1. - 3\delta \quad 2. + g$$

$$\frac{4}{243}f \propto \frac{12}{729}\delta - \frac{8}{729}g$$

$$-g \propto 2. - 3\delta \quad 1. + h$$

$$-\frac{8}{729}g \propto -\frac{48}{2187}\delta + \frac{8}{2187}h$$

$$-h \propto 1. - 4\delta \quad 2. + i$$

$$\frac{8}{2187}h \propto \frac{32}{6561}\delta - \frac{16}{6561}i$$

³⁾ Traduction: „+ a est l'avantage de P. quand il a mis o contre o et que J. doit choisir”. Remarquons que Huygens a donc supposé, en commençant ces calculs, que l'avantage se trouverait du côté de P, mais que les calculs lui ont appris le contraire.

⁴⁾ Plus bas dans le manuscrit ces définitions préalables sont continuées encore en introduisant les lettres i, k, l, m , mais nous avons cru pouvoir supprimer ces dernières définitions.

⁵⁾ Ces définitions aussi sont continuées plus bas en introduisant les lettres q, r, s et v .

⁶⁾ Cette notation (1. — b et 2. + k) indique, comme Huygens l'expliquera expressément dans une autre Pièce que nous reproduirons plus bas (voir la p. 124 du présent Tome), que J[ean] a (au commencement du jeu) une chance d'obtenir — b et deux d'obtenir + k . On voit donc que Huygens suppose que le jeu se continuera si Jean prend un jeton blanc au premier coup. Or, cette supposition a donné lieu à un nouveau malentendu entre Hudde et lui, puisque Hudde considèrerait que le jeu était fini dans ce cas (voir les pp. 381 et 422 du T. V). D'après cette dernière interprétation on aurait donc $k = 0$.

⁷⁾ En effet, il est évident que l'avantage de l'un des joueurs est toujours égal au désavantage de l'autre.

⁸⁾ Nous supprimons, ici et dans la suite, quelques calculs tout-à-fait analogues à ceux qui précèdent.

$$\begin{aligned} -i \infty 2. - 4\delta \quad 1. + N & \quad N \infty 1. - 5\delta \quad 2. + \gamma \\ -\frac{16}{6561}i \infty -\frac{128}{[19683]}\delta + \frac{16}{[19683]}N & \quad N \infty \frac{-5\delta + 2\gamma}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \infty 2. + l \quad 1. - a & \quad -l \infty 2. - \delta \quad 1. + m \\ \frac{2}{3}k \infty \frac{4}{9}l - \frac{2}{9}a & \quad \frac{4}{9}l \infty \frac{8}{27}\delta - \frac{4}{27}m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -m \infty 1. - \delta \quad 2. + n & \quad -n \infty 2. - 2\delta \quad 1. + o \\ \frac{4}{27}m \infty \frac{4}{81}\delta - \frac{8}{81}n & \quad -\frac{8}{81}n \infty -\frac{32}{243}\delta + \frac{8}{243}o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -o \infty 1. - 2\delta \quad 2. + p & \quad -p \infty 2. - 3\delta \quad 1. + q \\ \frac{8}{243}o \infty \frac{16}{729}\delta - \frac{16}{729}p & \quad -\frac{16}{729}p \infty -\frac{96}{2187}\delta + \frac{16}{2187}q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -q \infty 1. - 3\delta \quad 2. + r & \quad -r \infty 2. - 4\delta \quad 1. + s \\ \frac{16}{2187}q \infty \frac{48}{6561}\delta - \frac{32}{6561}r & \quad -\frac{32}{[6561]}r \infty -\frac{256}{[19683]}\delta + \frac{32}{[19683]}s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -s \infty 1. - 4\delta \quad 2. + t & \quad -t \infty 2. - 5\delta \quad 1. + v \\ \frac{32}{[19683]}s \infty \frac{128}{[59049]}\delta + \frac{64}{[59049]}t & \quad -t \infty \frac{-10\delta + v}{3} \end{aligned}$$

A B

$$a \infty \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}k^1)$$

¹⁾ Voir la première équation obtenue à la p. 103. Dans ce qui suit Huygens désignera par A le premier terme $\frac{1}{3}b$, par B le deuxième terme $-\frac{2}{3}k$ du second membre de cette équation.

²⁾ Huygens veut indiquer ainsi qu'on peut remplacer $-\frac{2}{9}c$ par $-\frac{4}{27}\delta + \frac{2}{27}d$; voir les calculs qu'on trouve aux p. 103—104.

³⁾ Comme on le verra, la solution de Huygens repose sur la supposition que ce dernier terme (et aussi celui de l'expression pour B) s'approche indéfiniment de zéro. Cela admis, il ne s'agit plus que de sommer les suites infinies formées par les termes qui contiennent δ . Comparez encore à propos de cette supposition la note 1 de la p. 112.

A

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3}b \propto \frac{1}{9}d - \frac{2}{9}c \\
 - \frac{4}{27}d + \frac{2}{27}d^2) \\
 + \frac{4}{81}d - \frac{4}{81}e \\
 - \frac{16}{243}d + \frac{4}{243}f \\
 + \frac{12}{729}d - \frac{8}{729}g \\
 - \frac{48}{2187}d + \frac{8}{2187}h \\
 + \frac{32}{6561}d - \frac{16}{6561}i \\
 \left[-\frac{16}{6561}i \right] \\
 - \frac{128}{[12683]}d + \frac{16}{[19683]}n \\
 + \frac{80}{[59049]}d - \frac{32}{[59049]} \gamma^3)
 \end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{3}k \propto \frac{2}{9}a - \frac{4}{9}l \\
 - \frac{8}{27}d + \frac{4}{27}m \\
 + \frac{4}{81}d - \frac{8}{81}n \\
 - \frac{32}{243}d + \frac{8}{243}o \\
 + \frac{16}{729}d - \frac{16}{729}p \\
 - \frac{96}{2187}d + \frac{16}{2187}q \\
 + \frac{48}{6561}d - \frac{32}{6561}r \\
 \left[-\frac{32}{6561}r \right] \\
 - \frac{256}{[19683]}d + \frac{32}{[19683]}s \\
 + \frac{128}{[59049]}d - \frac{64}{[59049]}t \\
 - \frac{640}{[177147]}d + \frac{64}{[177147]}v
 \end{aligned}$$

THEOREMA.

Si sint magnitudines in ratione geometrica continue descendentes erit maxima cum omnibus reliquis in infinitum ad solam maximam sicut maxima ad excessum maximæ supra sequentem. Ergo si sint ut 4 ad 1 erit maxima cum omnibus ad maximam ut 4 ad 3.

Si sint ut 9 ad 2, erit maxima cum omnibus ad maximam ut 9 ad 7. five maxima cum omnibus erit $\frac{9}{7}$ maximæ.

$$\left. \begin{array}{r} \frac{4}{81} \frac{8}{729} \frac{16}{6561} \frac{32}{59049} \\ \frac{8}{729} \frac{16}{6561} \frac{32}{59049} \\ \frac{16}{6561} \frac{32}{59049} \\ \frac{32}{59049} \end{array} \right\} \text{les + de B. } ^1)$$

hic ²⁾ sequens est $\frac{2}{9}$ precedentis.

$\frac{9}{7}$ [van] $\frac{4}{81}$ [∞] $\frac{4}{63} \infty$ de bovenste rij
 $\frac{9}{7}$ van $\frac{4}{63}$ [∞] $\frac{4}{49} \infty$ al de rijen dat is ∞
 de + van B ³⁾

les + de B aux — de B ut 1 ad 6
 les — de B aux — de A ut 2 ad 1
 les — de A aux + de A ut 4 ad 3

¹⁾ En effet, la somme de tous ces nombres est égale à celle des quatre premiers coefficients positifs de δ dans la suite B qui résulte du développement de $-\frac{2}{3}k$.

²⁾ C'est-à-dire dans les suites qu'on trouve à côté.

³⁾ Traduction : „ $\frac{9}{7} \times \frac{4}{81} \infty \frac{4}{63} \infty$ la première suite. $\frac{9}{7} \times \frac{4}{63} \infty \frac{4}{49} \infty$ [la somme] de toutes les suites, c'est-à-dire ∞ les termes positifs de B”.

⁴⁾ C'est le résultat annoncé au début de cette Pièce; voir la p. 102.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{les + de B font } \infty + \frac{4}{49}\delta & & \\
 \text{ergo les — de B} & \infty - \frac{24}{49}\delta & \\
 \text{ergo les — de A} & \infty - \frac{12}{49}\delta & \\
 \text{ergo les + de A} & \infty + \frac{9}{49}\delta & \\
 \hline
 & - \frac{23}{49}\delta \text{ quibus addenda } \frac{2}{9}a \text{ quæ sub B continentur.} & \\
 & \frac{2}{9}a & \\
 \hline
 & \frac{2}{9}a - \frac{23}{49}\delta \infty a; \frac{207}{343}\delta \infty - a^4). &
 \end{array}$$

APPENDICE IV ¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

[1665].

§ 1 ²⁾

A en B kiezen blindeling met beurten, A altijd uit 3 [of uit $\theta + \lambda$] schijven waer van 2 [θ] wit fijn en 1 [λ] swart, maer B uyt een onbekend getal van witte en swarte schijven, op conditie dat die een witte treckt sal al hebben dat in staet; maer die een swarte treckt daer voor ieder reys 1 duc. sal in setten. en A sal eerst trecken, de vrage is als men wil hebben dat de kanssen van A en B gelijkwaerdigh fijn, wat proportie van witte tot swarte schijven B soude moeten hebben ³⁾.

¹⁾ La Pièce est empruntée aux p. 54—61 (numérotées 10—17 par Huygens) du Manuscrit C. Elle contient la solution du problème posé par Hudde dans sa lettre du 5 mai 1665 (voir la p. 350 du T. V) et de quelques autres problèmes qui s'y rattachent.

²⁾ Ce paragraphe s'occupe du problème de Hudde, où A doit choisir entre 2 jetons blancs et 1 noir, et de la généralisation que Huygens y a donnée en représentant le nombre des blancs par θ et celui des noirs par λ . Huygens traite conjointement ces deux problèmes, mais, pour éviter la confusion qui en résulterait ici, il nous a semblé préférable d'omettre tout ce qui se rapporte à la solution particulière sauf l'endroit où il s'agit de l'application de la solution générale à ce cas spécial. On peut encore consulter sur ces problèmes les p. 35—37 de l'Avertissement.

³⁾ Traduction: „A et B choisissent à l'aveuglette à tour de rôle, A toujours un de 3 [ou de $\theta + \lambda$] jetons dont 2 [θ] blancs et 1 [λ] noir, mais B un d'un nombre inconnu de jetons blancs et noirs, à condition que celui qui tirera un jeton blanc aura tout ce qui est mis; mais celui qui tire un jeton noir ajoutera chaque fois un ducat à l'enjeu, et A tirera le premier. On demande lorsqu'on veut que les chances de A et de B soient équivalentes, quelle proportion devra exister entre les nombres des jetons blancs et noirs de B”.

⁴⁾ Traduction: „A choisit un de 3 [ou de $\theta + \lambda$] jetons dont 2 [θ] blancs, 1 [λ] noir”.

⁵⁾ Traduction: „ σ est l'avantage de A quand il a mis 0 contre 0 et qu'il doit choisir”.

A kiest uyt 3 [of uit $\rho \propto \theta + \lambda$] schijven waer van 2 [θ] wit, 1 [λ] swart 4).
B kiest uyt ω schijven waarvan φ wit, ψ swart. $\omega \propto \varphi + \psi$.

a is 't geen heeft A als hij o tegen o	
b ————— B ——— o ——— 1	} heeft ingeset en hij moet kiezen 5).
c ————— A ——— 1 ——— 1	
d ————— B ——— 1 ——— 2	
e ————— A ——— 2 ——— 2	
f ————— B ——— 2 ——— 3	
g ————— A ——— 3 ——— 3	
h ————— B ——— 3 ——— 4	
i ————— A ——— 4 ——— 4	
k ————— B ——— 4 ——— 5	
l ————— A ——— 5 ——— 5	

$-k$	} 't geen heeft	B als hij o tegen o	} heeft ingeset, en hij moet kiezen.
$+l$		A ——— o ——— 1	
m		B ——— 1 ——— 1	
n		A ——— 1 ——— 2	
o		B ——— 2 ——— 2	
p		A ——— 2 ——— 3	
q		B ——— 3 ——— 3	
r		A ——— 3 ——— 4	
s		B ——— 4 ——— 4	
t		A ——— 4 ——— 5	

Δ is een ducet die ingeset werdt 6).

$$a \propto \theta.k \quad \lambda. - b^7)$$

$$a \propto \frac{\theta k - \lambda b}{\rho}$$

$$c \propto \theta.\Delta \quad \lambda. - d$$

$$\frac{\lambda \psi c}{\rho \omega} \propto \frac{\lambda \theta \psi \Delta - \psi \lambda \lambda d}{\rho \rho \omega}$$

$$b \propto \varphi.\Delta \quad \psi. - c$$

$$- \frac{\lambda b}{\rho} \propto - \frac{\lambda \varphi \Delta + \lambda \psi c}{\rho \omega}$$

$$d \propto \varphi.2\Delta \quad \psi. - e$$

$$- \frac{\psi \lambda \lambda}{\rho \rho \omega} d \propto - \frac{2 \varphi \psi \lambda^2 \Delta + \psi \psi \lambda^2 e}{\rho \rho \omega}$$

6) Traduction: „ Δ est un ducat qui est mis à l'enjeu”.

7) Voir à propos de cette notation la note 6 de la p. 103.

$$e \propto \theta.2\Delta \quad \lambda.-f$$

$$\frac{\psi\psi\lambda\lambda}{\rho\rho\omega\omega} e \propto \frac{2\theta\lambda^2\psi\psi\Delta - \lambda\lambda^2\psi\psi f}{\rho^3\omega\omega}$$

$$g \propto \theta.3\Delta \quad \lambda.-h$$

$$\frac{\lambda\lambda\lambda\psi^3}{\rho^3\omega^3} g \propto \frac{3\theta\lambda\lambda^2\psi^3\Delta - \lambda^4\psi^3h}{\rho^4\omega^3}$$

$$i \propto \theta.4\Delta \quad \lambda.-\aleph$$

$$\frac{\lambda^4\psi^4}{\rho^4\omega^4} i \propto \frac{4\theta\lambda^4\psi^4\Delta - \lambda^5\psi^4\aleph}{\rho^5\omega^4}$$

$$-k \propto \varphi.-a \quad \psi.-l$$

$$\frac{\theta}{\rho} k \propto \frac{\theta\varphi a + \theta\psi l}{\rho\omega}$$

$$m \propto \varphi.\Delta \quad \psi.-n$$

$$\frac{\theta\psi\lambda m}{\rho\rho\omega} \propto \frac{-\lambda\theta\psi\varphi\Delta + \lambda\theta\psi\psi n}{\rho\rho\omega\omega}$$

$$o \propto \varphi.2\Delta \quad \psi.-p$$

$$\frac{\lambda^2\theta\psi\psi}{\rho^3\omega\omega} o \propto \frac{-2\lambda^2\theta\psi\psi\varphi\Delta + \lambda^2\theta\psi^3p}{\rho^3\omega^3}$$

$$q \propto \varphi.3\Delta \quad \psi.-r$$

$$\frac{\lambda\lambda\theta\psi^3}{\rho^4\omega^3} q \propto \frac{-3\lambda\lambda^2\theta\varphi\psi^3\Delta + \lambda\lambda^2\theta\psi^4r}{\rho^4\omega^4}$$

$$s \propto \varphi.4\Delta \quad \psi.-t$$

$$\frac{\lambda^4\theta\psi^4}{\rho^5\omega^4} s \propto \frac{-4\lambda^4\theta\psi^4\varphi\Delta + \lambda^4\theta\psi^5t}{\rho^5\omega^5}$$

$$f \propto \varphi.3\Delta \quad \psi.-g$$

$$\frac{\lambda\lambda^2\psi\psi}{\rho^3\omega\omega} f \propto \frac{-3\varphi\psi\psi\lambda\lambda^2\Delta + \lambda\lambda^2\psi^3g}{\rho^3\omega^3}$$

$$h \propto \varphi.4\Delta \quad \psi.-2$$

$$\frac{-\lambda^4\psi^3}{\rho^4\omega^3} h \propto \frac{-4\lambda^4\varphi\psi^3\Delta + \lambda^4\psi^4i}{\rho^4\omega^4}$$

$$\aleph \propto \varphi.5\Delta \quad \psi.\beth$$

$$\frac{\lambda^5\psi^4}{\rho^5\omega^4} \aleph \propto \frac{-5\lambda^5\psi^4\varphi\Delta + \lambda^5\psi^5\beth}{\rho^5\omega^5}$$

$$l \propto \theta.\Delta \quad \lambda.-m$$

$$\frac{\theta\psi}{\rho\omega} l \propto \frac{\theta\theta\psi\Delta - \theta\psi\lambda m}{\rho\rho\omega}$$

$$n \propto \theta.2\Delta \quad \lambda.-o$$

$$\frac{\lambda\theta\psi\psi}{\rho\rho\omega\omega} n \propto \frac{2\lambda\theta\theta\psi\psi\Delta - \lambda^2\theta\psi\psi o}{\rho^3\omega\omega}$$

$$p \propto \theta.3\Delta \quad \lambda.-q$$

$$\frac{\lambda^2\theta\psi^3}{\rho^3\omega^3} p \propto \frac{3\lambda^2\theta\theta\psi^3\Delta - \lambda\lambda^2\theta\psi^3q}{\rho^4\omega^3}$$

$$r \propto \theta.4\Delta \quad \lambda.-s$$

$$\frac{\lambda\lambda\lambda\theta\psi^4}{\rho^4\omega^4} r \propto \frac{4\theta\theta\lambda^3\psi^4\Delta - \lambda^4\theta\psi^4s}{\rho^5\omega^4}$$

$$a \propto -\frac{\lambda b}{\rho} + \frac{\theta k}{\rho} \quad ^1)$$

¹⁾ Voir plus haut à la p. 109. Dans ce qui suit, Huygens désigne par A le premier terme $-\frac{\lambda b}{\rho}$, par B le deuxième terme $\frac{\theta k}{\rho}$ du second membre de cette équation.

²⁾ Cette notation indique qu'on peut remplacer $\frac{\lambda\psi c}{\varphi\omega}$ par $\frac{\lambda\theta\psi\Delta - \psi\lambda^2 d}{\varphi\varphi\omega}$.

³⁾ Il s'agit des pages dont nous avons emprunté ce qui précède la dernière équation de la p. 110.

A

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda b}{\rho} \infty -\frac{\lambda \varphi \Delta + \lambda \psi c}{\rho \omega} \\
& \quad \frac{\lambda \theta \psi \Delta - \psi \lambda^2 d_2}{\rho \rho \omega} \\
& \quad \quad -\frac{2 \varphi \psi \lambda^2 \Delta + \psi \psi \lambda^2 e}{\rho \rho \omega \omega} \\
& \quad \quad \quad +\frac{2 \theta \lambda^2 \psi \psi \Delta - \lambda \lambda^2 \psi \psi f}{\rho^3 \omega \omega} \\
& \quad \quad \quad \quad -\frac{3 \varphi \psi \psi \lambda \lambda^2 \Delta + \lambda \lambda^2 \psi^3 g}{\rho^3 \omega^3} \\
& \quad \quad \quad \quad \quad +\frac{3 \theta \lambda^3 \psi^3 \Delta - \lambda^4 \psi^3 h}{\rho^4 \omega^3} \\
& \left[-\frac{\lambda^4 \psi^3 h}{\rho^4 \omega^3} \right] \\
& -\frac{4 \lambda^4 \varphi \psi^3 \Delta + \lambda^4 \psi^4 i}{\rho^4 \omega^4} \\
& \quad \quad \frac{4 \theta \lambda^4 \psi^4 \Delta - \lambda^5 \psi^4 k}{\rho^5 \omega^4} \\
& \quad \quad \quad -\frac{5 \lambda^5 \psi^4 \varphi \Delta + \lambda^5 \psi^5 l}{\rho^5 \omega^5}
\end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta k}{\rho} \infty \frac{\theta \varphi a}{\rho \omega} + \frac{\theta \psi l}{\rho \omega} \\
& \quad \frac{\theta \theta \psi \Delta - \theta \lambda \psi m}{\rho \rho \omega} \\
& \quad \quad -\frac{\lambda \theta \psi \varphi \Delta + \lambda \theta \psi \psi n}{\rho \rho \omega \omega} \\
& \quad \quad \quad +\frac{2 \lambda \theta \theta \psi \psi \Delta - \lambda \lambda \theta \psi \psi o}{\rho^3 \omega \omega} \\
& \quad \quad \quad \quad -\frac{2 \lambda \lambda \theta \psi \psi \varphi \Delta + \lambda \lambda \theta \psi^3 p}{\rho^3 \omega^3} \\
& \quad \quad \quad \quad \quad +\frac{3 \lambda \lambda \theta \theta \psi^3 \Delta - \lambda^3 \theta \psi^3 q}{\rho^4 \omega^3} \\
& \left[-\frac{\lambda^3 \theta \psi^3 q}{\rho^4 \omega^3} \right] \\
& -\frac{3 \lambda^3 \theta \varphi \psi^3 \Delta + \lambda^3 \theta \psi^4 r}{\rho^4 \omega^4} \\
& \quad \quad +\frac{4 \theta \theta \lambda^3 \psi^4 \Delta - \lambda^4 \theta \psi^4 s}{\rho^5 \omega^4} \\
& \quad \quad \quad -\frac{4 \lambda^4 \theta \psi^4 \varphi \Delta + \lambda^4 \theta \psi^5 t}{\rho^5 \omega^5}
\end{aligned}$$

il faudroit demonstter la proportion dans laquelle se suivent les + et les — de A et de B, ce qui n'est pas mal aise en regardant leur origine dans le calcul pag. 10 et 11³⁾.

Notez que les dernieres quantitez $\frac{\lambda^5 \psi^5 \beth}{\rho^5 \omega^5}$ et $\frac{\lambda^4 \theta \psi^5 t}{\rho^5 \omega^5}$ deviennent infiniment petites, puisque les + de A et de B et aussi les — diminuent toujours selon la proportion de ρ à $\psi \lambda$, (estant ρ plus grand que $\lambda \psi$ parce que $\rho \propto \theta + \lambda$ et $\omega \propto \varphi + \psi$, et que les quantitez r, t ou q, s et i, \beth ou h, \aleph croissent seulement par l'unité comme l'on voit par l'hypothese pag. 10¹⁾).

fit $\lambda \propto$ les + d'A²⁾

ergo $\theta \propto$ les + de B

$$\theta \psi \text{ — } \varphi \rho \text{ — } \lambda (\text{les} + [\text{d}'] \text{A}) \text{ — } \frac{\lambda \varphi \rho}{\theta \psi} \propto \text{les — d'A}$$

$$\theta \omega \text{ — } \lambda \varphi \text{ — } \theta (\text{les} + \text{de B}) \text{ — } \frac{\lambda \varphi}{\omega} \propto \text{les — de B}$$

$$- \lambda + \frac{\lambda \varphi \rho}{\theta \psi} \propto \theta - \frac{\lambda \varphi}{\omega} \text{ 4)}$$

$$\frac{\omega \rho \lambda \varphi}{\theta \psi} \propto \omega \lambda + \omega \theta - \lambda \varphi \quad \text{fed } \lambda + \theta \propto \rho$$

$$\frac{\omega \rho \lambda \varphi}{\theta \psi} \propto \omega \rho - \lambda \varphi$$

$$\omega \rho \lambda \varphi \propto \omega \rho \theta \psi - \lambda \varphi \theta \psi \quad \text{fed } \omega \propto \varphi + \psi \text{ et } \rho \propto \theta + \lambda$$

$$\varphi \theta \lambda \rho \propto \varphi \psi \theta \theta - \varphi \psi \lambda \rho + \theta \rho \psi \psi$$

$$\text{vel } \varphi \varphi \propto - \psi \varphi + \frac{\psi \theta \theta}{\lambda \rho} \varphi + \frac{\theta \psi \psi}{\lambda} \text{ bon. Regula 5).}$$

¹⁾ Par „l'hypothese” Huygens entend les définitions des quantités $a, -b$, etc. données au début de cette Pièce à la p. 109. Or, chacune des quantités, qui entrent dans une même suite, peut être considérée comme la somme de trois parties dont la première et la deuxième sont proportionnelles, respectivement, aux mises des joueurs A et B, lesquelles croissent chaque fois de l'unité, et dont la troisième ne varie pas. À la première et à la deuxième partie le raisonnement de Huygens s'applique; quant à la troisième, son produit avec les coefficients indiqués, s'approche *a fortiori* de zéro.

²⁾ Puisque la solution cherchée dépend exclusivement des *rappports* qui existent entre les sommes des + et — de A et de B, on peut remplacer ces sommes par des quantités qui leur sont proportionnelles, et choisir pour l'une d'elles une valeur arbitraire. De cette manière il n'est pas nécessaire de déterminer la somme de l'une des suites formées par les quantités + ou — de A ou de B, comme Huygens l'avait fait pour les + de B à l'occasion du problème qui précède, où, évidemment, cette sommation ne pouvait être évitée; voir la p. 106.

³⁾ Cette notation indique que $\theta \psi$ est à $\varphi \rho$ comme λ est à $\frac{\lambda \varphi \rho}{\theta \psi}$.

⁴⁾ Puisque les chances des deux joueurs doivent être équivalentes au commencement du jeu, on doit avoir $a = 0$ et, par suite, $-A = B$; voir la dernière équation de la p. 110 et la note 1

$$\varphi\psi \propto \frac{1}{3}\varphi\psi + 2\psi\psi^6)$$

$$\varphi \propto \frac{1}{6}\psi + \sqrt{2\frac{1}{36}\psi\psi} \text{ vel } \varphi \propto \frac{1}{6}\psi + \frac{1}{6}\sqrt{73\psi\psi}$$

$$\varphi \text{ prope } \propto 1\frac{4}{7}\psi; \varphi \text{ ad } \psi \text{ prope ut } 11 \text{ ad } 7 \text{ propius ut } 1193 \text{ ad } 750^7)$$

$$\text{fit } \theta \propto 10; \lambda \propto 1^8). [\varphi \propto \frac{89}{22}\psi +] \sqrt{\frac{12761}{484}}[\psi] \frac{113}{22} \text{ prox. maj.}$$

$$\frac{89}{22}$$

$$\frac{202}{22} \text{ prox. maj.}$$

$$\text{prox. maj. } 101\psi \propto 11\varphi$$

§ 2°).

les + de B ont cette proportion

$\frac{\theta\theta\psi\Delta}{\rho\rho\omega}$ $\omega\rho$	$\frac{2\lambda\theta\theta\psi\psi\Delta}{\rho^3\omega\omega}$ $2\lambda\psi$ $2\omega\rho$	$\frac{3\lambda\lambda\theta\theta\psi^3\Delta}{\rho^4\omega^3}^{10)}$ $3\lambda\psi$
--	--	---

de cette même p. 110.

- 5) Par cette règle le problème peut être considéré comme résolu. En effet, pour déterminer la proportion désirée entre les nombres φ et ψ des jetons blancs et noirs, il ne s'agit plus que de résoudre une équation quadratique à racines toujours réelles et de signes contraires, dont la racine positive est la seule qui satisfait aux conditions du problème.
- 6) Application de la „Regula” au problème posé par Hudde où $\theta = 2$, $\lambda = 1$, $\rho = 3$.
- 7) On ne voit pas comment la première approximation a été obtenue, mais de petits calculs en marge du Manuscrit permettent de constater que la seconde a été trouvée en calculant la racine quadratique de 73000000 qui est égale à 8544, d'où il suit $\varphi = \frac{9544}{6000}\psi = \frac{1193}{750}\psi$.
- 8) Voir à propos de cette proportion de 10 à 1, qu'on retrouve plusieurs fois dans la correspondance entre Huygens et Hudde, les pp. 386 et 393 du T. V.
- 9) Dans ce paragraphe Huygens détermine l'avantage du joueurs A pour des valeurs données de θ , λ , ρ et ψ ; problème dont il a résolu un cas particulier dans l'Appendice III (p. 102—107). À cet effet il doit chercher la somme de l'une des quatre suites dont il est question dans la note 2 de la page précédente, desquelles il choisit celle des „+ de B”.
- 10) Voir les trois premiers termes positifs de la suite B de la p. 111.

ratio primæ ad secundam ¹⁾

$$\begin{array}{ccccccc} \Xi & \omega\rho & \lambda\psi & . & . & . & . & \Pi \\ & & . & . & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & \\ & & & & . & . & . & \\ & & & & & . & . & \\ & & & & & & . & \Sigma \end{array}$$

ut excess. max. sup. 2^{da}. $(\omega\rho - \lambda\psi)$ ad max. $(\omega\rho)$ [ita] prima $\frac{\theta\theta\psi\Delta}{\rho\rho\omega}$ [ad] $\frac{\theta\theta\psi\Delta}{\omega\rho\rho - \rho\lambda\psi}$
series $\Xi \Pi$ vel $\Xi \Sigma$

$$\omega\rho - \lambda\psi \text{ [ad] } \omega\rho \text{ [ita] } \frac{\theta\theta\psi\Delta}{\omega\rho\rho - \rho\lambda\psi} \text{ [ad] } \frac{\omega\theta\theta\psi\Delta}{\omega\omega\rho\rho - 2\omega\rho\lambda\psi + \lambda\lambda\psi\psi}$$

summa omnium ferierum five les + de B

$$a - \frac{\theta\varphi a}{\rho\omega} \propto \frac{\begin{array}{cccc} +B & -A & +A & -B \\ \omega\theta\theta\psi\Delta - \omega\lambda\varphi\rho\Delta + \omega\theta\lambda\psi\Delta - \lambda\varphi\theta\psi\Delta \end{array}}{\omega\omega\rho\rho - 2\omega\rho\lambda\psi + \lambda\lambda\psi\psi} \text{ } ^2). \text{ Regula.}$$

$$\text{fit } \frac{\omega\theta\theta\psi}{\omega\omega\rho\rho - 2\omega\rho\lambda\psi + \lambda\lambda\psi\psi} \propto \xi$$

$$a - \frac{\theta\varphi a}{\rho\omega} \propto \xi\Delta - \frac{\lambda\varphi\rho\xi\Delta}{\theta\theta\psi} + \frac{\lambda\xi\Delta}{\theta} - \frac{\lambda\varphi\xi\Delta}{\theta\omega}. \text{ bon. Regula eadem.}$$

$$a - \frac{1}{4}a^3 \propto \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \propto \frac{1}{9}\Delta \quad a \propto -\frac{4}{27}\Delta$$

¹⁾ Pour comprendre les calculs qui suivent, il suffira de considérer le „Theorema” de la p. 106 et l’algorithme dont Huygens s’est servi à cette page pour la sommation de la suite des „+ de B”.

²⁾ Comparez l’équation „ $a \propto -\frac{\lambda b}{\varphi} + \frac{\theta k}{\varphi}$ ” de la p. 110.

³⁾ Application au problème de croix ou pile qu’on trouvera formulé au début de l’Appendice V, p. 116. Il est clair que la solution de ce problème peut être obtenue au moyen de la règle générale précédente en posant $\theta = \lambda = \varphi = \psi = 1$, et par suite $\rho = \omega = 2$.

$$\frac{7}{9}a^4) \propto \frac{24}{49}\Delta - \frac{9}{49}\Delta + \frac{12}{49}\Delta - \frac{4}{49}\Delta \propto \frac{23}{49}\Delta \quad a \propto \frac{207}{343}\Delta$$

$$\lambda \propto 1; \theta \propto 10; \varphi \propto 10; \psi \propto 11; \rho \propto 11 \propto \lambda + \theta; \omega \propto 21 \propto \varphi + \psi$$

$$a \propto \frac{105}{131}\Delta^5)$$

$$\theta \propto 2; \lambda \propto 1; \varphi \propto 2; \psi \propto 3; \rho \propto 3; \omega \propto 5$$

$$a \propto \frac{5}{16}\Delta^6)$$

⁴⁾ Application au problème traité dans l'Appendice III, p. 102, où $\theta = 2$, $\lambda = 1$, $\varphi = 1$, $\psi = 2$, donc $\rho = \omega = 3$.

⁵⁾ Voir sur ce problème une lettre de Huygens à Hudde du 7 juillet 1665, p. 393 du T. V.

⁶⁾ Lisez $\frac{5}{11}\Delta$. On ne rencontre ce problème nulle part dans les lettres échangées entre Huygens et Hudde, ni ailleurs dans la correspondance de Huygens.

APPENDICE V¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

1665.

§ 1²⁾

Jul. 1665

A speelt tegen B werpende met beurten kruys of munt, op conditie dat die munt werpt ieder reys een ducaet sal in setten, maer die kruys werpt sal alles strijcken dat in gefet is, en A sal eerst werpen als noch niets in gefet is. En werdt oock verstaen dat het spel niet eer eyndight dan als er iets in gefet geweest is, en weder ynt getrocken³⁾.

Traduction:

A joue croix ou pile contre B; les deux joueurs jettent tour à tour à condition que celui qui amène pile mettra chaque fois un ducat, mais qui jette croix prendra tout ce qui est mis; et A jettera le premier, alors qu'on n'a encore rien mis. Et il est entendu que le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mise, et enlevée.

¹⁾ Cet Appendice, que nous avons divisé en paragraphes, est emprunté aux p. 63—74 du Manuscrit C. Ces pages étaient numérotées de 19 à 30 par Huygens.

²⁾ Ce paragraphe contient la solution du problème sur le jeu de croix et pile, proposé par Huygens à Hudde dans une lettre du 4 avril 1665; voir les pp. 304 et 308 du T. V. On peut encore consulter sur ce problème les p. 33—34 de l'Avertissement.

³⁾ On peut consulter sur l'adjonction de la dernière phrase qui manquait dans l'énoncé du problème envoyé à Hudde, la p. 422 du T. V, ou bien la p. 34 de l'Avertissement.

⁴⁾ Voir la p. 123.

Zij gestelt dat de geene die moet werpen als van weder zijden noch niets in geset is verliest a , dat is

$$\text{laet hij hebben } \left\{ \begin{array}{l} -a \text{ die } 0 \text{ tegen } 0 \\ +b \text{ die } 0 \text{ tegen } 1 \\ +c \text{ die } 1 \text{ tegen } 1 \\ +d \text{ die } 1 \text{ tegen } 2 \\ +e \text{ die } 2 \text{ tegen } 2 \\ +f \text{ die } 2 \text{ tegen } 3 \\ +g \text{ die } 3 \text{ tegen } 3 \\ +h \text{ die } 3 \text{ tegen } 4 \\ +i \text{ die } 4 \text{ tegen } 4 \\ +k \text{ die } 4 \text{ tegen } 5 \end{array} \right\} \text{ heeft ingeset en hij selfs moet werpen.}$$

(Men soude beter de quaestie voorstellen dat A en B ieder een ducat fouden ingeset hebben. Wanneer de avantagie van A waerd wordt bevonden $\frac{1}{9}$ ducaets. als pag. sequ. werd gerekent ⁴).)

dewijl nu den eenen effen foo veel wint als den anderen verliest, foo heeft dan B, die 0 tegen 0 heeft in geset, den andere moetende werpen, foo veel als $+a$.

Traduction :

Soit supposé que celui qui doit jeter quand rien n'a encore été mis, ni par l'un, ni par l'autre, perd a , c'est à dire :

$$\text{soit l'avantage } \left\{ \begin{array}{l} -a \text{ de celui qui a mis } 0 \text{ contre } 0 \\ +b \text{ ————— } 0 \text{ ——— } 1 \\ +c \text{ ————— } 1 \text{ ——— } 1 \\ +d \text{ ————— } 1 \text{ ——— } 2 \\ +e \text{ ————— } 2 \text{ ——— } 2 \\ +f \text{ ————— } 2 \text{ ——— } 3 \\ +g \text{ ————— } 3 \text{ ——— } 3 \\ +h \text{ ————— } 3 \text{ ——— } 4 \\ +i \text{ ————— } 4 \text{ ——— } 4 \\ +k \text{ ————— } 4 \text{ ——— } 5 \end{array} \right\} \text{ et qui doit jeter.}$$

(Il vaudrait mieux proposer la question en ajoutant la condition que A et B auraient mis chacun un ducat. Alors on trouvera que l'avantage de A vaut $\frac{1}{9}$ ducat, comme nous l'avons calculé à la page suivante ⁴).)

Or, puisque l'un gagne précisément autant que l'autre perd, il s'en suit que l'avantage de B, qui a mis 0 contre 0, l'autre devant jeter, est égal à $+a$. Et de même celui

En van gelijcken die 1 tegen o heeft in gefet en den andere moet werpen, fal hebben $-b$, om dat die werpt heeft $+b$, en foo voorts.

die nu eerst werpt als o tegen o is ingefet, wiens kans werd gesteld $-a$, indien hij kruis werpt, foo heeft hij de felve kans die den anderen tegenwoordigh heeft dat is $+a$; maer indien hij munt werpt foo moet hij 1 tegen o in fetten, en den anderen fal werpen, dat is, foo heeft hij $-b$. Soo is dan $-a \propto 1$ kans tot $+a$ en 1 kans tot $-b$. Ergo $-a \propto \frac{a-b}{2}$, door het 2. voorftel van onfe Rekening in fpelen van geluck ¹). Van gelijcken kan men licht verftaan dat $+b$, dat is de kans van die o tegen 1 heeft ingefet, en felfs moet werpen, is $\propto 1$ kans tot een ducat te hebben, welck zij genoemt Δ , en 1 kans tot $-c$, foodat hierom is $b \propto \frac{\Delta-c}{2}$.

Item is $c \propto 1$ tot Δ en 1 tot $-d$. daerom $c \propto \frac{\Delta-d}{2}$

Item is $d \propto 1$ tot 2Δ en 1 tot $-e$. daerom $d \propto \frac{2\Delta-e}{2}$

Item is $e \propto 1$ tot 2Δ en 1 tot $-f$. daerom $e \propto \frac{2\Delta-f}{2}$

Item $f \propto 1$ tot 3Δ en 1 tot $-g$. daerom $f \propto \frac{3\Delta-g}{2}$

Item $g \propto 1$ tot 3Δ en 1 tot $-h$. daerom $g \propto \frac{3\Delta-h}{2}$

En foo voorts $h \propto \frac{4\Delta-i}{2}$; $i \propto \frac{4\Delta-k}{2}$

Traduction:

qui a mis 1 contre o, l'autre devant jeter, aura $-b$, parce que celui qui jette a $+b$ et ainfi de fuite.

Or, quant à celui qui jette le premier lorsqu'il est mis o contre o, dont l'avantage fut posé $-a$, s'il jette croix il a le même avantage que l'autre a maintenant, c'est-à-dire $+a$; mais s'il jette pile il doit mettre 1 contre o, et l'autre jettera, c'est-à-dire il aura $-b$. Ainfi donc $-a$ est équivalent à une chance d'avoir $+a$ et 1 d'avoir $-b$. Par conféquent $-a \propto \frac{a-b}{2}$, par la deuxième proposition de notre Calcul dans les jeux de hafard ¹). De même on peut concevoir aisément que $+b$, c'est-à-dire l'avantage de celui, qui a mis o contre 1 et qui doit jeter lui-même, est égal à 1 chance de recevoir un ducat, que nous représenterons par Δ , et 1 chance d'avoir $-c$. On a donc $b \propto \frac{\Delta-c}{2}$.

On a de même $c \propto 1$ à Δ et 1 à $-d$. donc $c \propto \frac{\Delta-d}{2}$

.....

Et ainfi de fuite $h \propto \frac{4\Delta-i}{2}$; $i \propto \frac{4\Delta-k}{2}$

Soo is dan $-a \propto \frac{a-b}{2}$

$$\begin{array}{r}
 -\Delta + c \quad ^2) \\
 \hline
 4 \\
 + \Delta - d \\
 \hline
 8 \\
 - 2\Delta + e \\
 \hline
 16 \\
 + 2\Delta - f \\
 \hline
 32 \\
 - 3\Delta + g \\
 \hline
 64 \\
 + 3\Delta - h \\
 \hline
 128 \\
 - 4\Delta + i \\
 \hline
 256 \\
 + 4\Delta - k, \text{ etc.} \\
 \hline
 512
 \end{array}$$

waeruyt blijkt dat

$$-a \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}\Delta - \frac{2}{16}\Delta + \frac{2}{32}\Delta - \frac{3}{64}\Delta + \frac{3}{128}\Delta - \frac{4}{256}\Delta + \frac{4}{512}\Delta - \frac{1}{512}k.$$

Traduction :

On a donc $-a \propto \frac{a-b}{2}$

$$\begin{array}{r}
 -\Delta + c \quad ^2) \\
 \hline
 4 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 + 4\Delta - k, \text{ etc.} \\
 \hline
 512
 \end{array}$$

d'où il s'enfuit:

$$-a \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}\Delta - \frac{2}{16}\Delta + \frac{2}{32}\Delta - \frac{3}{64}\Delta + \frac{3}{128}\Delta - \frac{4}{256}\Delta + \frac{4}{512}\Delta - \frac{1}{512}k$$

¹⁾ Voir la p. 65 du présent Tome ; mais il s'agit plutôt de la première Proposition, p. 63.

²⁾ Cette notation indique que l'on peut remplacer $-\frac{b}{2}$ par $\frac{-\Delta + c}{4}$.

maer dese laetste quantiteit welke hier is $\frac{1}{512}k$, werd oneijndelijk kleijn indien in infinitum de rye continueert want dewyl men noch foo veel ducaten niet en verliest als men ingeset heeft foo is b minder als een ducaet of Δ en d minder als 2Δ en f minder als 3Δ en h minder als 4Δ en k minder als 5Δ maer den denominator van 't gebroken gaet voort in de dobbele proportie 2, 4, 8, 16, etc. Ergo moet noodsaekelijk, als gefeght is, de laetste quantiteyt, sijnde hier $\frac{1}{512}k$, eijndelijk foo kleijn werden als men wil, en daerom gerekent werden als 0.

$$\text{Ergo } -a \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}\Delta - \frac{2}{16}\Delta + \frac{2}{32}\Delta - \frac{3}{64}\Delta + \frac{3}{128}\Delta - \frac{4}{256}\Delta + \frac{4}{512}\Delta - \frac{5}{1024}\Delta \text{ etc. in infin.}$$

Voorts fiet men hier dat de quantiteyten daer Δ in is en + voorstaet tot die daer — voorstaet sijn als 1 tot 2.

Maer de geene daer — voorstaet kan haar somme doch aldus geschreven werden

Traduction:

mais cette dernière quantité, représentée ici par $\frac{1}{512}k$, devient infiniment petite si la fuite continue indéfiniment, car, puisqu'on ne perd pas encore autant de ducats qu'on a mis, il suit que b est moins qu'un ducat ou Δ , et d moins que 2Δ , et f moins que 3Δ , et h moins que 4Δ , et k moins que 5Δ , mais le dénominateur de la fraction monte dans la proportion double 2, 4, 8, 16, etc. Par fuite il est nécessaire, comme il a été dit, que la dernière quantité, étant ici $\frac{1}{512}k$, devienne finalement aussi petite qu'on le veut: elle doit donc être comptée pour zéro.

$$\text{On a donc } -a \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}\Delta - \frac{2}{16}\Delta + \frac{2}{32}\Delta - \frac{3}{64}\Delta + \frac{3}{128}\Delta - \frac{4}{256}\Delta + \frac{4}{512}\Delta - \frac{5}{1024}\Delta \text{ etc. jusqu'à l'infini.}$$

Ensuite on voit ici que les quantités où Δ entre et qui sont précédées de + sont à celles précédées de — comme 1 est à 2.

Mais, quant à celles qui sont précédées de —, leur somme peut aussi être écrite comme il suit:

$$-\frac{1}{4}\Delta - \frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}\Delta - \frac{1}{256}\Delta - \frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

$$-\frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}\Delta - \frac{1}{256}\Delta - \frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

$$-\frac{1}{64}\Delta - \frac{1}{256}\Delta - \frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

$$-\frac{1}{256}\Delta - \frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

$$-\frac{1}{1024}\Delta \text{ etc.}$$

want dit alles te famen is $\infty - \frac{1}{4}\Delta - \frac{2}{16}\Delta - \frac{3}{64}\Delta - \frac{4}{256}\Delta - \frac{5}{1024}\Delta \text{ etc.}$

In de bovenſte rye nu; dewijl ieder volgende quantiteyt is $\frac{1}{4}$ van de voor
gaende, foo ſijn ſe alle te famen $\frac{4}{3}$ van de voorſte, dat is van $-\frac{1}{4}\Delta$ foo dat ſe
maecken $-\frac{1}{3}\Delta$.

Van gelijcken is de tweede rye $\infty \frac{4}{3}$ van haer voorſte quantiteyt $-\frac{1}{16}\Delta$. En
foo voorts ieder rye $\infty \frac{4}{3}$ van ſijn voorſte quantiteyt foo ſijn dan alle de ryen te

Traduction:

$$-\frac{1}{4}\Delta - \frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}\Delta - \frac{1}{256}\Delta - \frac{1}{1024}\Delta, \text{ etc.}$$

car tout cela enſemble eſt égal à $-\frac{1}{4}\Delta - \frac{2}{16}\Delta - \frac{3}{64}\Delta - \frac{4}{256}\Delta - \frac{5}{1024}\Delta, \text{ etc.}$

Or, dans la fuite ſupérieure, puifque toute quantité qui ſuit eſt $\frac{1}{4}$ de celle qui la
précède, ces quantités feront toutes enſemble $\infty \frac{4}{3}$ de la première, c'eſt-à-dire de $-\frac{1}{4}\Delta$.
Leur ſomme fera donc $-\frac{1}{3}\Delta$.

De même la deuxième fuite eſt $\infty \frac{4}{3}$ de ſa première quantité $-\frac{1}{16}\Delta$. Et ainſi partout,
chaque fuite étant $\infty \frac{4}{3}$ de ſa première quantité. Il en réſulte que toutes les ſuites

famen $\propto \frac{4}{3}$ van de schuijnse rij die bestaat uyt alle de voorste quantiteyten, en welke defelve is met de bovenste rij. Maer dese was $\propto -\frac{1}{3}\Delta$. Ergo al de ryen te famen $\propto \frac{4}{3}$ van $-\frac{1}{3}\Delta$, dat is, gelijk $-\frac{4}{9}\Delta$. Soo sijn dan de quantiteyten van de voorgaende aequatie daer Δ in komt en — voor staet $\propto -\frac{4}{9}\Delta$. maer dese waren tot die daer + voor staet als 2 tot 1. Ergo die met + geteykent sijn doen te famen $+\frac{2}{9}\Delta$. Welcke van die met — afgetrocken resteert $-\frac{2}{9}\Delta$. Soo dat de aequatie is

$$-a \propto \frac{1}{2}a - \frac{2}{9}\Delta$$

$$-3a \propto -\frac{4}{9}\Delta$$

$$a \propto \frac{4}{27}\Delta$$

foo verliest dan A die eerst uitwerpt $\frac{4}{27}$ van een ducet ¹⁾).

Traduction:

ensemble sont égales à $\frac{4}{3}$ de la fuite oblique qui est formée par toutes les premières quantités et qui est identique à la fuite supérieure. Mais cette dernière est égale à $-\frac{1}{3}\Delta$; par conséquent toutes les fuites ensemble sont égales à $\frac{4}{3}$ de $-\frac{1}{3}\Delta$, ce qui fait $-\frac{4}{9}\Delta$. Ainsi donc les quantités de l'équation précédente, où Δ entre et qui sont précédées de —, ont pour somme $-\frac{4}{9}\Delta$; mais celles-ci étaient à celles qui sont précédées de + comme 2 est à 1. Il s'ensuit que celles précédées par + sont ensemble $+\frac{2}{9}\Delta$. Si on les soustrait de celles affectées du signe —, on obtient $-\frac{2}{9}\Delta$.

On a donc l'équation $-a = \frac{1}{2}a - \frac{2}{9}\Delta$, ou bien $-3a = -\frac{4}{9}\Delta$, ou enfin $a = \frac{4}{27}\Delta$, et il s'ensuit que A, qui jette le premier, perd $\frac{4}{27}$ d'un ducat ¹⁾.

$$\begin{aligned}
 -a \text{ of } -\frac{4}{27}\Delta &\propto \frac{2}{27}\Delta - \frac{1}{2}b; b \propto \frac{4}{9}\Delta \\
 -b \text{ of } -\frac{2}{9}\Delta &\propto -\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}c; c \propto \frac{1}{9}\Delta \text{ de kans van die werpt als} \\
 &\text{er een tegen een is ingeset.} \\
 \frac{1}{4}c \text{ of } \frac{1}{36}\Delta &\propto \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}d; d \propto \frac{7}{9}\Delta \\
 -\frac{1}{8}d \text{ of } \frac{7}{72}\Delta &\propto \frac{1}{8}\Delta + \frac{1}{16}e; e \propto \frac{4}{9}\Delta \text{ nota quod } e \propto b.
 \end{aligned}$$

Traduction :

$$\begin{aligned}
 -a \text{ ou } -\frac{4}{27}\Delta &\propto \frac{2}{27}\Delta - \frac{1}{2}b; b \propto \frac{4}{9}\Delta \\
 -\frac{1}{2}b \text{ ou } -\frac{2}{9}\Delta &\propto -\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}c; c \propto \frac{1}{9}\Delta, \text{ avantage de celui qui jette quand} \\
 &\text{on a mis 1 contre 1.} \\
 \frac{1}{4}c \text{ ou } \frac{1}{36}\Delta &\propto \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}d; d \propto \frac{7}{9}\Delta \\
 -\frac{1}{8}d \text{ ou } \frac{7}{72}\Delta &\propto \frac{1}{8}\Delta + \frac{1}{16}e; e \propto \frac{4}{9}\Delta \text{ notez que } e \propto b.
 \end{aligned}$$

¹⁾ Le problème est donc résolu. Ajoutons que quelques pages plus haut dans le même Manuscrit (p. 38—42) on rencontre des calculs, datés du 16 mars 1665, par lesquels Huygens, sans réussir à résoudre le problème, qu'il y appelle „quæstio difficillima”, enferme la valeur a de l'avantage du second joueur B dans des limites de plus en plus rapprochées.

Or, à cause de leur rédaction confuse et incomplète, il aurait été très difficile de reproduire ces calculs. Nous nous bornons donc à en donner un résumé.

Remarquons, à cet effet, que les équations qu'on peut déduire des expressions successives pour $-a$ (p. 119) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{2}a &= -\frac{1}{2}b = -\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}c = -\frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}d = -\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{16}e = -\frac{6}{32}\Delta - \\
 &\quad -\frac{1}{32}f = -\frac{15}{64}\Delta + \frac{1}{64}g = \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
 b &= 3a; c = \Delta - 6a; d = 12a - \Delta; e = 4\Delta - 24a; f = 48a - 6\Delta; g = 15\Delta - 96a; \\
 h &= 192a - 27\Delta; i = 58\Delta - 384a; k = 768a - 112\Delta; l = 229\Delta - 1536a; m = 3072a - \\
 &\quad - 453\Delta; n = 912\Delta - 6144a; o = 12288a - 1818\Delta; p = 3643\Delta - 24576a.
 \end{aligned}$$

Dans ces équations les coefficients de a constituent une suite géométrique et la formation des coefficients de Δ est facilement expliquée par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned}
 4 \times 2 - 2 &= 6 \\
 6 \times 2 + 3 &= 15 \\
 15 \times 2 - 3 &= 27 \\
 27 \times 2 + 4 &= 58, \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Voyons maintenant de quelle manière, entre autres, les deux limites les plus rapprochées

§ 2¹⁾.

Naer dese Rekening is oock licht te verstaen die van de questie pag. 1 voorgestelt²⁾ doch tot meerder verklaring sal dienen het volgende: als er staet 1. — b en 2. + k ³⁾, dat is kortelijck geseght 1 kans tot — b en 2 kanffen tot + k . En foo in al d'andere. δ in dese rekening beteykent een ducaet of 't geen ieder reijse werdt ingeset.

Traduction:

À l'aide du calcul qui précède on comprendra aisément aussi le calcul de la question posée à la p. 1²⁾. Mais ce qui suit servira à expliquer plus en détail ce dernier calcul: lorsque nous écrivons „1. — b et 2. + k ”³⁾, cela exprime brièvement qu'on a „une chance d'avoir — b et deux chances d'avoir + k ”. Et ainsi partout. Dans ce calcul δ représente un ducat, ou bien ce qui se met chaque fois.

ont été obtenues par Huygens. Nous considérons à cet effet d'abord l'avantage n de celui qui jette le premier quand il a mis à l'enjeu 6 ducats contre 6 qui ont été mis par l'autre joueur. Il est clair qu'on aura $n = 3\Delta + \frac{1}{2}(-o)$, et de même $o = 3\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(-p)$; par suite $n = \frac{5}{4}\Delta + \frac{1}{4}p$. Or, on a évidemment $p > n$, puisque l'enjeu est le plus grand dans le cas auquel l'avantage p se rapporte. Il en résulte $n > \frac{5}{4}\Delta + \frac{1}{4}n$ et par conséquent $n > \frac{5}{3}\Delta$; mais $o = 6\Delta - 2n$, donc $o < \frac{8}{3}\Delta$. On en déduit $12288a - 1818\Delta < \frac{8}{3}\Delta$, ou bien $a < \frac{5462}{36864}\Delta$.

En partant de la supposition $q > o$, on peut déduire de la même manière des équations $o = 3\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(-p)$ et $p = 3\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(-q)$ la relation $p < \frac{7}{3}\Delta$, d'où il s'ensuit $3643\Delta - 24576a < \frac{7}{3}\Delta$, ou bien, $a > \frac{5461}{36864}\Delta$.

On trouve donc enfin:

$$\frac{5462}{36864}\Delta > a > \frac{5461}{36864}\Delta.$$

Il est vrai, qu'à la dernière des pages citées du Manuscrit, Huygens vérifie si, en effet:

$$\frac{5462}{36864} > \frac{4}{27} > \frac{5461}{36864};$$

mais ce petit calcul a probablement été ajouté après que la valeur $\frac{4}{27}$ avait été trouvée par une autre méthode.

D'ailleurs Huygens a calculé la limite supérieure $\frac{5462}{36864}\Delta > a$ encore d'une autre manière, c'est-à-dire en employant directement la relation $p > n$, qui peut s'écrire $3643\Delta - 24576a > 912\Delta - 6144a$.

¹⁾ Ce paragraphe contient l'explication des calculs que nous avons reproduits dans l'Appendice III (p. 102 — 107).

De rekening vervolgt pag. 2 en 3 ⁴). In 't begin van pag. 2 blijkt dat a is $\propto \frac{2}{9}a$ en daerenboven al de quantiteijten der 2 neergaende ryen daar δ in komt ⁵). Pag. 3 komt eerft het vervolg van de eerste fuppositien pag. 1 begoft en daer aldaar geen plaats toe en was ⁶). Voorts werden pag. 3 de quantiteijten der rije B pag. 2 daer δ in komt met $+$ daer voor, opgefomt, volgens het theorema boven aen op deze pag. 3 gefelt ⁷). Ende uijt de aengemerckte proportie defer quantiteijten tot die met $-$ geteijckent fijn in de felve rije B, en tot die met $-$ en $+$ ftaen in d'andere rije A, werden defe haere fommen oock gevonden. Waeruijt dan in plaats van de aequatie pag. 2 komt defe $\frac{2}{9}a - \frac{23}{49}\delta \propto a$ en eyndelijck $-a \propto \frac{207}{343}\delta$. dat is te feggen dat $-a$, 't welck was 't geen hadde J. die eerft werpt als noch niets was in gefet, is $\frac{207}{343}\delta$. foo dat al hoewel dit met $-$ gefelt wierdt als of J. verloor, foo vind men nochtans dat hij wint $\frac{207}{343}$ van een ducet.

Traduction:

Le calcul eft continué p. 2 et 3 ⁴). Au commencement de la p. 2 on trouve $a \propto \frac{2}{9}a$ augmenté de toutes les quantités des deux fuites defcendantes où entre δ ⁵). La p. 3 contient en premier lieu la continuation des fuppositions préalables qui commencent à la p. 1 et pour lesquelles il n'y avoit pas affez de place à cette page ⁶). Enfuite les quantités de la fuite B de la p. 2, où entre δ et qui font affectées du figne $+$, font additionnées à la p. 3 à l'aide du théorème qu'on trouve en haut de cette page ⁷). Or, en remarquant la proportion de ces quantités à celles marqués $-$ de la même fuite B et à celles affectées du figne $-$ et du figne $+$ de l'autre fuite A, on détermine auffi les fommen de ces dernières quantités. Il en réfulte qu'on peut remplacer l'équation de la p. 2 par: $\frac{2}{9}a - \frac{23}{49}\delta \propto a$ et enfin par $-a \propto \frac{207}{343}\delta$. Ce qui veut dire que $-a$, c'est-à-dire l'avantage de J. qui jette le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu, eft égal à $\frac{207}{343}\delta$. Ainfi, quoique cet avantage fût fupposé être négatif, c'est-à-dire que ce ferait J. qui perdrait, on trouve néanmoins qu'il gagne $\frac{207}{343}$ d'un ducat.

²) Voir la p. 102 du présent Tome.

³) Voir la p. 103.

⁴) Voir les p. 104—107.

⁵) Voir à la p. 104 l'équation $a \propto \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}k$ et à la p. 105 les expressions pour $\frac{1}{3}b$ et $-\frac{2}{3}k$.

⁶) Voir les notes 4 et 5 de la p. 103.

⁷) Voir la p. 106.

§ 3 ¹⁾.

Pag. 10 ²⁾) wordt het getal der schijven van B gestelt $\propto \omega$ en daer van φ witte en ψ swarte; zoo dat $\varphi + \psi \propto \omega$. Dese questie is eerst volgens het voorgestelde ³⁾) berekent op pag. 10. 11. 12. ⁴⁾) alwaer de proportie van φ tot ψ gedetermineert wordt door dese aequatie $\varphi \propto \frac{1}{6}\psi + \sqrt{37\psi\psi}$ ⁵⁾) soo dat se in geen getalen kan gegeven werden ⁶⁾). In de aequatie die begint boven aen pag. 11 is a gelijk aan al de quantiteijten der neergaende 2 rijen daer Δ in komt en daerenboven aan $\frac{2\varphi a}{3\omega}$ staende boven aen de rij geteykent met B ⁷⁾). Maer om dat men

Traduction:

À la p. 10 ²⁾) le nombre des jetons de B fut posé $\propto \omega$, dont φ blancs et ψ noirs; de forte que $\varphi + \psi \propto \omega$. Cette question est résolue d'abord aux p. 10. 11. 12 ⁴⁾) suivant ce qui fut proposé ⁴⁾). La proportion de φ à ψ y est déterminée par l'équation $\varphi \propto \frac{1}{6}\psi + \frac{1}{6}\sqrt{37\psi\psi}$ ⁵⁾), de forte qu'elle ne peut pas être définie par des nombres ⁶⁾). Dans l'équation qui commence en haut de la p. 11, a est égal à toutes les quantités des deux fuites descendantes, où entre Δ , augmentées de l'expression $\frac{2\varphi a}{3\omega}$ qu'on trouve en haut de la fuite marquée B ⁷⁾). Mais, parce qu'on désire que les chances des deux joueurs

¹⁾ Explication des calculs qu'on trouve dans l'Appendice IV, p. 108—115 du présent Tome.

²⁾ Voir la p. 109.

³⁾ C'est-à-dire suivant la manière dont le problème fut posé par Hudde qui suppose que le joueur A doit choisir entre 2 jetons blancs et 1 noir; comparez les notes 1 et 2 de la p. 108.

⁴⁾ Voir le § 1 (p. 108—113) de l'Appendice IV, où l'on doit substituer partout $\theta = 2$, $\lambda = 1$ pour retrouver les expressions qui se rapportent au problème tel qu'il fut posé par Hudde.

⁵⁾ Lisez: $\frac{1}{6}\psi + \frac{1}{6}\sqrt{37\psi\psi}$ et comparez la p. 113 du présent Tome.

⁶⁾ On retrouve cette manière d'indiquer l'incommensurabilité d'un rapport chez Euclide, voir p. e. la „Prop. 7” du „Lib. X”, où on lit: „Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum” (p. 217 de l'édition de 1607 des „Elementa” par Clavius).

⁷⁾ Voir à la p. 111 le premier terme du second membre de la suite pour $\frac{\theta k}{q}$, où il faut toujours substituer $\theta = 2$, $\lambda = 1$, $q = 3$.

de kanffen der 2 speelders gelijkwaardigh begeert, foo is dan $a \propto 0$. En daerom oock defe voornoemde quantiteit $\frac{2\varphi a}{3\omega} \propto 0$; daerom dan deze in de aequatie in fine pag. 11⁸⁾ voor 0 gehouden wordt. Ende is te weten dat in defe aequatie alleen gestelt werden de sommen der quantiteiten daer Δ in komt van beijde de neergaende rijen A en B. Ende dewijl was $a \propto -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}k$ ⁹⁾, en a moet sijn $\propto 0$, foo moet dan oock $-\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}k$ sijn $\propto 0$, of $\frac{1}{3}b \propto \frac{2}{3}k$. daerom dan de plussen en minussen der quantiteiten met Δ der rijen A, nae dat haere teijckens in contrarie verandert sijn, moeten gelijk sijn aen de plussen en minussen der quantiteiten Δ der rijen B. gelijk gestelt werd in de aequatie in fine pag. 11. welke aequatie vervolgt pag. 12¹⁰⁾.

Op de selfde pag. 10 en 11 werd begonnen de Rekening van de voorgaende questie in 't generael. foo dat in plaets van het getal der schijven daer A uijt treckt te weten 3 werdt gestelt ρ , en het getal der witte schijven 2 $\propto \theta$, en der swarte 1 $\propto \lambda$. Soo dat $\theta + \lambda \propto \rho$. En tot dese rekening behooren de quantiteiten die

Traduction:

foient égales, on a donc $a \propto 0$. Et, par suite, on a aussi $\frac{2\varphi a}{3\omega} \propto 0$. C'est pourquoi cette expression est supposée égale à zéro dans l'équation qu'on trouve au bas de la p. 11⁸⁾. Et l'on remarquera que cette équation contient seulement les sommes des quantités, où entre Δ , des suites descendantes A et B. Et parce qu'on avait $a \propto -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}k$ ⁹⁾ et que a doit être $\propto 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir aussi $-\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}k \propto 0$, ou bien $\frac{1}{3}b \propto \frac{2}{3}k$. Par conséquent, tous les + et les - des quantités, contenant Δ , de la suite A doivent être égaux après changement de signe aux + et aux - des quantités, contenant Δ , de la suite B, comme nous l'avons posé dans l'équation au bas de la p. 11, laquelle équation est reprise à la p. 12¹⁰⁾.

Aux mêmes pag. 10 et 11 on a commencé le Calcul de la question générale, d'après laquelle le nombre des jetons, à savoir 3, dont A tire le sien, fut posé $\propto \rho$, et le nombre des jetons blancs (étant 2) $\propto \theta$, et des noirs (étant 1) $\propto \lambda$; de sorte que $\theta + \lambda \propto \rho$. Et à ce calcul se rapportent les quantités que nous avons entourées de

⁸⁾ Il s'agit de l'équation $-\lambda + \frac{\lambda\varphi\theta}{\theta\psi} \propto \theta - \frac{\lambda\varphi}{\omega}$ (p. 112), ou plutôt de celle qu'on en déduit en posant $\theta = 2, \lambda = 1$.

⁹⁾ Voir la dernière ligne de la p. 110.

¹⁰⁾ Voir aux p. 112—113 les réductions successives de l'équation en question.

pag. 10 en 11 met ringen omgetrocken sijn ¹⁾. En werd vervolght pag. 14 en 15. alwaer den Regel totte generale solutie van dese questie, te weten om de kanfen gelijkwaardigh te maecken gevonden werdt, namentlijk $\varphi\varphi \propto -\psi\varphi + \frac{\theta\theta\psi\varphi}{\lambda\lambda + \lambda\theta} + \frac{\theta\psi\psi}{\lambda}$ ²⁾,

Voorts heb ick oock in 't generael willen rekenen ³⁾, gegeven sijnde het getal der witte en swarte schijven van ieder der 2 speelders, ceteris positis ut prius, hoe haere kanffen staen dat is hoeveel A die eerst werpt verliest of wint. Welcke rekening uyt de voorgaende aequatie pag. 14 ⁴⁾, oock licht gededuceert werdt, moетende nochtans hier soo gevonden werden de sommen der quantiteijten daer Δ in komt met + of— van een der neergaende rijen A of B. Gelijk in dese casus ick gerekent hebbe de plussen der rije B, welcke rekeningh begint pag. 15 in fin. ⁵⁾ en vervolght pag. 16. alwaer dese somme gevonden sijnde door het theorema boven aen pag. 3 ⁶⁾; soo werden voorts daerdoor oock de plussen en minussen der andere quantiteijten met Δ der rijen A en B gevonden, dewijl haere

Traduction:

de cerces aux p. 10 et 11 ¹⁾. Et le calcul est continué aux p. 14 et 15, où la Règle est déduite qui donne la solution générale de cette question, à savoir: de faire en sorte que les chances deviennent égales, c'est-à-dire $\varphi\varphi \propto -\psi\varphi + \frac{\theta\theta\psi\varphi}{\lambda\lambda + \lambda\theta} + \frac{\theta\psi\psi}{\lambda}$ ²⁾.

Ensuite j'ai voulu calculer aussi ³⁾, pour le cas général, quelles sont les chances des deux joueurs quand le nombre des jetons blancs et noirs de chacun des 2 joueurs est donné, ceteris positis ut prius, c'est-à-dire: quel est l'avantage ou le désavantage de A qui jette le premier. Ce calcul peut facilement être déduit de l'équation précédente de la p. 14 ⁴⁾, mais on doit néanmoins chercher alors, pour une des suites descendantes A ou B, la somme des quantités où entre Δ qui sont affectées du signe + ou du signe —. Ainsi j'ai déterminé dans le cas présent les + de la suite B. Ce calcul commence vers la fin de la p. 15 ⁵⁾ et continue à la p. 16, où cette somme est trouvée par le théorème qu'on rencontre en haut de la p. 3 ⁶⁾; on connaît alors aussi les sommes des + et des — des autres quantités des suites A et B, puisque les proportions qu'elles ont les unes aux autres sont connues et indiquées au côté droit

¹⁾ Ce sont ces quantités que nous avons reproduites aux p. 109—114 à l'exclusion de celles qui se rapportent à la solution particulière; voir la note 2 de la p. 108.

²⁾ Voir la p. 112.

³⁾ Il s'agit du § 2 de l'Appendice IV, p. 113—115.

⁴⁾ Voir la dernière ligne de la p. 110.

⁵⁾ Voir le début du § 2 à la p. 113.

⁶⁾ Voir le „Theorema” de la p. 106.

proportiën onder malkander bekend zijn pag. 14. aen de rechter handen ⁷⁾). Waer uijt dan voortkomt den regel pag. 16 in fine ⁸⁾). alwaer de quantiteit $-\frac{\theta\varphi a}{\rho\omega}$ gehaelt is uyt de aequatie pag. 14 init. ⁹⁾ want dese quantiteit hier nu niet en is ∞ o dewijl a geen o en is. De aequatie die desen Regel in fin. pag. 16 begrijpt ⁸⁾ soude misschien kunnen gedivideert werden als men overal voor ρ stelde $\theta + \lambda$ en voor ω , $\varphi + \psi$, welcke volgens 't bovengestelde haer gelijk zijn ¹⁰⁾).

Traduction:

de la p. 14 ⁷⁾). D'où l'on déduit la règle de la p. 16 vers la fin ⁸⁾), où la quantité $-\frac{\theta\varphi a}{\rho\omega}$ provient de l'équation en haut de la p. 14 ⁹⁾). En effet, ici cette quantité n'est plus égale à zéro, puisqu'il n'en est pas ainsi pour a . Peut-être l'équation qui résume cette règle vers la fin de la p. 16 ⁸⁾), pourrait-elle être divisée, si l'on y remplaçait partout ρ par $\theta + \lambda$ et ω par $\varphi + \psi$; quantités qui leur sont égales d'après ce que nous avons posé plus haut ¹⁰⁾).

⁷⁾ Voir la p. 112 après le premier alinéa.

⁸⁾ Voir la première „Regula” de la p. 114.

⁹⁾ L'équation $a \propto -\frac{\lambda b}{\varphi} + \frac{\theta k}{\varphi}$, où $\frac{\theta k}{\varphi} \propto \frac{\theta\varphi a}{\varphi\omega} + \frac{\theta\psi l}{\varphi\omega}$; voir les p. 110—111.

¹⁰⁾ Voir la p. 109. Remarquons que dans le cas qu'une telle division serait possible le numérateur de la fraction qui est égal à $a - \frac{\theta\varphi a}{\delta\omega}$ d'après la première „Regula” de la p. 114 devrait contenir un facteur rationnel, mais qu'il est facile de constater qu'il n'en est pas ainsi.

En effet, si l'on suppose $a = 0$, il faut que ce numérateur soit égal à zéro, c'est-à-dire qu'on ait:

$$\theta\theta\omega\psi - \lambda\varphi\omega\varphi + \theta\lambda\omega\psi - \lambda\theta\varphi\psi = 0.$$

Cette équation doit donc amener, outre les solutions éventuelles qui dépendraient du facteur soupçonné, la solution irrationnelle du problème traité dans le § 1 de l'Appendice IV (p. 108—113). Or, cette dernière solution est exprimée par l'équation qui résume la „Regula” de la p. 112 et qui peut s'écrire:

$$\lambda\varphi\varphi\varphi + \lambda\varphi\varphi\psi - \theta\theta\varphi\psi - \theta\varphi\psi\psi = 0.$$

L'égalité du degré des premiers membres de ces équations par rapport aux quantités $\theta, \lambda, \varphi, \varphi, \psi, \omega$ prouve déjà que le numérateur en question ne contient pas de facteur supplémentaire. D'ailleurs l'identité complète des deux équations est aisément vérifiée en substituant dans la première $\varphi + \psi$ à ω .

§ 4 ¹⁾.

In de questie van kruijs of munt pag. 21. ²⁾ wil men weten hoe veel dat ieder speelder van eersten aen soude moeten in setten, (ieder even veel) om te maecken dat A die voorwerpt soo goede kans soude hebben als B. komt ieder $\frac{2}{3}$ van een ducat ³⁾.

Sit z quod unusquisque deponit ab initio.

A die eerst werpt heeft 1 kans tot z , en 1 kans om in te zetten Δ ⁴⁾ behalven z , en den anderen te laeten werpen 't welck hem waert zij $-c$. Ergo aen B is het waert $+c$. En sal wesen $c \propto 1$ kans tot $\Delta + z$ en 1 kans tot in te setten $\Delta + z$ tegen $\Delta + z$ en laten den andere werpen 't welck aen B waert sij $-d$. En soo voort.

Traduction:

Dans la question de croix ou pile p. 21 ²⁾ on veut savoir combien chaque joueur devrait mettre au début (chacun la même somme), afin que A, qui jette le premier, eût une chance aussi bonne que B. Il vient: chacun $\frac{2}{3}$ d'un ducat ³⁾.

Soit z ce que chacun met dès le commencement.

A, qui jette le premier, a 1 chance d'obtenir z , et 1 chance de mettre Δ ⁴⁾ en plus de sa mise z et de laisser jeter l'autre; ce qui lui vaille $-c$. Par conséquent, cela vaut c à B. Et on aura $c \propto 1$ chance d'obtenir $\Delta + z$ et 1 chance de mettre $\Delta + z$ contre $\Delta + z$ et de laisser jeter l'autre; ce qui vaille $-d$ à B. Et ainsi de suite:

¹⁾ Ce paragraphe, emprunté à la p. 63 du Manuscrit C (numérotée 19 par Huygens), contient la solution d'un problème posé par Huygens dans sa lettre à Hudde du 10 mai 1665; voir la p. 353 du T. V. On peut encore consulter sur ce problème la p. 38 de l'Avertissement.

²⁾ Voir la p. 116.

³⁾ Comparez le haut de la p. 394 du T. V.

⁴⁾ C'est-à-dire „un ducat”.

⁵⁾ Par cette notation Huygens indique qu'on peut remplacer $-\frac{c}{2}$ par $-\frac{\Delta - z + d}{4}$.

⁶⁾ La somme de ces quantités représente la suite „des $-\Delta$ ”, c'est-à-dire des termes négatifs de l'expression pour $-a$.

⁷⁾ Comparez les p. 121—122.

$$\begin{array}{r}
 -a \propto \frac{z-c}{2} \\
 \frac{-\Delta-z+d}{4} \quad s) \\
 \frac{\Delta+z-e}{8} \\
 \frac{-2\Delta-z+f}{16} \\
 \frac{2\Delta+z-g}{32} \\
 \frac{-3\Delta-z+h}{64} \\
 \frac{3\Delta+z-i}{128}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -\frac{1}{4}\Delta - \frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}[\Delta] \\
 -\frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}[\Delta] \\
 -\frac{1}{64}[\Delta]^6) \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{4}{9}\Delta \propto \text{les} - \Delta^7) \\ \frac{2}{9}\Delta \propto \text{les} + \Delta \end{array} \right\} f. \\
 -\frac{2}{9}\Delta \propto \text{les} + \text{et} - \Delta \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{4}[z] \propto \frac{1}{3}z \propto \text{les} - z \\ \frac{1}{6}z \propto \text{les} + z \end{array} \right\} f. \\
 -\frac{1}{6}z \text{ les} + \text{et} - z
 \end{array}$$

Traduction :

$$\begin{array}{r}
 -a \propto \frac{z-c}{2} \\
 \frac{-\Delta-z+d}{4} \quad s) \\
 \frac{3\Delta+z-i}{128}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -\frac{1}{4}\Delta - \frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}\Delta \\
 -\frac{1}{16}\Delta - \frac{1}{64}\Delta \\
 -\frac{1}{64}\Delta^6) \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{4}{9}\Delta \propto \text{les} - \Delta^7) \\ \frac{2}{9}\Delta \propto \text{les} + \Delta \end{array} \right\} f. \\
 -\frac{2}{9}\Delta \propto \text{les} + \text{et les} - \Delta \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{4}z \propto \frac{1}{3}z \propto \text{les} - z \\ \frac{1}{6}z \propto \text{les} + z \end{array} \right\} f. \\
 -\frac{1}{6}z \text{ les} + \text{et} - z
 \end{array}$$

$-a \propto \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}z - \frac{2}{9}\Delta \propto 0$ ¹⁾) nam $-a$ volumus esse $\propto 0$ ut fors utriusque æqualis sit.

$$z \propto \frac{2}{3}\Delta$$

§ 5 ²⁾).

15 Jul. 1665.

Pag. 19 en 20 ³⁾) was getenteert de solutie van dese questie die alhier sal berekent werden, sijnde als volght.

A en B werpen met beurten kruys of munt, op conditie dat die munt werpt een ducaet daer voor ieder reijse sal in setten, maer die kruijs werpt sal ieder reijse daer voor een ducaet trecken als er iets in geset is. En A sal eerst werpen als noch niets is in geset en het spel niet uijt sijn eer er iets in geset is, en men sal soo lang spelen tot alles weder uijtgetrocken is. De vrage is hoe veel A hierdoor verliest. facit $\frac{1}{6}$ van een ducaet.

Traduction:

$-a \propto \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}z - \frac{2}{9}\Delta \propto 0$ ¹⁾) car nous supposons que $-a$ soit zéro, afin que la chance soit égale pour les deux joueurs.

$$z \propto \frac{2}{3}\Delta$$

§ 5 ²⁾).

15 juillet 1665.

Aux p. 19 et 20 ³⁾) nous avons tenté la solution de la question suivante, qui sera résolue ici:

A et B jettent à tour de rôle croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat à l'enjeu, mais celui qui jette croix recevra chaque fois un ducat si quelque chose a été mis. Et A jettera le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu, et le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mis, et l'on jouera jusqu'à ce que tout a été enlevé. On demande quel est le désavantage de A. facit $\frac{1}{6}$ d'un ducat.

¹⁾ C'est-à-dire en supposant que le dernier terme, comme ici $\frac{i}{128}$, s'approche indéfiniment de zéro; comparez la p. 120.

²⁾ Ce paragraphe contient la solution d'un problème dont Huygens et Hudde se sont occupés dans les mois de juillet et d'août 1665; voir la p. 463 du T. V et surtout la note 2 de la même page. On peut encore consulter sur ce problème les p. 38—48 de l'Avertissement.

laet hij hebben	{	$- a$ die o tegen o	}	Ergo die niet en werpt heeft dan $+ a$,
		$+ b$ — o — 1		want dat d'een verliest wint den anderen.
		$+ c$ — 1 — 1		
		$+ d$ — 1 — 2		
		$+ e$ — 2 — 2		
		$+ f$ — 2 — 3		heeft ingeset en hij moet selfs werpen ⁴⁾ .
		$+ g$ — 3 — 3		
		$+ h$ — 3 — 4		
		$+ i$ — 4 — 4		
		$+ k$ — 4 — 5		

zij $\Delta \propto$ een ducat.

$- a \propto 1$ kans tot $+ a$ en 1 kans tot $- b$ ⁵⁾ $b \propto 1$ tot Δ en 1 tot $- c$ ⁶⁾

Ergo $- a \propto \frac{a-b}{2}$; $3a \propto b$

Ergo $b \propto \frac{\Delta-c}{2}$

Traduction :

foit	{	$- a$ l'avantage de celui qui a mis o contre o	}	Par fuite, celui qui ne jette pas a l'avantage
		$+ b$ — — — — — o — 1		$+ a$, car ce que l'un gagne, l'autre le perd.
			et qui doit jeter ⁴⁾
		$+ k$ — — — — — 4 — 5		

Soit $\Delta \propto$ un ducat.

$- a \propto 1$ chance à $+ a$ et 1 chance à $- b$ ⁵⁾ $b \propto 1$ à Δ et 1 à $- c$ ⁶⁾

Par fuite $- a \propto \frac{a-b}{2}$; $3a \propto b$

Par fuite $b \propto \frac{\Delta-c}{2}$

³⁾ Ces pages contiennent des calculs qui correspondent en partie avec ceux qui vont suivre, mais qui n'ont pas été terminés.

⁴⁾ Pour préciser dès l'abord le sens attaché par Huygens aux quantités b, c, d , etc., appelons x_m la part due à celui qui doit jeter le premier, lorsqu'il s'agit de partager, sans terminer la partie, un enjeu $m\Delta$ ($\Delta =$ un ducat), qui s'est formé durant le jeu. On aura alors: $b = x_1$, $c = x_2 - \Delta$, $d = x_3 - \Delta$, $e = x_4 - 2\Delta$, $f = x_5 - 2\Delta$, $g = x_6 - 3\Delta$, $h = x_7 - 3\Delta$, $i = x_8 - 4\Delta$, $k = x_9 - 4\Delta$. Au contraire les avantages (pris dans le sens de Huygens) de l'autre joueur seront respectivement $b' = (\Delta - x_1) - \Delta$ (puisque on doit retrancher le ducat mis par lui même) $= -b$; $c' = (2\Delta - x_2) - \Delta = -c$; $d' = (3\Delta - x_3) - 2\Delta = -d$; $e' = (4\Delta - x_4) - 2\Delta = -e$, etc; voir toutefois les p. 43—47 de l'Avertissement, où il est montré que l'hypothèse que la somme des espérances des deux joueurs est égale à la mise totale est sujette à caution à cause de la possibilité que le jeu se continue indéfiniment sans que la mise soit épuisée. Mais ici et dans les notes qui suivent nous accepterons cette hypothèse sans laquelle les raisonnements de Huygens perdent leur validité.

⁵⁾ C'est-à-dire à b' ; mais $b' = -b$.

⁶⁾ Puisqu'on a $c' = -c$.

Voorts is $c \propto$ een kans om te hebben $\Delta - b$ en 1 tot $-d$, waer van de reden is dese, dat die kruijs werpt als er 1 tegen 1 staet, kan bedacht werden te trekken de Δ ofte ducaet die den anderen heeft ingeset, en sijne eijghene te laten staen, te weten 1 tegen 0, en den anderen moet werpen, 't welck hem die niet en werpt $-b$ weerd is. foo heeft hij dan 1 kans tot $\Delta - b$, en 1 tot $-d$ dat is om 2 tegen 1 in te setten en den anderen te laten werpen. daerom dan is $c \propto \frac{\Delta - b - d}{2}$.

Van gelijcken is $d \propto$ 1 tot $\Delta - c$ en 1 tot $-e$; daerom $d \propto \frac{\Delta - c - e}{2}$

En foo werden dese volgende mede voort gevonden ¹⁾ $e \propto \frac{\Delta - d - f}{2}$

$$f \propto \frac{\Delta - e - g}{2}$$

$$g \propto \frac{\Delta - f - h}{2}$$

$$h \propto \frac{\Delta - g - i}{2}$$

$$i \propto \frac{\Delta - h - k}{2}$$

$$k \propto \frac{\Delta - i - l}{2}$$

Traduction :

Ensuite c est égale à une chance d'avoir $\Delta - b$ et 1 d'avoir $-d$, pour la raison que celui qui jette croix quand il y 1 contre 1 à l'enjeu peut être estimé avoir gagné le ducat que l'autre a mis et laisser son propre ducat à l'enjeu: ce qui est 1 contre 0, l'autre devant jeter, et cela vaut $-b$ à celui qui ne doit pas jeter; de sorte qu'il a donc 1 chance d'avoir $\Delta - b$, et 1 d'avoir $-d$, c'est-à-dire: de mettre 2 contre 1 et de laisser jeter l'autre.

C'est pourquoi $c \propto \frac{\Delta - b - d}{2}$.

De même $d \propto$ 1 à $\Delta - c$ et 1 à $-e$; ainsi $d \propto \frac{\Delta - c - e}{2}$ et de la même façon on trouve ensuite ¹⁾ $e \propto \frac{\Delta - d - f}{2}$; $f \propto \frac{\Delta - e - g}{2}$; $g \propto \frac{\Delta - f - h}{2}$; $h \propto \frac{\Delta - g - i}{2}$; $i \propto \frac{\Delta - h - k}{2}$; $k \propto \frac{\Delta - i - l}{2}$.

Soo is dan $-a \propto \frac{a-b}{2}$

$$\frac{-\Delta + c}{4}; -\frac{b}{2} \text{ is } \propto \frac{-\Delta + c}{4} \text{ boven gevonden } ^2)$$

$$\frac{+\Delta - b - a}{8}$$

$$\frac{-\Delta + c + e}{16}$$

$$\frac{+\Delta - d - f}{32}$$

$$\frac{-\Delta + e + g}{64}$$

$$\frac{+\Delta - f - h}{128}$$

$$\frac{-\Delta + g + i}{256}$$

$$\frac{+\Delta - h - k}{512}$$

Traduction:

On a donc $-a \propto \frac{a-b}{2}$

$$\frac{-\Delta + c}{4}; \text{ on a trouvé plus haut } -\frac{b}{2} \propto \frac{-\Delta + c}{4} ^2).$$

$$\frac{+\Delta - b - d}{8}$$

$$\frac{-\Delta + c + e}{16}$$

$$\frac{+\Delta - h - k}{512}$$

¹⁾ Sous la réserve que nous avons formulée dans la note 4 de la p. 133, le raisonnement qui conduit aux équations mentionnées est exact. Pour l'appliquer il suffit de supposer que le joueur qui jette croix prend toujours un des ducats qui appartiennent à la mise de l'autre joueur. Toutefois cette supposition peut sembler un peu artificielle. Il n'est donc peut-être pas inutile de faire remarquer que toutes ces équations, quand on y substitue les valeurs de b, c, d , etc. indiquées dans la même note 4 de la p. 133, se réduisent à des cas particuliers de l'équation $x_m = m\Delta - \frac{1}{2}x_{m-1} - \frac{1}{2}x_{m+1}$; équation qui découle de la définition de x_m telle que nous l'avons donnée dans la note citée, puisqu'on a évidemment par suite de cette définition $x_m = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\{(m-1)\Delta - x_{m-1}\} - \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\{(m+1)\Delta - x_{m+1}\}$.

²⁾ Voir la p. 133.

$$\text{dat is } -a \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}d$$

$$\text{maer } d \propto \frac{\Delta - c - e}{2} \text{ en } c \propto \frac{\Delta - b - d}{2}$$

$$\text{Ergo } d \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}d - \frac{1}{2}e$$

$$-\frac{1}{8}d \propto -\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b + \frac{1}{12}e$$

$$\text{wederom is } e \propto \frac{\Delta - d - f}{2} \text{ en } d \propto \frac{1}{3}\Delta + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}e$$

$$\text{Ergo } e \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{6}\Delta - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}e - \frac{1}{2}f$$

$$\frac{1}{12}e \propto \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b - \frac{1}{16}f$$

$$f \propto \frac{\Delta - e - g}{2} \text{ en } e \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}b - \frac{3}{4}f$$

$$\text{Ergo } f \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}b + \frac{3}{8}f - \frac{1}{2}g$$

$$-\frac{1}{16}f \propto -\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b + \frac{1}{20}g$$

Traduction :

$$\text{c'est-à-dire } -a \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}d \quad \text{de même } e \propto \frac{\Delta - d - f}{2} \text{ et } d \propto \frac{1}{3}\Delta + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}e$$

$$\text{mais } d \propto \frac{\Delta - c - e}{2} \text{ et } c \propto \frac{\Delta - b - d}{2} \quad \text{Donc } e \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{6}\Delta - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}e - \frac{1}{2}f$$

$$\text{Donc } d \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}d - \frac{1}{2}e \quad \frac{1}{12}e \propto \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b - \frac{1}{16}f$$

$$-\frac{1}{8}d \propto -\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b + \frac{1}{12}e$$

$$f \propto \frac{\Delta - e - g}{2} \text{ et } e \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}b - \frac{3}{4}f$$

$$\text{Donc } f \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{8}b + \frac{3}{8}f - \frac{1}{2}g$$

$$-\frac{1}{16}f \propto -\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b + \frac{1}{20}g$$

$$g \propto \frac{\Delta - f - h}{2} \text{ en } f \propto \frac{2}{5}\Delta + \frac{1}{5}b - \frac{4}{5}g$$

$$\text{Ergo } g \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{5}\Delta - \frac{1}{10}b + \frac{2}{5}g - \frac{1}{2}h$$

$$\frac{1}{20}g \propto \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b - \frac{1}{24}h$$

$$h \propto \frac{\Delta - g - i}{2} \text{ en } g \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{6}b - \frac{5}{6}h$$

$$\text{Ergo } h \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{12}b + \frac{5}{12}h - \frac{1}{2}i$$

$$-\frac{1}{24}h \propto -\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b + \frac{1}{28}i$$

$$i \propto \frac{\Delta - h - k}{2} \text{ en } h \propto \frac{3}{7}\Delta + \frac{1}{7}b - \frac{6}{7}i$$

$$\text{Ergo } i \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{3}{14}\Delta - \frac{1}{14}b + \frac{3}{7}i - \frac{1}{2}k$$

$$\frac{1}{28}i \propto \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

Traduction.

$$g \propto \frac{\Delta - f - h}{2} \text{ et } f \propto \frac{2}{5}\Delta + \frac{1}{5}b - \frac{4}{5}g$$

$$\text{Donc } g \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{5}\Delta - \frac{1}{10}b + \frac{2}{5}g - \frac{1}{2}h$$

$$\frac{1}{20}g \propto \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b - \frac{1}{24}h$$

$$h \propto \frac{\Delta - g - i}{2} \text{ et } g \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{6}b - \frac{5}{6}h$$

$$\text{Donc } h \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{12}b + \frac{5}{12}h - \frac{1}{2}i$$

$$-\frac{1}{24}h \propto -\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b + \frac{1}{28}i$$

$$i \propto \frac{\Delta - h - k}{2} \text{ et } h \propto \frac{3}{7}\Delta + \frac{1}{7}b - \frac{6}{7}i$$

$$\text{Donc } i \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{3}{14}\Delta - \frac{1}{14}b + \frac{3}{7}i - \frac{1}{2}k$$

$$\frac{1}{28}i \propto \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

Soo is dan $-a \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}d$

$$- \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b + \frac{1}{12}e^{1)}$$

$$\frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b - \frac{1}{16}f$$

$$- \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b + \frac{1}{20}g$$

$$[+ \frac{1}{20}g]$$

$$\frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b - \frac{1}{24}h$$

$$- \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b + \frac{1}{28}i$$

$$\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

Traduction:

On a donc $-a \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}d$

$$- \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b + \frac{1}{12}e^{1)}$$

$$+ \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b + \frac{1}{16}f$$

$$\frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k$$

¹⁾ Cette notation indique qu'on peut remplacer $-\frac{1}{8}d$ par sa valeur, trouvée plus haut à la p. 136.

²⁾ Consultez sur la signification précise de k la note 4 de la p. 133. On peut encore définir $2k - \Delta$ comme la *différence* des espérances mathématiques des deux joueurs dans le cas où ils auraient à partager entre eux un enjeu de neuf ducats suivant les règles du jeu en question. D'autre part $2i$ est égal à la différence des espérances dans le cas où il y a huit ducats à l'enjeu.

A B

$$\begin{aligned}
 \text{dat is } -a \propto & \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b \\
 & - \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b \\
 & + \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b \\
 & - \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b \\
 & + \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b \\
 & - \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b \\
 & + \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k
 \end{aligned}$$

De laetste quantiteit, als hier $\frac{1}{32}k$, wordt infinitè klein, dewijl k^2) niet oneijndigh groot en werdt, om dat als den eenen maer een meer als den anderen

Traduction:

A B

$$\begin{aligned}
 \text{C'est-à-dire } -a \propto & \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{8}b \\
 & - \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{24}b \\
 & + \frac{1}{24}\Delta - \frac{1}{48}b \\
 & - \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{80}b \\
 & + \frac{1}{40}\Delta - \frac{1}{120}b \\
 & - \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{168}b \\
 & + \frac{1}{56}\Delta - \frac{1}{224}b - \frac{1}{32}k
 \end{aligned}$$

La dernière quantité, ici $\frac{1}{32}k$, devient infiniment petite, puisque k^2) ne devient pas infiniment grand, parce que si l'un n'a mis qu'un seul ducat de plus que

ingefet heeft, foo liet men wel dat hij in dit ſpel niet boven 1 of 2 en verliest, maer den divifor, (fijnde hier 32) werd oneindigh groot waffende met 4. Soo dat dan de laetſte quantiteit, (hier $\frac{1}{32}k$), voor 0 moet gerekent werden, als men verſtaet in infinitum voort gegaen te fijn, ende dienvolgens dat $-a$ is $\infty \frac{1}{2}a$ — de rijе onder A — de rijе onder B.

maer in de rijе onder A, fijn al de + gelijk al de —, behalve de bovenſte $-\frac{1}{8}\Delta$. Soo is dan $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta$ — de rijе onder B in infinitum vervolght.

maer de rijе onder B is $\frac{1}{8}$ van deſe rijе $-\frac{1}{1}b - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}b - \frac{1}{10}b - \frac{1}{15}b - \frac{1}{21}b - \frac{1}{28}b$ &c. En deſe rijе is $\infty - 2b$ gelijk hier nae gethoont ſal werden (pag. 28, 29, 30 ¹⁾), fijnde de diviſores van deſe gebrokens de triangulare getallen van

Traduction:

l'autre, il eſt aſſez évident que dans ce jeu il ne perd pas plus que 1 ou 2 ducats, mais le diviſeur (étant ici 32) devient infiniment grand, augmentant chaque fois de 4.

Par conféquent la dernière quantité (ici $\frac{1}{32}k$) doit être comptée pour 0, ſi l'on ſuppoſe

qu'on a continué le calcul juſqu'à l'infini. On trouve donc $-a \infty \frac{1}{2}a$ — la fuite ſous A — la fuite ſous B.

Mais dans la fuite ſous A tous les + ſont égaux à tous les —, à l'exception du premier terme $-\frac{1}{8}\Delta$. On a donc $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta$ — la fuite ſous B qu'on doit continuer juſqu'à l'infini.

Mais la fuite ſous B eſt $\frac{1}{8}$ de la fuite: $-\frac{1}{1}b - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}b - \frac{1}{10}b - \frac{1}{15}b - \frac{1}{21}b - \frac{1}{28}b$ &c. Et cette fuite eſt égale à $-2b$ comme nous le montrerons plus bas (pag. 28, 29, 30 ¹⁾), les diviſeurs de ces fractions étant les nombres triangulaires à com-

¹⁾ Voir le § 6 qui ſuit (p. 144—150) et ſurtout la note 1 de la p. 144.

vooren af. En $\frac{1}{8}$ van $-2b$ is $\infty -\frac{1}{4}b$. Soo is dan

$$-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{4}b$$

$$-6a \infty -\frac{1}{2}\Delta - b; \text{ fed } b \infty 3a. \text{ vid. pag. 25}^2).$$

$$a \infty \frac{1}{6}\Delta.$$

Soo verliest dan A die eerst werpt $\frac{1}{6}$ van een ducat.

Sijnde dan $a \infty \frac{1}{6}\Delta$ en $b \infty 3a$; $b \infty \frac{1}{2}\Delta$ fed $b \infty \frac{\Delta - c}{2}$. vid. pag. 25²).

$\frac{1}{2}\Delta \infty \frac{\Delta - c}{2}$; $\Delta \infty \Delta - c$, $c \infty 0$, foo dat als er 1 tegen 1 instaat de kanfen gelijk

sijn. fed $c \infty \frac{\Delta - b - d}{2} \infty 0$; $\Delta \infty b + d$, en $b \infty \frac{1}{2}\Delta$; $\frac{1}{2}\Delta \infty d$, foo is $d \infty b$ dat is dese kanffen even goet, te weten die van 0 tegen 1 of van 1 tegen 2 ingeset te hebben en te moeten werpen.

Traduction:

mencer par le premier. Et $\frac{1}{8}$ de $-2b$ est $-\frac{1}{4}b$. On a donc $-a \infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}\Delta - \frac{1}{4}b$;

$-6a \infty -\frac{1}{2}\Delta - b$; mais $b \infty 3a$. vid. pag. 25²); $a \infty \frac{1}{6}\Delta$.

A, qui jette le premier, perd donc $\frac{1}{6}$ d'un ducat.

On a donc $a \infty \frac{1}{6}\Delta$ et $b \infty 3a$; $b \infty \frac{1}{2}\Delta$, mais $b \infty \frac{\Delta - c}{2}$. vid. pag. 25²).

$\frac{1}{2}\Delta \infty \frac{\Delta - c}{2}$; $\Delta \infty \Delta - c$, $c \infty 0$; ainsi, si l'on a mis 1 contre 1 les chances sont égales.

Mais $c \infty \frac{\Delta - b - d}{2} \infty 0$; $\Delta \infty b + d$, et $b \infty \frac{1}{2}\Delta$; $\frac{1}{2}\Delta \infty d$, par suite $d \infty b$, c'est-à-dire: ces chances sont égales; favoir: celle qu'on a lorsqu'on a mis 0 contre 1 ou 1 contre 2 et qu'on doit jeter.

²) Voir la p. 133.

fed $d \propto \frac{\Delta - c - e}{2}$; $\frac{1}{2}\Delta \propto \frac{\Delta - c - e}{2}$, fed $c \propto 0$; $\frac{1}{2}\Delta \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}e$, $e \propto 0$; foo dat als er 2 tegen 2 in staet de kanssen wederom gelijk fijn.

fed $e \propto \frac{\Delta - d - f}{2}$; Ergo $\frac{\Delta - d - f}{2} \propto 0$; Ergo $\Delta \propto d + f$ fed $d \propto \frac{1}{2}\Delta$; $\frac{1}{2}\Delta \propto f$. Ergo $f \propto d \propto b$.

En foo konnen voorts oock d'andere kanssen gevonden werden sijnde overhands $\propto 0$ en gelijk $\frac{1}{2}\Delta$ ¹⁾.

Men moest sien of men in dese questie door korter wegh tot seecker besluit zoude konnen geraecken, 't welck soude fijn indien men besluiten konde dat als er 1 tegen 1 ingeset is de kanssen gelijk fijn ²⁾. Siet pag. præced ³⁾.

Traduction:

Mais $d \propto \frac{\Delta - c - e}{2}$, $\frac{1}{2}\Delta \propto \frac{\Delta - c - e}{2}$; mais $c \propto 0$; $\frac{1}{2}\Delta \propto \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}e$; $e \propto 0$; de sorte que s'il y a 2 contre 2 à l'enjeu les chances sont de nouveau égales.

Mais $e \propto \frac{\Delta - d - f}{2}$; par suite $\frac{\Delta - d - f}{2} \propto 0$; donc $\Delta \propto d + f$, mais $d \propto \frac{1}{2}\Delta$ $\frac{1}{2}\Delta \propto f$. Donc $f \propto d \propto b$.

Et l'on peut trouver ensuite les autres chances de la même manière. Elles sont alternativement $\propto 0$ et égales à $\frac{1}{2}\Delta$ ¹⁾.

Il faudrait examiner si dans cette question on ne pourrait pas arriver à un résultat certain par une voie plus courte. Cela ferait ainsi si l'on pouvait conclure que les chances sont égales quand on a mis 1 contre 1 ²⁾. Voir la page précédente ³⁾.

¹⁾ Comparez la note 4 de la p. 41 de l'Avertissement.

²⁾ On peut, en effet, arriver à cette conclusion par une voie très courte. Reprenons à cet effet les notations de la note 4 de la p. 133. Soit donc x_2 l'espérance mathématique du joueur qui doit jeter (c'est à-dire la part qui lui est due des deux ducats qui se trouvent à l'enjeu) et soit A ce joueur. On peut partager le jeu en deux périodes dont la première s'étend jusqu'au moment où pour la première fois l'enjeu est réduit à un seul ducat. La deuxième période s'étend depuis cet instant jusqu'à la fin du jeu, et il est évident que l'espérance mathématique totale x_2 est égale à la somme des espérances mathématiques partielles concernant les deux périodes. Or, l'espérance concernant la première période est la même que s'il n'y avait qu'un seul ducat à l'enjeu et que l'on jouât jusqu'à l'épuisement de l'enjeu; elle est donc égale à x_1 . Quant à la deuxième période, il est sûr que lorsqu'elle commence ce sera B qui doit jeter (puisque c'est toujours son tour de jeter quand le nombre des ducats à l'enjeu est impair). L'espé-

De kanssen van 2 of meer speelders sijn gelijk ofte evenwaerdich, als het spel foodanigh is dat, even geluckigh spelende tot het eijnde van 't spel, niemandt winnen kan noch verliezen: Ende dat een selfde exces van geluck aen d'een of d'ander evenveel gewin of avantage toebrengen soude.

Hier uijt volght dat als in 't spel daer van hier gehandelt werdt, 1 tegen 1 ingeset is, (want als A kruijs werpt en B mede, soo treckt elk een en het spel is uijt ⁴⁾) of 2 tegen 2, of 3 tegen 3, &c. dat dan de kanssen van de speelders A en B gelijk sijn ⁵⁾). Nu als 0 tegen 0 ingeset is, en A moet eerst spelen, soo is sijn verlies gestelt te zijn $-a \infty < \begin{matrix} 1 \text{ kans tot } +a \text{ als hij kruijs werpt} \\ 1 \text{ kans tot } -b \text{ als hij munt werpt} \end{matrix}$ en derhalve Δ moet infetten

maar $-b$ is $< \begin{matrix} 1 \text{ kans tot } -\Delta \text{ als B komt kruijs te werpen.} \\ 1 \text{ kans tot } 0 \text{ dat is noch winst noch verlies, als B munt werpt en } 1 \text{ tegen } 1 \text{ moet infetten.} \end{matrix}$

Traduction:

Les chances de 2 ou de plusieurs joueurs sont égales ou équivalentes si le jeu est tel que lorsqu'on joue jusqu'à la fin avec un succès égal personne ne gagne ni ne perd: Et qu'un même excès de bonne chance apporte autant de gain ou d'avantage à l'un qu'il en apporte à l'autre.

Il en résulte que si, dans le jeu dont nous traitons ici, on a mis 1 contre 1 (car si A jette croix et B de même, chacun prend un ducat et le jeu est fini ⁴⁾) ou 2 contre 2, ou 3 contre 3, etc., qu'alors les chances des joueurs A et B sont égales ⁵⁾). Or, si l'on a mis 0 contre 0 et que A doit jouer le premier, nous avons posé pour la perte:

$-a \infty < \begin{matrix} 1 \text{ chance à } +a \text{ s'il jette croix} \\ 1 \text{ chance à } -b \text{ s'il jette pile et qu'il doit donc mettre } \Delta; \end{matrix}$

mais $-b$ est $< \begin{matrix} 1 \text{ chance à } -\Delta \text{ si B vient à jeter croix.} \\ 1 \text{ chance à } 0, \text{ c'est-à-dire gain ni perte, si B jette pile et qu'il doit mettre } 1 \text{ contre } 1. \end{matrix}$

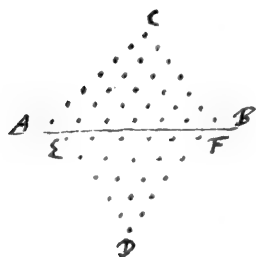
rance de B sera donc x_1 , et $\Delta - x_1$ celle de A. Par suite, $x_2 = x_1 + \Delta - x_1 = \Delta$. L'avantage de A, dans le sens que Huygens y attache, est donc $c = x_2 - \Delta = 0$; ce qu'il fallait prouver.

³⁾ Le raisonnement qui va suivre fut écrit par Huygens sur la page précédente du Manuscrit dans un espace qui jusque là était resté vide.

⁴⁾ Cette phrase se trouve en marge du Manuscrit.

⁵⁾ Ce raisonnement n'a pu entièrement satisfaire Huygens. Il nous semble qu'on doit plutôt considérer cette partie de la présente Pièce comme une annotation provisoire sur laquelle il y aurait lieu peut-être de revenir. Comparez d'ailleurs les p. 43—48 de l'Avertissement, et surtout la note 1 de la p. 46, où nous avons voulu montrer qu'en effet les chances des deux joueurs sont égales dans les cas mentionnés, mais que l'enjeu doit être considéré comme perdu pour eux s'ils appliquent, sans en déroger en aucun cas, les règles du jeu, telles qu'elles sont formulées à la p. 132.

Soo is $-b \propto -\frac{1}{2}\Delta$. Ergo $-a \propto \frac{1 \text{ tot } +a}{1 \text{ tot } -\frac{1}{2}\Delta}$. Ergo $-a \propto \frac{a - \frac{1}{2}\Delta}{2}$. Ergo $3a \propto \frac{1}{2}\Delta$. En $a \propto \frac{1}{6}\Delta$. Even als in d'andere solutie.

§ 6¹⁾.

1. Om den triangel van een gegeven getal te vinden soo addeert men het getal tot sijn quadraet, en de helft der somme is den gesochten triangel twelck uijt dese figuur blijkt, want als men tot het getal ACBD, sijnde het quadraet des getals AB, noch eens bij doet het getal der rijen AB, soo heeft men 2 mael het getal des triangels ACB, daerom de helft der voorzegde somme moet wesen gelijk den triangel ACB, welck is den triangel des getals AB. Sijnde dan x de sijde soo is den triangel $\frac{xx+x}{2}$.

Traduction :

Donc $-b \propto -\frac{1}{2}\Delta$. Par suite $-a \propto \frac{1 \text{ à } a}{1 \text{ à } -\frac{1}{2}\Delta}$. Donc $-a \propto \frac{a - \frac{1}{2}\Delta}{2}$. Donc $3a \propto \frac{1}{2}\Delta$.

Et $a \propto \frac{1}{6}\Delta$. Comme dans l'autre solution.

§ 6¹⁾.

1. Pour trouver le triangle d'un nombre donné on ajoute ce nombre à son carré; la moitié de cette somme est le triangle cherché ainsi qu'il résulte de la figure à côté, car si l'on ajoute au nombre ACBD, c'est-à-dire au carré du nombre AB, encore une fois le nombre de la ligne AB, on a deux fois le nombre du triangle ACB. Par suite, la moitié de la somme prémentionnée doit être égale au triangle ACB qui est le triangle du nombre AB. Soit donc x le côté, alors le triangle est $\frac{xx+x}{2}$.

¹⁾ Ce paragraphe apprend à sommer la suite des valeurs réciproques des nombres triangulaires. Nous n'avons pas voulu le supprimer puisqu'il fait connaître la manière dont cette somme a été obtenue par Huygens; mais on sait qu'on l'obtient bien plus facilement en remarquant que

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \text{ et que, par conséquent, la suite se réduit à } 1 + 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} \text{ etc.}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{120}$

2. dese rij van gebroocken getallen sijnde foo danigh dat al de tellers sijn 1, en de noemers de achtereenvolgende triangulen van de getallen daer boven geschreven beginnende van 1 en met 1 opgaende: indien men eenighe 2 achtereenvolgende defer gebroockens te samen addeert, nemende tot voorste foo een wiens noemer is den triangel van een even getal; foo sal de somme gelijk sijn aen de helft van het gebroocken defer rij wiens noemer den triangel is van de helft der sijde welckers triangel was den noemer van het voorste der 2 geaddeerde gebroockens. bij exempel adderende de gebroockensdefer rij $\frac{1}{55}$ en $\frac{1}{66}$,

foo sal haer somme sijn $\frac{1}{30}$, dat is de helft des gebroockens $\frac{1}{15}$, wiens noemer 15 den triangel is van 5, sijnde de helft van 10, wiens triangel 55 is den noemer des eersten der 2 gebroockens. want laet de sijde des noemers van 't eerste gebroken sijn ∞x , foo is sijn triangel, dat is, den noemer des eersten gebroockens,

Traduction:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{120}$

2. Cette suite de nombres fractionnaires est telle que tous les numérateurs sont égaux à l'unité, et que les dénominateurs sont les nombres triangulaires successifs des nombres qu'on a écrit au-dessus, en commençant par 1 et augmentant chaque fois de 1: si de ces fractions on en additionne deux successives, dont la première est telle que le dénominateur est le triangle d'un nombre pair, alors la somme sera égale à la moitié d'une fraction de la même suite, dont le dénominateur est le triangle de la moitié du nombre duquel le triangle constitue le dénominateur de la première des deux fractions qu'on a additionnées. Par exemple, en additionnant les fractions $\frac{1}{55}$ et $\frac{1}{66}$, appartenant à

cette suite, leur somme sera $\frac{1}{30}$, c'est-à-dire la moitié de la fraction $\frac{1}{15}$, dont le dénominateur est le triangle de 5, c'est-à-dire de la moitié de 10 dont le triangle 55 est le dénominateur de la première des 2 fractions; car: soit le côté du triangle qui constitue le dénominateur de la première fraction ∞x , alors son triangle, c'est-à-dire le

$\propto \frac{xx+x}{2}$ en het eerste gebroken dan $\frac{2}{xx+x}$. Voorts sal de sijde des noemers van 't volgende gebroken sijn $x+1$, en daerom sijn triangel, dat is den noemer des 2^{den} gebrokens $\propto \frac{xx+3x+2}{2}$. En dienvolgens het volgende gebroken $\propto \frac{2}{xx+3x+2}$. om tot het welck te adderen het eerste gebroken $\frac{2}{xx+x}$, foo is den gemeenen noemer $x^3+3xx+2x$ ende haer somme $\propto \frac{4x+4}{x^3+3xx+2x}$, dat is $\frac{1}{\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}x}$. Nemende nu $\frac{1}{2}x$ voor sijde, welck een heel getal sal sijn, dewijl x een even getal gestelt werdt, foo is sijn triangel $\propto \frac{\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}x}{2}$ ofte $\frac{1}{8}xx+\frac{1}{4}x$. Ende diensvolgens $\frac{1}{\frac{1}{8}xx+\frac{1}{4}x}$ sal sijn het gebroken, wiens noemer den triangel is

Traduction

dénominateur de la première fraction, est égal à $\frac{xx+x}{2}$ et la première fraction à $\frac{2}{xx+x}$. Puis le côté du dénominateur de la fraction qui suit fera $x+1$. Donc son triangle, qui est le dénominateur de la seconde fraction, fera $\frac{xx+3x+2}{2}$. Par conséquent la fraction qui suit fera $\frac{2}{xx+3x+2}$. Afin de faire l'addition de cette fraction à la première $\frac{2}{xx+x}$, on remarquera que leur dénominateur commun est $x^3+3xx+2x$ et leur somme $\frac{4x+4}{x^3+3xx+2x}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}x}$. Or, en prenant le côté égal à $\frac{1}{2}x$, ce qui représentera un nombre entier puisque x a été supposé pair, son triangle est $\frac{\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}x}{2}$ ou $\frac{1}{8}xx+\frac{1}{4}x$. Par suite $\frac{1}{\frac{1}{8}xx+\frac{1}{4}x}$ constituera la fraction dont le dénominateur est le

van de helft der sijde x , welckers triangel was den noemer des eerste gebrokens $\frac{2}{xx+x}$. nu is oock $\frac{1}{\frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}x}$, de gevonden fomme der 2 gebrokens gelijk de

helft van $\frac{1}{\frac{1}{8}xx + \frac{1}{4}x}$, quod erat demonst.

3. Indien men nu oock een rij van gebroockens stelt die proportionael sijn tot die van de voorgaende triangulare rij, het is seecker, dat gelijk de fomme van 2 aan een volgende der triangulare rij gelijk is aan de helft van het gebroken in 't voorgaende voorstel gefeght, alsoo oock de fomme der 2 proportionale der selve 2 gebrokens, gelijk sal sijn aan de helft van het proportionale des gefejden gebrokens.

Bij exempel dewijl $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ sijn ∞ de helft van $\frac{1}{3}$, dat is
 $\frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15}$ gelijk $\frac{1}{6}$, so sal oock in de onderfte proportionale rij
 $\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{60}$ wesen $\frac{1}{40} + \frac{1}{60} \infty$ de helft van $\frac{1}{12}$ dat is gelijk $\frac{1}{24}$.

Traduction:

triangle de la moitié du côté x dont le triangle était le dénominateur de la première fraction $\frac{2}{xx+x}$. Or, en effet, $\frac{1}{\frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}x}$, c'est-à-dire la somme des deux fractions, est

égale à la moitié de $\frac{1}{\frac{1}{8}xx + \frac{1}{4}x}$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Si maintenant on forme de même une suite de fractions qui sont proportionnelles à celles de la suite triangulaire précédente, il est certain que, puisque la somme de deux fractions successives de la suite triangulaire est égale à la moitié de la fraction indiquée plus haut, la somme des 2 fractions proportionnelles aux 2 dites fractions sera égale à la moitié de la fraction proportionnelle à la fraction susdite.

Par exemple, puisque $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} \infty$ la moitié de $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{6}$, on aura aussi dans la suite proportionnelle inférieure $\frac{1}{40} + \frac{1}{60} \infty$ la moitié de $\frac{1}{12}$, c'est-à-dire égal à $\frac{1}{24}$.

4. In de rij der gebroockens welckers noemers sijn de achter een volgende triangulare getallen en de tellers alle 1, is de somme der gansche rij in infinitum gelijk 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Eerste rij	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{120}$
tweede rij		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$	
derde rij					$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{12}$				$\frac{1}{24}$		
4 ^{de} rij										$\frac{1}{8}$					

Zij genomen de eerste deser rijen in infinitum te gaen. En laet de 2^e rij bestaan uijt de sommen der gebroockens der eerste rij, genomen 2 aan 2, van welke twee ieder minste sijn noemer sij den triangul van een even getal. Soo sijn dan de getalen der 2^e rij, door het 2^e voorstel ¹⁾, ieder de helft der getalen van de eerste

Traduction :

4. Dans la suite des fractions dont les dénominateurs sont les nombres triangulaires successifs et les numérateurs tous 1, la somme de la suite totale prolongée jusqu'à l'infini est égale à 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
première suite	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{120}$
deuxième suite		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$	
troisième suite					$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{12}$				$\frac{1}{24}$		
4 ^e suite										$\frac{1}{8}$					

Supposons que la première suite continue jusqu'à l'infini et que la deuxième suite se compose des sommes des fractions de la première suite, prises 2 à 2, de manière que le plus petit dénominateur de chaque couple soit le triangle d'un nombre pair. Alors les nombres de la deuxième suite sont, d'après la seconde proposition ¹⁾, les moitiés

¹⁾ Voir, à la p. 145, l'alinéa numéroté 2.

rije, als men de evenveelfte in de order neemt. laet men wederom de 3^{de} rije be-
staen uijt de sommen der getallen van de 2^{de} rije, genomen 2 aen 2, en weder
het eerste overslaende, soo sijn dan, door het derde voorstel ²⁾, de getallen der
3^e rije ieder de helft van de getallen der 2^{de} rije.

En van gelijcken soo de 4^{de} rije bestaet uijt de sommen van ieder 2 getallen
der 3^{de} rije, overslaende het eerste. soo sullen de getallen defer 4^{de} rije ieder de
helft sijn van die van de 3^e rije.

En soo voorts met al de andere leegher rijen in infinitum te bedencken.

Nu soo blijkt dat het eerste getal der tweede rije, te weten $\frac{1}{2}$, is de somme
van de 2 getallen der eerste rije die nae het eerste getal volgen.

En dat het eerste getal der 3^{de} rije is de somme van de 4 volgende getallen der
eerste rije.

En dat het eerste getal der 4^{de} rije is de somme van de 8 volgende getallen der
eerste rije.

En van gelijcken dat het eerste getal der 5^e rije soude sijn de somme van de
16 volgende getallen der eerste rije en soo voort.

Traduction:

des nombres de la première fuite, pris dans le même ordre. Si maintenant la 3^{me} fuite
se compose de nouveau des sommes des nombres de la 2^{me} fuite, pris 2 à 2, en laissant
derechef de côté le premier de ces nombres, les nombres de la 3^{me} fuite seront, d'après
la troisième proposition ²⁾, chacun la moitié des nombres de la 2^{me} fuite.

Et de même, si la 4^{me} fuite se compose des sommes de chaque couple de 2 nombres
de la 3^{me} fuite, laissant de côté le premier, les nombres de cette 4^{me} fuite seront chacun
la moitié de ceux de la 3^{me} fuite. Et de la même manière on traitera toutes les fuites
inférieures jusqu'à l'infini.

Or, il s'enfuit que le premier nombre de la deuxième fuite, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$, est la
somme des 2 nombres de la première fuite qui suivent après le premier nombre.

Et que le premier nombre de la 3^{me} fuite est la somme des 4 nombres suivants de la
première fuite.

Et que le premier nombre de la 4^{me} fuite est la somme des 8 nombres suivants de
la première fuite.

Et de même que le premier nombre de la 5^{me} fuite ferait la somme des 16 nombres
suivants de la première fuite, etc.

²⁾ Voir, p. 146, l'alinéa numéroté 3.

Dewijl dan aldus de eerste getallen der rijen maecken de somme van al de getallen der eerste rij; en dat de selve eerste getallen der rijen ieder de helft bewesen sijn te sijn van het voorgaende, en dienvolgens al te samen in infinitum gelijck aen 2 mael het eerste $\frac{1}{1}$; soo sijn dan oock al de getallen der eerste rij te samen ∞ 2 mael $\frac{1}{1}$ dat is ∞ 2 quod erat dem.

Traduction

Puisque donc les premiers nombres des suites constituent la somme de tous les nombres de la première suite, et qu'on a démontré que ces premiers nombres des suites sont chacun la moitié de celui qui précède, et que, par conséquent, tous ensemble jusqu'à l'infini sont égaux à 2 fois le premier nombre $\frac{1}{1}$, il en résulte que tous les nombres de la première suite ensemble sont aussi ∞ 2 fois $\frac{1}{1}$, c'est-à-dire ∞ 2. Ce qu'il fallait démontrer.

APPENDICE VI ¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK.”

1676.

Aug. 1676.

Quæstio ultima mearum in iis quæ de Ratiociniis in ludo aleæ edidi; proposita olim a Pascali²⁾.

Lufores A et B accepto numero calculorum æquali ludunt tribus tesseris hac conditione ut quoties eveniunt puncta 14, accipiat A calculum unum à B. Quoties vero 11 puncta eveniunt, contra accipiat B unum calculum ab A. Vincat autem qui prior omnes calculos collegerit. Quæritur quantum valeat spes utriusque inter se comparatæ; seu quæ pars debeatur utrique ex eo quod depositum est. Hoc autem idem est ac si, evenientibus 14 punctis, A scribat punctum unum, et, evenientibus 11, B signet itidem punctum unum, et victoria cedat ei qui primus certo punctorum numero alterum superaverit ³⁾.

¹⁾ Dans cette Pièce, qui fut écrite sur une feuille détachée, Huygens essaie de justifier et de généraliser la solution qu'il avait donnée (sans y ajouter l'analyse) du dernier des Exercices qu'on rencontre vers la fin de son Traité (voir la p. 91). Ajoutons qu'il ne réussit pas à démontrer à son entière satisfaction la solution généralisée qu'il trouve par induction.

²⁾ Voir la note 1 de la p. 90.

³⁾ En effet, si n représente le nombre des jetons que chaque joueur possède au commencement du jeu, il est évident que dans les deux suppositions mentionnées le jeu finira aussitôt que le nombre des coups favorables à l'un des joueurs surpasse de n unités celui des coups favorables à l'autre. Cependant on peut faire encore une troisième supposition, équivalente aux deux autres, d'après laquelle à chaque coup favorable le joueur efface un des points obtenus par son adversaire si celui-ci en possède, sauf à marquer un point pour lui-même si l'adversaire n'en possède plus ou pas encore. C'est la supposition choisie par Huygens dans les cas $n = 4$ et $n = 3$ qui suivent (voir encore la note 1 de la p. 152) et ce fut à l'aide de cette même supposition que Pascal formula primitivement le problème que Huygens lui emprunta (voir la p. 493 du T. I).

$$o \text{ ad } o (x) \propto \begin{cases} dd [\text{ad habendum}] 2 \text{ ad } o (y) < dd [\text{ad}] 4 \text{ ad } o (n) \\ cc [\text{ad habendum}] o \text{ ad } 2 (z) < cc [\text{ad}] o \text{ ad } o (x) \\ < dd [\text{ad}] o \text{ ad } o (x) \\ < cc [\text{ad}] o \text{ ad } 4 (o). \end{cases}$$

Est autem hic dd et cc ubi prius d et c , ac de cætero operatio eadem quæ prius. ergo necessario fiet $x \propto \frac{d^4 n}{c^4 + d^4}$. Et spes B ad spem A ut d^4 ad c^4 .

Hinc rursus si vincat qui 8 punctis præverterit, concludetur $x \propto \frac{d^8 n}{d^8 + c^8}$. Atque ita porro si continuo dupletur punctorum numerus.

Verum si vincat qui 3 punctis præcefferit calculus instituendus est hoc modo ²⁾

$$x \propto \begin{cases} d [\text{ad}] 1 \text{ ad } o (l) < dd [\text{ad}] 3 \text{ ad } o (n) \\ c [\text{ad}] o \text{ ad } 1 (k) < cc [\text{ad}] o \text{ ad } 1 (k) \\ < dd [\text{ad}] 1 \text{ ad } o (l) \\ < cc [\text{ad}] o \text{ ad } 3 (o) \end{cases} \quad k \propto \frac{ddl}{dd + cc}$$

$$l \propto \frac{ddn + \frac{ccddl}{dd + cc}}{dd + cc}; \quad ddl + ccl \propto \frac{ddn + \frac{ccddl}{dd + cc}}{dd + cc}$$

$$d^4 l + 2ddccl + c^4 l \propto d^4 n + ccddn + ccddl$$

$$l \propto \frac{d^4 n + ccddn}{d^4 + ddcc + c^4}. \quad \text{Ergo } k \propto \frac{d^4 n}{d^4 + ddcc + c^4}$$

2 points suffisent pour gagner. Si nous partons maintenant de la phase (2,0), il est clair que B, pour gagner, doit pouvoir compter encore une fois deux coups favorables de plus que A. Si ce sera au contraire A qui gagne, le jeu doit passer premièrement par la phase (0,0). Or, les probabilités que l'un de ces événements se réalise avant l'autre sont évidemment dans le même rapport que les probabilités correspondantes au commencement du jeu concernant l'arrivée des phases (2,0) et (0,2); c'est-à-dire elles sont dans le rapport de dd à cc , comme Huygens l'indique dans le calcul en question.

²⁾ On peut comparer au calcul qui suit celui de Hudde (p. 470 du T. V.), qui se rapporte au même cas particulier, où $n = 3$. Remarquons que la méthode de Huygens s'applique à tous les cas où n est divisible par 3, c'est-à-dire en supposant connues les solutions des cas où le nombre des points à obtenir est $\frac{1}{3}n$ ou $\frac{2}{3}n$. Les cas intermédiaires qu'on doit choisir sont alors $(\frac{1}{3}n, 0)$ et $(0, \frac{1}{3}n)$.

$$\begin{aligned}
 x & \begin{cases} d [\text{ad}] l [\infty] \frac{d^4 n + c c d d n}{d^4 + d d c c + c^4} \\ c [\text{ad}] \frac{d^4 n}{d^4 + d d c c + c^4} \end{cases} \quad x \infty \frac{d^5 n + c c d^3 n + c d^4 n}{(d+c) \text{ in } (d^4 + d d c c + c^4)} \text{ div. per } d d + d c + c c \\
 x & \infty \frac{d^3 n}{(d+c) \text{ in } (d d - d c + c c)} \text{ fed hoc } \infty d^3 + c^3 \quad x \infty \frac{d^3 n}{d^3 + c^3}
 \end{aligned}$$

Ergo spes luforis B ad spem A ut d^3 ad c^3 .

Hinc autem rurfus concluditur, si vincat qui 6 punctis præcefferit spem luforis B ad A fore ut d^6 ad c^6 ¹⁾).

¹⁾ De cette manière on peut donc aussi prouver rigoureusement l'exactitude de la solution (244140625 : 282429536481, c'est-à-dire $5^{12} : 9^{12}$) ajoutée à l'Exercice V (p. 91 du présent Tome), où $n = 12$.

²⁾ En effet, avec les ressources mathématiques dont on disposait à l'époque de Huygens, il paraît avoir été difficile d'obtenir une démonstration rigoureuse valable pour le cas où n est un nombre quelconque. Bernoulli n'y réussit pas, car on ne peut pas accepter comme telle le raisonnement vague qu'il présente à ses lecteurs à la p. 70 de son „Ars conjectandi” pour le cas où ceux-ci n'accepteraient pas la conclusion par induction, qu'il fait précéder. De Monmort (voir les p. 222—223 de l'ouvrage cité dans la note 11 de la p. 9 du présent Tome) se contente de traiter le cas $n = 12$, qu'il résoud à l'aide de 22 équations linéaires où entrent comme inconnues les probabilités diverses qui peuvent se présenter durant le jeu. Il est vrai que de Moivre (voir les p. 227—228 de son Mémoire de 1711, ou les p. 44—46 de sa „Doctrine of chances”, cités dans la note 12 de la p. 9) arrive à une solution rigoureuse du problème général à l'aide d'une méthode extrêmement ingénieuse, mais bien artificielle. Afin d'exposer cette méthode, prenons le cas où A possède les trois jetons α, β, γ et B les trois autres δ, ϵ, ζ . On assigne alors à ces jetons respectivement les valeurs $\nu, \frac{c}{d}\nu, \frac{c^2}{d^2}\nu, \frac{c^3}{d^3}\nu, \frac{c^4}{d^4}\nu, \frac{c^5}{d^5}\nu$, où nous supposons $d > c$, et l'on convient qu'à chaque partie en particulier A engagera parmi tous les jetons qu'il possède celui dont la valeur est la plus petite et B de tous ses jetons celui qui a la plus grande valeur. Ces valeurs alors seront toujours dans le rapport de d à c , mais comme les chances des joueurs A et B sont dans le rapport réciproque de c à d , chaque partie en particulier sera une partie équitable, c'est-à-dire où les espérances des joueurs sont égales. Il en doit donc être de même pour le jeu entier, qui finit lorsque l'un des joueurs obtient tous les jetons. Or, puisque les sommes que les joueurs peuvent gagner sont dans le rapport de d^3 à c^3 , il faut que leurs chances soient dans le rapport réciproque de c^3 à d^3 .

Enfin, Struyck (p. 108—110 de l'ouvrage cité dans la note 14 de la p. 9) donne une solution plus directe, que voici: Supposons que les $2n$ jetons soient des pièces de monnaie d'une valeur égale à l'unité, et soit e_p l'espérance mathématique du joueur A lorsqu'il possède p jetons. On a alors $e_p = \frac{c}{c+d} e_{p+1} + \frac{d}{c+d} e_{p-1}$; c'est-à-dire $e_{p+1} =$

$$\begin{aligned}
 &= e_p + \frac{d}{c} (e_p - e_{p-1}). \text{ On en déduit successivement } e_2 = e_1 + \frac{d}{c} e_1; e_3 = e_1 + \frac{d}{c} e_1 + \frac{d^2}{c^2} e_1; \\
 &e_n = \frac{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^n}{1 - \frac{d}{c}} e_1; \quad e_{2n} = 2n = \frac{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^{2n}}{1 - \frac{d}{c}} e_1. \text{ On trouve donc } e_1 = \frac{1 - \frac{d}{c}}{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^{2n}} 2n; e_n =
 \end{aligned}$$

Si numerus punctorum præcessionis sit 5 erit spes B ad A ut d^5 at c^5 , sed hoc rursus calculo opus habet qui paulo longior quam in punctis 3. nec video adhuc qui concludi possit in universum, spes lusorum B ad A esse inter se semper ut potestates d et c numerorum, quæ habeant exponentes æquales numero punctorum quibus alter alterum debet præcedere ²).

$= \frac{c^n}{c^n + d^{2n}}$ et il reste pour l'espérance de l'autre joueur $\frac{d^n}{c^n + d^{2n}}$, d'où il suit que leurs chances au début du jeu étaient dans le rapport de c^n à d^n .

Inutile de dire qu'à l'aide des méthodes modernes la solution générale du problème s'obtient sans aucune difficulté. En représentant par $\varphi(p)$ la probabilité que A gagne le jeu quand le nombre des coups qui ont été favorables à A, diminué de celui des coups favorables à B, est devenu égal à p , il ne s'agit que de résoudre l'équation fonctionnelle $c\varphi(p+1) - (c+d)\varphi(p) + d\varphi(p-1) = 0$ sous les conditions $\varphi(n) = 1$, $\varphi(-n) = 0$. On trouve pour la solution générale de cette équation $\varphi(p) = C\left(\frac{d}{c}\right)^p + C'$ et, par conséquent, pour celle qui satisfait aux conditions mentionnées: $\varphi(p) = \frac{c^{n-p}(d^{n+p} - c^{n+p})}{d^{2n} - c^{2n}}$.

Il en résulte pour la chance de A au début du jeu: $\varphi(0) = \frac{c^n}{c^n + d^n}$.

APPENDICE VII ¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

[1676] ²⁾.

Elck heeft $\frac{1}{2}a$ ingefet. die ten eersten een 6 met eene steen neemt te werpen
 heeft 1 tot a a
 $b-1$ tot 0 0
 $\frac{a+0}{b}$ $b \propto 6$.

Traduction:

Chacun a mis $\frac{1}{2}a$. Celui qui accepte de jeter au premier coup un 6 avec un seul dé
 a 1 chance à a , $b-1$ à zéro, ce qui vaut $\frac{a+0}{b}$, $b \propto 6$. Qui accepte de le faire en

¹⁾ Cet Appendice contient des solutions, à l'aide de logarithmes, de „problèmes des dés” identiques ou analogues à ceux dont Huygens s'occupe dans les Prop. X et XI de son Traité (voir les p. 79—83 du présent Tome). Il a servi évidemment d'avant-projet à la Pièce, destinée à Diërkens, qu'on trouve aux p. 16—18 du T. VIII. Il nous montre que Huygens n'a pas réussi au premier coup à donner à ses solutions la forme simple qu'elles ont obtenues dans la Pièce mentionnée.

²⁾ La Pièce n'est pas datée, mais il est très probable qu'elle fut composée en 1676. Les feuilles détachées sur lesquelles elle est écrite ont le même aspect, quant à l'écriture, l'encre et le format, que la feuille dont nous avons emprunté l'Appendice VI, daté d'août 1676. Et ce format diffère de celui dont Huygens se servait ordinairement. Ce n'est que le Livre

die in 2 reijfen het neemt heeft 1 tot a a

$$b-1 \text{ tot } \frac{a}{b} \quad a - \frac{a}{b}$$

$$\frac{2a - \frac{a}{b}}{b} \propto \frac{2a}{b} - \frac{a}{bb}$$

van 3^{en}

1 tot a

$$b-1 \text{ tot } \frac{2a}{b} - \frac{a}{bb} \left\{ \propto \frac{3a}{b} - \frac{3a}{bb} + \frac{a}{b^3} \right.$$

[van 4^{en}]

1 [tot] a

$$b-1 \text{ [tot]} \frac{3a}{b} - \frac{3a}{bb} + \frac{a}{b^3} \left\{ \propto \frac{4a}{b} - \frac{6a}{bb} + \frac{4a}{bbb} - \frac{a}{b^4} \right.$$

$b-1 \propto c^3$, $a \propto 1$ hebbende elck $\frac{1}{2}$ ingeset

1 tot a a

van 2^{en}

1 [tot] a

c [tot] $\frac{a}{b}$

van 3^{en}

1 [tot] a

c [tot] $\frac{a}{b}$

c [tot] $\frac{a}{b} + \frac{ac}{bb} + \frac{cca}{bbb} + \frac{ccca}{bbbb}$

$$c \text{ tot } 0 \quad \frac{0}{\frac{a}{b}}$$

$$c \text{ [tot]} \frac{a}{b} \left\{ \frac{a}{b} + \frac{ac}{bb} \right.$$

$$c \text{ [tot]} \frac{a}{b} + \frac{ac}{bb} \left\{ \frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{bbb} + \frac{ccca}{bbbb} \right.$$

Traduction:

deux coups a 1 chance à a , $b-1$ à $\frac{a}{b}$, ce qui vaut $\frac{2a}{b} - \frac{a}{bb}$, etc.....

Soit $b-1 \propto c^3$, $a \propto 1$, en supposant que chacun a mis $\frac{1}{2}$. [On trouve au cas d'un seul coup] 1 à a , c à zéro, ce qui vaut $\frac{a}{b}$, au cas de deux coups....., au cas de trois

des Adversaria E qui le présente et ce Livre était employé de 1674 à 1680; plusieurs feuilles en ont été enlevées, parmi lesquelles se trouvaient peut-être celles sur lesquelles cet Appendice VII fut écrite.

³⁾ La solution menaçant de devenir inutilement compliquée pour le cas d'un plus grand nombre de coups, Huygens la reprend avec une légère modification. À l'aide de cette modification il réussit en effet à la rendre plus maniable. Ce n'est que vers la fin de la Pièce (voir la note 5 de la p. 161) qu'il s'aperçoit combien la question se simplifie si l'on se met à calculer la chance de celui qui donne à jeter au lieu de celle de celui qui jette. Comparez les solutions des prop. X et XI (p. 79—83) du Traité de Huygens où l'on retrouve la même complication inutile.

$$\text{van } 4^{\text{en}} 1 \text{ [tot] } a \\ c \text{ [tot] } \frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{b^3} \left\{ \frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{bbb} + \frac{c^3a}{b^4} \right.$$

maer a is $\infty 1$, ergo $\frac{1}{b} + \frac{c}{bb} + \frac{cc}{b^3} + \frac{c^3}{b^4} [\dots \infty] \frac{1}{2}$, dat is men moet sien wanneer de fomme van de progressie gelijk werdt aen $\frac{1}{2}$, want dan is de kans gelijk van die het in foo veel reijfen genomen heeft.

Om de fomme der proportionalen te vinden. $z \propto \text{summa proport.}$

$$b \text{ [ad] } c \text{ [ut] } z - u \text{ [ad] } z - \frac{1}{b}. \quad u \text{ ultima et minima proport. } \frac{1}{b} \text{ prima.}$$

$$bz - 1 \propto cz - cu$$

$$z \propto \frac{1 - cu}{b - c} \propto \frac{1}{2} \propto \frac{1}{2} a \text{ nam } a \propto 1. \text{ Volo scire quanta sit ultima}$$

$$\text{prop. } u \text{ ut summa prop.}^{\text{um}} \text{ sit } \propto \frac{1}{2}$$

$$1 - cu \propto \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c \text{ sed } b - c \text{ mihi est } \propto 1$$

$$1 - cu \propto \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2c} \propto u$$

$$z \propto 1 - cu. \text{ Ergo contra certandi remanet } cu \text{ quod hic est } \frac{c^4}{b^4}.$$

Traduction:

coups....., au cas de 4 coups 1 à a , c à $\frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{b^3}$, ce qui vaut $\frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{bbb} + \frac{c^3a}{b^4}$, mais a est $\infty 1$, par conséquent, $\frac{1}{b} + \frac{c}{bb} + \frac{cc}{b^3} + \frac{c^3}{b^4} \dots \propto \frac{1}{2}$, c'est-à-dire on doit rechercher quand la somme de la progression devient égale à $\frac{1}{2}$, car alors celui qui a accepté de le faire en ce nombre de coups a une chance égale.

Manière de trouver la somme des quantités proportionnelles. $z \propto \text{summa proport.}$, etc....

Quoto jactu duarum tefferarum duos fenarios me daturum certare possum cum lucro? Sunt jactus 36. Ergo hic b est 36. et $c \propto 35$. prima proportionalium $\frac{1}{b} \propto \frac{1}{36}$. Quærendum ergo quot proportionales statuendæ sint in ratione 36 ad 35 ut ultima u sit minor quam $\frac{1}{2c}$ hoc est hic quam $\frac{1}{70}$. tunc enim summa proportionalium (quæ significat partem quam ex unitate seu (a) mihi arrogare possum) excedet $\frac{1}{2}$. adeo ut illo jactuum numero potior esse incipiat conditio mea.

Quod si fiat ut 36 ad 35 ita $\frac{1}{36}$ ad aliam ea erit secunda proportionalis et sic deinceps faciendum donec proportionalis inveniatur quæ sit minor quam $\frac{1}{70}$.

Hoc autem per logarithmos facile est ²⁾, nam si ab $\log. \frac{1}{36}$ qui est -1.5563025 auferatur differentia $\log. 35$ et 36, quæ est 0.0122345 , habebitur $\log.$ dictæ secundæ proportionalis. Invenio autem 24^{ter} dictam differentiam auferendam a logarithmo $\frac{1}{36}$ priusquam habeatur logarithm. minoris fractionis quam $\frac{1}{70}$, quia dividendo differentiam $\logg. \frac{1}{70}$ et $\frac{1}{36}$ quæ est -0.2887955 per dictam differ. $\logg. 36$ et 35 quæ est 0.0122345 , fiunt plus quam 23, ideoque 24 sumendum ut perveniat ad fractionem minorem quam $\frac{1}{70}$. Itaque 24 proportionales statuendæ præter primam $\frac{1}{36}$. adeo ut omnino sint 25. ac proinde 25^o jactu certare possum eventuros duos fenarios, idque conditione potiori quam sit contra certantis.

¹⁾ Cette phrase, écrite avec une encre différente, à commencer par $z \propto 1 - cu$, fut sans doute ajoutée après que ce même résultat avait été obtenu dans le dernier alinéa de la p. 161, où il donna lieu alors à la remarque de la note 5 de cette p. 161.

²⁾ De ce qui précède l'on déduit aisément :

$$n > \frac{\log \frac{1}{b} - \log \frac{1}{2c}}{\log b - \log c} + 1$$

où n désigne le nombre des quantités proportionnelles qu'il s'agit de déterminer.
C'est la règle que Huygens va appliquer dans ce qui suit.

Quoto jactu 3^{um} tesserarum tres senarios jacturum me certare possum. Resp. 150.

$$216 \propto b \quad \text{prima proport.} \propto \frac{1}{216}$$

$$215 \propto c \quad u \propto \frac{1}{2c} \propto \frac{1}{430} \quad L[\log]. - 2.6334685$$

$$\text{ex } \frac{1}{216} \quad L[\log]. - 2.3344537$$

$$0.2990148$$

$$\begin{array}{r} 216 \quad L. 2.3344537 \quad 149^1) \\ 215 \quad L. 2.3324385 \quad 1 \\ \hline 0.0020152 \quad 150 \end{array}$$

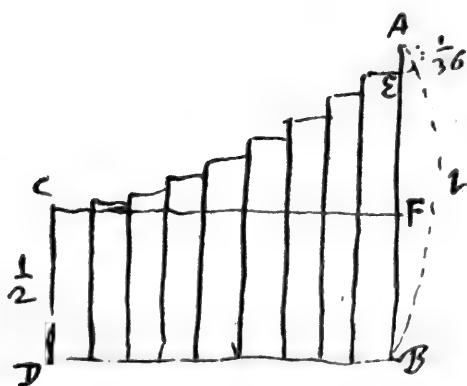
Quoto jactu 4^{or} tesserarum quatuor senarios? Resp. 899²⁾.

$$b \quad 1296 \quad L. 3.1226050 \quad \text{prima prop.} \propto \frac{1}{1296} \quad L. - 3.1126050$$

$$c \quad 1295 \quad L. 3.1122698 \quad u \propto \frac{1}{2c} \propto \frac{1}{2590} \quad - 3.4132998 \quad 898^2)$$

$$335^2 \quad 0.3006948 \quad 1$$

$$899^2)$$



Brevius hæc omnia peragi possunt³⁾.

Exempli gratia cum queritur quoto jactu duarum tesserarum possint duo senarij haberi, ita ut certetur cum lucro.

Tantummodo quærendum quoties ratio 36 ad 35 continentur in ratione 2 ad 1⁴⁾. dividendo nempe logarithmum binarij 0,30103 per differ. logarithmorum 36 et 35, qui est 0,01223. fit 24 et aliquid superest. Tum addenda 1. et fit 25 numerus proportionalium quarum summa superabit $\frac{1}{2}$. Ideoque 25 jactibus

cum lucro certatur obventuros duos senarios.

¹⁾ C'est le premier nombre entier qui excède le quotient de 0,2990148 par 0,0020152. Ajoutons que la division, que nous n'avons pas reproduite, fut faite à l'aide de l'algorithme expliqué dans la note 3 de la p. 152 du T. XIII.

Simili ratione si quærat^{ur} quot jactibus quatuor senarij quatuor tesseris possint obtineri ut certetur cum lucro: quia sunt jactus diversi quatuor tesserarum 1296; oportet dividere logarithmum binarij, (qui est logar. rationis 2 ad 1) per differentiam logarithmorum 1296 et 1295, quæ differentia est 3352. Quotienti addenda unitas. $898 + 1 \infty 899$ vicibus cum lucro certatur.

Ut sciatur quantum valeat spes utriusque, sive quæ pars ejus quod depositum est utrique debeatur, cum certo numero jactuum omnibus tesseris senarius eventurus certatur. tantummodo fractio constituenda est cujus denominator sit numerus diverforum jactuum qui dato tesserarum numero conveniunt, nominator vero numerus unitate minor illo jam dicto. Hujus fractionis potestas ea quæ convenit numero jactuum, (veluti quadratoquadratum si quatuor jactibus senarij eventuri certantur) designabit partem quæ contra certanti debetur ex eo quod depositum est.

Ex. gr. si duabus tesseris quarto jactu duos senarios mihi venturos certem, quia duarum tesserarum jactus diversi sunt 36 erit fractio constituenda $\frac{35}{36}$. Porro quia numerus jactuum datorum est 4 hinc quarta potestas positæ nempe $\frac{35 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 35}{36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36}$ five $\frac{1500625}{1679616}a$ (si a vocetur quod depositum est) est pars debita contra certanti; ut proinde mihi restent $\frac{178991}{1679616}a$. Et valor meæ spei ad illius ut 178991 ad 1500625.

Ratio horum hæc est quod fol. præc. inventa fuit 2 summa proportionalium, (quæ etiam est fractio designans partem certantis) æqualis $1 - cu$. unde contra certanti relinqui apparet cu , Est autem cu productum ultimæ proportionalium in c , unde si ultima proportionalis sit $\frac{c^3}{b^4}$, ut in hoc exemplo fit productum illud $\frac{c^4}{b^4}$ 5).

2) Il est vrai que, plus tard, Huygens a diminué ce nombre d'une unité. Probablement il avait oublié l'addition d'une unité exigée par la formule de la note 2 de la p. 159.

3) De la relation $n < \frac{1}{2c}$ (voir la p. 159), ou bien $\frac{c^{n-1}}{b^n} < \frac{1}{2c}$, on déduit $\left(\frac{b}{c}\right)^n > 2$; c'est la relation dont Huygens va se servir dans ce qui suit sous la forme $n > \frac{\log 2}{\log b - \log c}$.

4) Voir la figure à côté par laquelle Huygens représente géométriquement le procédé qu'il va suivre.

5) Ici Huygens annota en marge: „Melius adhuc ratio hic queritur examinando in principio sortem contra certantis”. C'est la méthode qu'il va suivre dans la Pièce destinée à Dierkens, dont nous avons parlé dans la note 1 de la p. 156. Voici, en effet, la

Est autem logarithmorum etiam hic usus, cum absque his longum futurum sit potestates istas fractionis formare, cum magnus numerus jactuum certanti conceditur. Sic in exemplo superiori, si datis jactibus 899 quatuor tesserarum, quibus quatuor fenarios evenire oporteat, scire velim quantum valeant spes utriusque;

fractio hic erit $\frac{1295}{1296}$; cujus ut sciatur potestas 899.^{ma}

Primum logar. 1295 qui est 3,1122698
multipl. in 899

28,0104282
280,104282
2489,81584
2797,9305502 l. num. i 8522

Rurfus log. 1296 qui est 3,1126050
899

28,0134450
280,134450
2490,08400
2798,2318950 log. num. i 17060
8522

Et habetur pars contracertantis $\frac{8522}{17060}a$; unde certanti $\frac{8538}{17060}a$.

Et spes certantis ad alterius spem ut 8538 ad 8522 proximè.

Qui vicibus continuis, quarum numerus sit a , eventurum certat ad quod ut eveniat sunt casus b , ut autem non eveniat sunt casus c ; ejus fors (posito $d \propto b + c$) ad sortem contra certantis ut ba ad $da - ba$. hoc est ut b toties in se ductum quot sunt unitates in a , ad summam $b + c$ toties in se ductam minus b toties in se ducto.

Ex. gr. ¹⁾ si quis, duabus tesseris, sese supra 5 puncta jacturum certet, idque

traduction du troisième alinéa de cette Pièce: „La meilleure manière de résoudre cette question consiste dans le calcul de la chance de celui qui donne à jeter, ou bien de la part de ce qui lui revient de l'enjeu. Alors on connaît aussi la part de celui qui entreprend de jeter, laquelle est égale à ce qui reste”.

¹⁾ On retrouve cet exemple dans la Pièce destinée à Dierkens; voir la p. 18 du T. VIII.

3 continuis vicibus. Hic 26 casus sunt punctorum supra quinque; 10 vero casus quinquorum vel infra. Ergo hic $a \propto 3$; $b \propto 26$; $c \propto 10$. $b + c \propto d \propto 36$. unde fors certantis erit ad sortem contra certantis ut cubus à 26, ad cubum a 36 — cubo a 26: hoc est ut 17576 ad 29180. Hujus facilis est demonstratio. Nam qui semel supra 5 se jacturum certat habet cas. 26 ad n , 10 ad 0. Ergo $\frac{26n}{36}$. Qui bis habet cas. 26 ad $\frac{26}{36}n$, 10 ad 0. Ergo $\frac{26.26.n}{36.36}$. qui ter habet casus 26 ad $\frac{26.26.n}{36.36}$ et 10 ad 0. Ergo $\frac{26.26.26n}{36.36.36}$. atque ita porro.

APPENDICE VIII¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK.”

[1679]²⁾

Avantages du Banquier au jeu de la Bassette³⁾.

la carte y estant 1 fois mais le fermier
ne paie rien si elle vient toute la dernière.

$$\begin{array}{l}
 2^4) \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{---} & N \\ 1 & \text{---} & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} N \\ 0 \\ \hline N \\ 2 \end{array} \\
 \\
 3^5) \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{---} & -N \\ 2 & \text{---} & \frac{1}{2}N \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} -N \\ +N \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4 \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{---} & N \\ 3 & \text{---} & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} N \\ 0 \\ \hline \frac{1}{4}N \end{array} \\
 \\
 5 \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{---} & -N \\ 4 & \text{---} & \frac{1}{4}N \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} -N \\ +N \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

¹⁾ La Pièce occupe les p. 169—171 du Manuscrit E. Ajoutons qu'à la p. 168 on trouve encore les annotations suivantes qui se rapportent au jeu de la Bassette: „Si les 2 premières estant semblables à la carte en jeu, le banquier gagne l'entier ou les $\frac{2}{3}$ seulement? R. les 2 tiers. Et la deuxième alors n'est point considérée, si l'on ne reva [sic!].

Si ce desavantage du Banquier des $\frac{2}{3}$ au lieu du tout, a lieu autrement qu'à la première carte de tout le jeu? R. à toutes.”

Il nous semble qu'il résulte de ces annotations que Huygens s'est informé sur les particularités du jeu chez quelque personne compétente. Or, on lit en effet à la p. 169 du Manuscrit l'annotation suivante: „demand. à m.^e le Cocq. de la Bassette”. Voir encore les deux derniers alinéas de la note 1 de la p. 168.

$$6 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ --- } N \\ 5 \text{ --- } \circ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} N \\ \circ \\ \hline \frac{1}{6} N \end{array}$$

avantage du Banquier quand la carte est une fois dans les restantes

$$\frac{1}{r} N$$



$$\begin{array}{l} \text{la carte 2 fois} \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ --- } N \\ 1 \text{ --- } + N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -2 N \\ N \\ \hline -\frac{1}{3} N \end{array} \\ 4 \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ --- } + N \\ 2 \text{ --- } -\frac{1}{3} N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2 N \\ -\frac{2}{3} N \\ \hline +\frac{1}{3} N \end{array} \end{array}$$

²⁾ D'après le lieu d'où nous avons emprunté la Pièce.

³⁾ Les règles de ce jeu, telles qu'on les trouve exposées par M. Sauveur dans le „Journal des Sçavans” du lundi 13 février 1679 aux p. 45—46 de l'édition d'Amsterdam, sont assez compliquées; mais puisque Huygens ne les applique pas toutes dans les calculs qui suivent, nous nous bornerons ici à celles qu'on doit connaître pour comprendre ces calculs. A cet effet nous citons de l'article de Sauveur les passages suivants: „Celuy qui taille qu'on nomme *Banquier* ou *Tailleur* a un Jeu entier de cinquante deux cartes & ceux qui jouent contre luy ont chacun en main treize Cartes d'une couleur, qu'on appelle le *livre*. Apres que le Tailleur a battu ses Cartes, les Joüeurs découvrent devant eux telles cartes de leur livre qu'ils veulent, sur lesquelles ils couchent de l'argent à discretion; ensuite le Tailleur tourne son jeu de Cartes, ensorte qu'il voit la premiere qui estoit dessous. Apres cela il tire ses cartes deux à deux jusqu'à la fin du Jeu en commençant par celle qu'il voit; & par la nature de ce jeu, la premiere de chaque couple ou main, est toujours pour luy, & la seconde *ordinairement* pour le Joüeur, de sorte que si la premiere est par exemple un Roy, le banquier gagne tout ce qui a esté couché sur les Rois, mais si la seconde est un Roy, le Banquier donne aux joüeurs autant qu'ils ont couché sur les Rois, & en cela précisément l'avantage du Banquier n'est pas plus grand que celui du joüeur. Mais il faut remarquer.

1. Que si la premiere & la seconde carte sont, par exemple des Rois (ce qu'on appelle *doublets*) le coup devroit estre nul, cependant le Banquier gagne ce qui a esté couché sur les Rois.

2. Chaque joüeur a la liberté de coucher de l'argent sur telle carte qu'il veut lors que le jeu est commencé, de sorte que s'il couchoit de l'argent, par exemple sur une Dame lorsque le jeu est commencé, il pourroit arriver que dans le reste des cartes, il y auroit 4, ou 3, ou 2, ou enfin 1 Dame: ce qui diversifie les avantages du Banquier. . . .

3. . . . la dernière carte est nulle, laquelle devroit estre pour le Joüeur. . . .”

⁴⁾ Ce chiffre représente le nombre des cartes qui sont encore dans le jeu tenu par le banquier. Il va les tirer deux à deux, les mises N étant faites auparavant par les joueurs. Or, il est évident que dans le cas présent de deux cartes qui restent le banquier a une chance à gagner, c'est-à-dire si la premiere carte est la carte en question, et une à être quitte, quand cette carte vient comme deuxième, c'est-à-dire comme la dernière du jeu.

⁵⁾ A propos des calculs qui se rapportent aux cas où le nombre des cartes restantes est impair on doit remarquer que le compte entre le banquier et le joueur n'est réglé qu'après que les deux cartes ont été tirées. Par suite les désavantages du banquier, qui se présentent à commencer par la deuxième colonne de la p. 165 toutes les fois que le nombre des cartes est

$$\begin{array}{l}
 5 \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ — } -N \quad -2N \\ 3 \text{ — } -\frac{1}{3}N \quad N \end{array} \right. \\
 \hline
 \quad \quad -\frac{1}{5}N \\
 \\
 6 \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ — } -N \quad 2N \\ 4 \text{ — } -\frac{1}{5}N \quad -\frac{4}{5}N \end{array} \right. \\
 \hline
 \quad \quad +\frac{1}{5}N \\
 \\
 7 \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ — } -N \quad -2N \\ 5 \text{ — } -\frac{1}{5}N \quad N \end{array} \right. \\
 \hline
 \quad \quad -\frac{1}{7}N \\
 \\
 8 \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ — } -N \quad 2N \\ 6 \text{ — } -\frac{1}{7}N \quad -\frac{6}{7}N \end{array} \right. \\
 \hline
 \quad \quad +\frac{1}{7}N
 \end{array}$$

avantage du Banquier quand la carte est
2 fois dans les restantes

$$\frac{1}{r-1}N$$



quand la carte en jeu y est 3 fois

3 $\left\{ \begin{array}{l} -N \text{ pour le banquier quand} \\ \text{il ne reste que 3 cartes car il a} \\ \text{perdu} \end{array} \right.$

4 $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } -N \text{ quand vient un des 3} \\ \text{rois} \\ 1 \text{ — } -N \text{ quand vient l'autre} \\ \text{carte} \\ \frac{1}{2}N \text{ quand il reste 4 cartes} \end{array} \right.$

5 $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } -N \quad -3N \\ 2 \text{ — } -\frac{1}{2}N \quad N \end{array} \right.$
 $-\frac{2}{5}N \text{ a 5 cartes}$

6 $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } -N \quad 3N \\ 3 \text{ — } -\frac{2}{5}N \quad -\frac{6}{5}N \end{array} \right.$
 $\frac{3}{10}N \text{ a 6 cartes}$

7 $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } -N \quad -3N \\ 4 \text{ — } -\frac{3}{10}N \quad \frac{6}{5} \end{array} \right.$
 $-\frac{9}{35}$

impair, n'existent pas en réalité; ce qui n'empêche pas que Huygens ne puisse se servir dans ses calculs de ces cas. Considérons, pour le montrer, le deuxième cas de la deuxième colonne de la p. 165, où il y a 4 cartes restantes, a_1, a_2, b, c , dont deux, a_1 et a_2 , soient conformes à celle sur laquelle la mise est faite. Il y a alors deux chances que la première carte est a_1 ou a_2 , auquel cas le banquier gagne la mise, et deux autres où elle est b ou c . Dans ces derniers cas le jeu continue avec trois cartes restantes et il s'agit de calculer les avantages et désavantages qui peuvent se présenter encore. C'est ce que Huygens a fait par le premier calcul de cette deuxième colonne et il est évident qu'il doit supposer dans ce calcul, et dans tous ceux qui se rapportent aux cas d'un nombre impair de cartes, que la carte qui a précédé n'était pas conforme à celle sur laquelle la mise a été faite, de sorte que si la première du nombre impair des cartes restantes est conforme à cette carte il n'y a jamais de „doublet”, mais c'est le joueur qui gagne.

$$\begin{array}{l}
 8 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } N \\ 5 \text{ — } - \frac{9}{35} N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3 N \\ - \frac{9}{7} N \end{array} \\
 \hline
 \frac{12}{56} \left| \frac{3}{14} \right| \frac{6}{28} \\
 \\
 9 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } - N \\ 6 \text{ — } - \frac{3}{14} N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} - 3 N \\ \frac{9}{7} N \end{array} \\
 \hline
 - \frac{12}{63} \left| - \frac{4}{21} \right| \\
 \\
 10 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } N \\ 7 \text{ — } - \frac{4}{21} N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3 N \\ - \frac{4}{3} N \end{array} \\
 \hline
 \frac{1}{6} \left| \frac{9}{54} \right| \\
 \\
 11 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } - N \\ 8 \text{ — } - \frac{1}{6} N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} - 3 N \\ \frac{8}{6} N \end{array} \\
 \hline
 - \frac{5}{33} \left| - \frac{15}{99} \right| \\
 \\
 12 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } N \\ 9 \text{ — } - \frac{5}{33} N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3 N \\ - \frac{15}{11} N \end{array} \\
 \hline
 \frac{18}{11 \cdot 12} \left| \frac{3}{22} \right| \frac{12}{88} \\
 \\
 13 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } - N \\ 10 \text{ — } - \frac{3}{22} N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} - 3 N \\ \frac{15}{11} N \end{array} \\
 \hline
 - \frac{18}{143} \\
 \\
 14 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ — } N \\ 11 \text{ — } - \frac{18}{143} N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3 N \\ - \frac{18}{13} N \end{array} \\
 \hline
 \frac{21}{182} N
 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{6}{28} \quad \frac{9}{54} \quad \frac{12}{88} \quad \frac{15}{130}$$

avantage du Banquier quand la carte y est 3 fois

r nombre pair des cartes restantes

$$\frac{\frac{3}{2}r - 6}{\text{qu. } r - 2 - r}$$

quand il ne reste que 4 cartes l'avantage est $\frac{1}{2} N$.

quand la carte y est 3 fois. r nombre impair

$$\frac{3r - 3}{2rr - 4r} \text{ defavantage du Banq.}$$

[la carte 4 fois]

$$\begin{array}{ll}
 4 \text{ — } - N & 4 \text{ — } - N \\
 1 \quad + N & 2 \text{ — } - \frac{3}{5} N \\
 \hline
 - \frac{3}{5} N & \frac{14}{30} N \\
 \\
 4 \text{ — } - N & 4 \text{ — } - N \\
 3 \text{ — } - \frac{14}{30} N & 4 \text{ — } - \frac{13}{35} N \\
 \hline
 - \frac{78}{210} N & \frac{88}{280} \left| \frac{11}{35} \right| \\
 \\
 4 \text{ — } - N & 4 \text{ — } - N \\
 5 \text{ — } + \frac{11}{35} N & 6 \text{ — } - \frac{17}{63} N \\
 \hline
 - \frac{17}{63} N & \frac{150}{630} \left| \frac{15}{63} \right| \frac{5}{21}
 \end{array}$$

$$-\frac{49}{231}; \frac{19}{99}; -\frac{25}{143}; \frac{23}{143}; [-]\frac{29}{195}; \frac{9}{65}; [-]\frac{11}{85}; \frac{31}{255}; [-]\frac{37}{323}; \frac{35}{323};$$

$$[-]\frac{41}{399}; \frac{39}{399}; [-]\frac{45}{483}; \frac{43}{483}; [-]\frac{49}{575}; \frac{47}{575}; [-]\frac{53}{675}; \frac{51}{675}$$

$$\frac{2r-5}{qu. r-2-1} N$$

$$\frac{r-1}{r-3}$$

$$qu. r-2-1 \propto rr-4r+3$$

Soit r le nombre pair des cartes qui restent, et que la carte en jeu y foit 4 fois. alors l'avantage du Banquier est cette fraction de N , c'est à dire de ce qui a esté mis sur la carte en jeu ¹⁾).

¹⁾ En résumé Huygens a donc trouvé dans les quatre cas différents pour les avantages du banquier, respectivement: $\frac{1}{r}N, \frac{1}{r-1}N, \frac{3r-6}{(r-2)^2-r}N, \frac{2r-5}{(r-2)^2-1}N$. Or, dans l'article cité de Sauveur (voir la note 3 de la p. 165) celui-ci donne (sans démonstration) pour ces mêmes avantages, si on les exprime dans la notation de Huygens: $\frac{1}{r}N, \frac{1}{r-1}N, \frac{3}{2r-2}N, \frac{2r-5}{r^2-4r+3}N$.

On voit donc facilement que les résultats de Huygens et de Sauveur sont identiques; mais la forme sous laquelle Huygens présente le troisième résultat nous semble indiquer que l'article de Sauveur lui était inconnu lorsqu'il composa la présente Pièce.

D'ailleurs Sauveur donne encore d'autres résultats qui se rapportent aux règles plus compliquées qu'il expose dans son article. Parmi ces règles il y a celle de la face, qu'il explique comme il suit: „Cependant parce que l'avantage du Banquier seroit trop grand, on l'a diminué en faisant que lorsqu'il gagne à la première main dans laquelle il peut gagner une carte découverte, il face pour lors, c'est à dire qu'il ne prend que les deux tiers de ce qui a esté couché sur cette carte, de sorte qu'il y perd un tiers”.

C'est évidemment à propos de cette règle que Huygens a pris les informations que nous avons reproduites dans la note 1 de la p. 164. Nous y trouvons une preuve de plus que Huygens ne connaissait pas encore l'article de Sauveur, où les questions qu'il pose sont résolues assez clairement.

APPENDICE IX ¹⁾

AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

[1688] ²⁾

§ 1 ³⁾.

A, B, C spelen piquet settende ieder een ducat. Altijdt speelen er twee van de drie en die verliest set noch een ducat in. En die beide de speelders achtereen afwint, strijckt alles foo dat de laetst verliefende oock noch een ducat moet geven.

de questie is hoe veel A wint, als hij voor eerst zich vrij werpt.

Traduction :

A, B, C jouent au piquet mettant chacun un ducat. Ce sont toujours deux des trois qui jouent. Celui qui perd met de nouveau un ducat. Et celui qui fait perdre ses deux adversaires consécutivement prend tout, de sorte que celui qui perd la dernière fois doit aussi donner encore un ducat. On demande combien est l'avantage de A, s'il a jeté de manière à rester libre pendant la première partie.

¹⁾ Cet Appendice, emprunté aux pp. 176 et 322—324 du Manuscrit F, contient les recherches de Huygens à propos du problème énoncé à cette page-ci et de deux autres problèmes analogues. Nous l'avons divisé en paragraphes.

²⁾ D'après le lien occupé dans le manuscrit F le § 1 devrait dater de 1683 et les autres paragraphes de 1688, mais nous ne pouvons pas admettre qu'il y aurait un intervalle de cinq années entre ces deux tentatives pour parvenir à la solution d'un même problème. Nous croyons plutôt que le § 1 fut écrit dans la même année que les autres §§ sur une page restée vide en 1683.

³⁾ Ce paragraphe nous fait connaître la première tentative de Huygens de résoudre le problème en question.

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ x & -\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x \end{array}$$

A, B, C ieder een duc. in.

A vrij als 3 d. in staen. valeat sijn winst x .

A dan sal tegens een der twee andere spelen, met gelijcke kans om tegen hem te verliezen en de 5^e ducet in te setten ¹⁾, of te winnen en gelijcke kans te hebben tegen den laetsten spelende tot 3 ducaten te winnen, of om selfs de vijfde ducet ²⁾ in te setten.

A ingeset 2 duc. van de 5 en B, C, moeten spelen. fit $-b$.

$$x \left\{ \begin{array}{l} \text{een kans tot } -b \\ \text{een kans tot } \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ duc.} \\ \text{of } -b^3 \end{array} \right. \end{array} \right. x \left\{ \begin{array}{l} \frac{3-b}{2} \infty \frac{3-3b}{4} \infty x \\ -b \end{array} \right.$$

B spelende tegen C als 3 in staen, valet $-\frac{1}{2}x$.

Traduction:

Que les avantages de A, B, C soient respectivement: x , $-\frac{1}{2}x$, $-\frac{1}{2}x$. Chacun met un ducat à l'enjeu. A est libre lorsque l'enjeu est de 3 ducats. Soit x son avantage.

A jouera alors contre l'un des deux autres joueurs avec une chance égale de perdre et de mettre le 5^{me} ducat ¹⁾ ou de gagner et d'avoir une chance égale, en jouant contre le dernier des joueurs, de gagner 3 ducats ou de devoir mettre lui-même le cinquième ducat ²⁾.

A ayant mis 2 ducats des 5, B et C doivent jouer. Soit $-b$ son avantage.

$$x \left\{ \begin{array}{l} \text{une chance à } -b \\ \text{une chance à } \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ duc.} \\ \text{ou } -b^3 \end{array} \right. \end{array} \right. x \left\{ \begin{array}{l} \frac{3-b}{2} \infty \frac{3-3b}{4} \infty x \\ -b \end{array} \right.$$

B jouant contre C quand la mise est de 3 ducats, cela vaut $-\frac{1}{2}x$.

¹⁾ Il semble que d'après les règles formulées au début de cette Pièce le jeu serait alors terminé. En effet, A ayant perdu contre le gagnant de la première partie, celui-ci a fait perdre consécutivement ses deux adversaires. Toutefois Huygens suppose dans l'alinéa qui suit que dans ces circonstances le jeu se continue. Ajoutons que nous ne savons pas résoudre les contradictions que nous signalons dans cette note-ci et dans les deux suivantes.

²⁾ Ce serait, en vérité, le sixième ducat.

³⁾ A ayant gagné la deuxième partie et perdu la troisième (la première ayant été jouée par B et C) la mise totale sera montée à 6 ducats. L'avantage de A ne peut donc pas être représenté par $-b$.

$-\frac{1}{2}x$ is $\left\{ \begin{array}{l} \text{of 2 van de 4 in te setten als hij verliest, quod valeat } -c \\ \text{of } \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ te winnen als hij van A oock wint.} \\ 2 \text{ van de 5 in te setten dat is } -b \end{array} \right. \end{array} \right.$

$$\text{ergo } -\frac{1}{2}x \propto \left\{ \frac{-c}{2} \propto \frac{3-b-2c}{4} \propto -\frac{1}{2}x. \right.$$

$$\frac{-3+b+2c}{2} \propto x \propto \frac{3-3b}{4}; c \propto \frac{9-5b}{4}$$

$-c \left\{ \begin{array}{l} -2 \text{ foo C oock van A wint} \\ 2 \text{ van de 5 te hebben ingeset en te moeten spelen tegen A quod valeat } -d \end{array} \right.$

$-d \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ van 6 te hebben ingeset en niet te spelen} \\ 2 \text{ van 6 ingeset en moeten spelen tegen C. quod fit } -e \end{array} \right.$

$-e \left\{ \begin{array}{l} +5 \\ 3 \text{ van 7 ingeset en niet te spelen} \end{array} \right.$

Soude op een progressie uytkomen.

Traduction:

$-\frac{1}{2}x$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{ou de mettre 2 des 4 s'il perd, ce qui vaille } -c \\ \text{ou } \left\{ \begin{array}{l} \text{de gagner 3 s'il gagne aussi de A} \\ \text{de mettre 2 des 5, c'est } -b \end{array} \right. \end{array} \right.$

$$\text{par conséquent } -\frac{1}{2}x \propto \left\{ \frac{-c}{2} \propto \frac{3-b-2c}{4} \propto -\frac{1}{2}x. \right.$$

$$\frac{-3+b+2c}{2} \propto x \propto \frac{3-3b}{4}; c \propto \frac{9-5b}{4}$$

$-c \left\{ \begin{array}{l} -2 \text{ si C gagne aussi de A} \\ \text{d'avoir mis 2 des 5 et de devoir jouer contre A, ce qui vaille } -d \end{array} \right.$

$-d \left\{ \begin{array}{l} \text{d'avoir mis 3 des 6 et de ne pas jouer} \\ \text{d'avoir mis 2 des 6 et de devoir jouer contre C, ce qui soit } -e \end{array} \right.$

$-e \left\{ \begin{array}{l} +5 \\ \text{d'avoir mis 3 des 7 et de ne pas jouer.} \end{array} \right.$

Cela mènerait à une progression.

§ 2 ¹⁾.

A, B, C spelende setten ieder een ducac in. A speelt eerst tegen B en die van beide wint, speelt tegens C. en C winnende speelt weer tegen de derde, tot dat iemandt 2 mael achtereen wint, welcke dan het ingesette strijckt. en daer en boven de ducac die ieder die een spel verliest noch bij moet setten, te weten 1 ducac voor ieder verloren spel. tot de laetst verlietende inclus. Vraeghe naer de waerde haerder kanssen ²⁾).

De kans van A sij z . Van B sij y . Van C sij x . Den ducac sij d .

Soo A van B wint soo moet hij met C spelen, en B noch een ducac insetten. laet die kans alsdan van A sij p . maer soo A tegen B verliest soo sij de kans van A ∞q .

Soo heeft dan in 't eerste A een kans tot p en een kans tot q dat is $\frac{p+q}{2}$.

p is een kans tot $5d$ te weten soo A van B en C achtereen wint want daer sijn eerst $3d$ ingeset en noch $1d$ door B ingeset, en C verlietende moet noch aan A $1d$ geven.

en een kans tot ³⁾

Traduction:

§ 2 ¹⁾.

A, B, C qui jouent mettent chacun un ducat. A joue d'abord contre B et celui des deux qui gagne joue contre C. Et si C gagne il joue de nouveau contre le troisième, jusqu'à ce que quelqu'un gagne 2 fois consécutivement, lequel prend alors l'enjeu et en outre le ducat que chacun qui perd une partie doit ajouter encore à l'enjeu, à favoir un ducat pour chaque partie que l'on perd, inclusivement celui qui perd la dernière partie. On demande la valeur de leurs chances ²⁾).

Que la chance de A soit z ; celle de B y ; celle de C x . Le ducat soit représenté par d .

Si A gagne de B il doit jouer avec C, et B doit ajouter un ducat à l'enjeu. Que la chance de A soit alors p , mais si A perd contre B que la chance de A soit ∞q .

Il s'ensuit que A a d'abord une chance à p et une à q ; cela vaut $\frac{p+q}{2}$.

p est une chance à $5d$, à favoir si A gagne consécutivement de B et de C car il a été mis d'abord $3d$ et encore $1d$ mis par B et si C perd il doit encore donner $1d$ à A, et une chance à ³⁾

¹⁾ Ce paragraphe nous fait voir comment Huygens a attaqué de nouveau le problème du § 1 sans réussir, cette fois encore, à le résoudre.

²⁾ On voit que ce problème ne diffère pas essentiellement de celui du § 1.

³⁾ Huygens n'achève pas la phrase. Il préfère recommencer sa tentative d'une façon un peu différente.

Soo A 't eerste spel verliest laet sijn kans weerdt sijn p .

Soo A 't eerste spel wint laet sijn kans weerd sijn q .

Soo A 't eerste en tweede spel wint soo heeft hij $5d$.

Soo A 't eerste wint en het tweede verliest, laet sijn kans weerdt sijn r .

maer A het eerste gewonnen hebbende, heeft 1 kans tot $5d$, en 1 kans tot r .

Soo is $\frac{5d+r}{2} \propto q$.

A beginnende te spelen heeft 1 kans tot p en 1 kans tot q , soo is dan sijn kans van eersten aen weerdt $\frac{p+q}{2}$.

Soo is de kans van C van eersten aen waerdt $3d-p-q$, of A of B 't eerste wint soo heeft C deselfde kans. te weten 1 kans om van A of B te winnen, wanneer de waerde van de kans van C sij s . ende 1 kans om tegen A of B te verliefen, dat is om te hebben $0-d$, want C moet dan noch $1d$ geven.

Nu s is een kans om te hebben $6d$ of om 4)

§ 3⁵).

Eerst genomen dat niet meer als de eerste 3 ducaten werdt ingeset.

Traduction :

Si A perd la première partie, que sa chance vaille p .

Si A gagne la première partie, que sa chance vaille q .

Si A gagne la première et la deuxième partie il a $5d$.

Si A gagne la première et perd la deuxième partie, que sa chance vaille r .

mais A ayant gagné la première partie a 1 chance à $5d$, et 1 chance à r ; donc $\frac{5d+r}{2} \propto q$.

Quand A commence à jouer il a 1 chance à p et 1 chance à q , par suite sa chance vaut au début $\frac{p+q}{2}$.

La chance de C vaut donc au début $3d-p-q$. Que ce soit A ou B qui gagne la première partie, la chance de C est la même, à favoir 1 chance de gagner de A ou B, auquel cas sa chance vaille s , et 1 chance de perdre contre A ou B, c'est-à-dire d'avoir $0-d$, car C doit alors donner encore $1d$.

Or, s vaut une chance d'avoir $6d$ ou de 4)

§ 3⁵).

Supposons d'abord qu'on ne met rien que les 3 premiers ducats.

⁴) Huygens suspend de nouveau sa tentative pour la reprendre plus loin (au §4). Il se propose de résoudre d'abord (comme pour se faire la main) un problème analogue, mais bien plus facile; voir le § 3 qui suit.

⁵) Dans ce paragraphe Huygens parvient à résoudre le problème plus facile qu'il s'est proposé.

A en B spelende laet de kans van C waerdt sijn x ; foo is die van A of B waerdt $\frac{3d-x}{2}$.

als A wint van B foo heeft C een kans tot 0 te weten, verliefende tegen A. en een kans tot y dat is $\infty \frac{1}{2}y$, stellende y voor de waerde van de kans van C als hij tegen A gewonnen hebbende moet spelen tegen B.

foo is y gelijk 1 kans tot $3d$ winnende C tegen B en 1 kans tot z , C tegen B verliefende. Ergo $y \infty \frac{3d+z}{2}$ stellende z voor de waerde van de kans van C in dit geval.

als A wint tegen B, foo heeft A 1 kans tot $3d$ winnende A tegen C en 1 kans tot z verliefende A tegen C, dat is $\frac{3d+z}{2}$; als A wint tegen B foo is oock B sijn kans z waerdt ¹⁾.

Traduction:

Lorsque A et B jouent la chance de C vaille x , alors celle de A ou B vaut $\frac{3d-x}{2}$.

Si A gagne de B, C a une chance à 0, à favoir quand il perd contre A, et une à y , ce qui vaut $\frac{1}{2}y$, si nous appelons y la valeur de la chance de C quand il a gagné contre A et qu'il doit jouer contre B.

Par suite y équivaut à 1 chance à $3d$, si C gagne contre B et 1 chance à z , si C perd contre B. On a donc $y \infty \frac{3d+z}{2}$ appelant z la valeur de la chance de C dans ce cas.

Si A gagne contre B, A a 1 chance à $3d$, lorsque A gagne contre C, et 1 chance à z , lorsque A perd contre C; ce qui vaut $\frac{3d+z}{2}$; si A gagne contre B la chance de B vaut également z ¹⁾.

¹⁾ Puisque B se trouve alors exactement dans la même position où était C lorsque sa chance fut posée égale à z .

²⁾ C'est-à-dire s'il gagne.

³⁾ C'est-à-dire au début du jeu.

⁴⁾ Les chances des trois joueurs A, B, C d'obtenir l'enjeu $3d$ valent donc respectivement au commencement du jeu: $\frac{15}{14}d$, $\frac{15}{14}d$ et $\frac{6}{7}d$, et leurs avantages ou désavantages (qu'on trouve en

ôtant de la valeur de ces chances la mise d): $\frac{1}{14}d$, $\frac{1}{14}d$ et $-\frac{1}{7}d$. Le problème est donc résolu.

Ergo A winnende tegens B foo sijn haer drijven kanffen $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}y \\ + \frac{3d+z}{2} \\ + z \end{array} \right\} \propto 3d$

$$y + 3d + 3z \propto 6d; y + 3z \propto 3d; y \propto 3d - 3z \text{ fed } y \propto \frac{3d+z}{2} \text{ hoc ergo } \propto 3d - 3z$$

$$3d + z \propto 6d - 6z. \text{ Ergo } \frac{3}{7}d \propto z.$$

A tegen B spelende heeft 1 kans tot y want hij dan tegen C moet spelen ²⁾ en 1 kans tot z , dat is $\frac{y+z}{2} \propto \frac{3d-x}{2}$ want dat was de kans van A ³⁾.

$$y \propto 3d - x - z \propto 3d - 3z; x \propto 2z; \text{ fed } z \propto \frac{3}{7}d. \text{ Ergo } x \propto \frac{6}{7}d^{4)}.$$

y is de waerde der kans van die d'eene gewonnen hebbende tegen den anderen moet spelen.

z is de waerde der kans van die tegen d'een gewonnen hebbende, tegens den anderen verliest.

Traduction:

Si donc A gagne contre B les chances des trois joueurs seront $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}y \\ + \frac{3d+z}{2} \\ + z \end{array} \right\} \propto 3d$

$$y + 3d + 3z \propto 6d; y + 3z \propto 3d; y \propto 3d - 3z \text{ mais } y \propto \frac{3d+z}{2} \text{ ce qui est donc égal à } 3d - 3z.$$

$$3d + z \propto 6d - 6z. \text{ Par conséquent } \frac{3}{7}d \propto z.$$

A jouant contre B a une chance à y puisqu'il doit jouer alors contre C ²⁾ et 1 chance à z ; ce qui vaut $\frac{y+z}{2} \propto \frac{3d+x}{2}$, car telle était la chance de A ³⁾.

$$y \propto 3d - x - z \propto 3d - 3z; x \propto 2z \text{ mais } z \propto \frac{3}{7}d. \text{ Donc } x \propto \frac{6}{7}d^{4)}.$$

est la valeur de la chance de celui qui ayant gagné contre l'un des joueurs doit jouer contre l'autre.

z est la valeur de la chance de celui qui ayant gagné contre l'un perd contre l'autre.

§ 4¹).

A, B'teerste spel (spe- i tot $-2d$. A w[erpt] spel uijt. C verliest zijn ingefette d en noch een d .

ende of C tegen A i tot $5d$. B i in. C w. spel uijt

et 2^e spel zij de kans i tot $-2d$ B w. spel uijt

an C waerd x^2)

A i in. i tot z . B, A i tot $-3d$ A w. spel uijt

C i in i tot z . B, A i tot 7^3 d uijt

i tot e . A, C i tot f . C, B i tot g . B, A i tot $-3d$

B i in i tot h . A, C i tot i . C, B i tot $-4d$

A i in i tot k . B, A i tot l . A, C i tot m . C, B i tot $-5d$

A i in i tot n . C, B i tot $-6d$

A i in i tot o . C, B i tot $-7d$

A i in i tot p . C, B i tot $-8d$

A i in i tot q . C, B i tot $-9d$

A i in i tot r . C, B i tot $-10d$

A i in i tot s . C, B i tot $-11d$

A i in i tot t . C, B i tot $-12d$

A i in i tot u . C, B i tot $-13d$

A i in i tot v . C, B i tot $-14d$

A i in i tot w . C, B i tot $-15d$

A i in i tot x . C, B i tot $-16d$

A i in i tot y . C, B i tot $-17d$

A i in i tot z . C, B i tot $-18d$

A i in i tot a . C, B i tot $-19d$

A i in i tot b . C, B i tot $-20d$

A i in i tot c . C, B i tot $-21d$

A i in i tot d . C, B i tot $-22d$

A i in i tot e . C, B i tot $-23d$

A i in i tot f . C, B i tot $-24d$

A i in i tot g . C, B i tot $-25d$

A i in i tot h . C, B i tot $-26d$

A i in i tot i . C, B i tot $-27d$

A i in i tot j . C, B i tot $-28d$

A i in i tot k . C, B i tot $-29d$

A i in i tot l . C, B i tot $-30d$

A i in i tot m . C, B i tot $-31d$

A i in i tot n . C, B i tot $-32d$

A i in i tot o . C, B i tot $-33d$

A i in i tot p . C, B i tot $-34d$

A i in i tot q . C, B i tot $-35d$

A i in i tot r . C, B i tot $-36d$

A i in i tot s . C, B i tot $-37d$

A i in i tot t . C, B i tot $-38d$

A i in i tot u . C, B i tot $-39d$

A i in i tot v . C, B i tot $-40d$

Traduction:

§ 4¹).

A et B jouant la pre- i à $-2d$. A termine le jeu. C perd le d qu'il a mis et encore un d .

mière partie, ou C i à $5d$. B met i. C termine le jeu

contre A la 2^e partie; i à z . B, A i à $-2d$. B termine le jeu.

il soit x ce que vaut la A met i. i à z . B, A i à $-3d$ A termine le jeu

chance de C²) B met i i à e . A, C i à 7^3 d; jeu terminé

i à f . C, B i à g . B, A i à $-3d$

A met i i à h . A, C i à i . C, B i à $-4d$

B met i i à j . C, B i à $-5d$

A met i i à k . B, A i à $-6d$

A met i i à l . C, B i à $-7d$

A met i i à m . C, B i à $-8d$

A met i i à n . C, B i à $-9d$

A met i i à o . C, B i à $-10d$

A met i i à p . C, B i à $-11d$

A met i i à q . C, B i à $-12d$

A met i i à r . C, B i à $-13d$

A met i i à s . C, B i à $-14d$

A met i i à t . C, B i à $-15d$

A met i i à u . C, B i à $-16d$

A met i i à v . C, B i à $-17d$

comme on le vérifie facilement en consultant le petit tableau qui suit:

Numéro de la partie	Joueurs participants	Jouer en repos	Mise de chacun des joueurs en ducats			Gain ou perte de C quand le jeu finit avec cette partie	Chance que le jeu finit de cette façon	Contribution à l'avantage ou au désavantage de C
			A	B	C			
1	A, B	C	1	1	1			
2	A, C	B	1	2	1	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{2}$
3	C, B	A	2	2	1	+5	$\frac{1}{4}$	$+\frac{5}{4}$
4	B, A	C	2	2	2	-2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{2}{8}$
5	A, C	B	2	3	2	-3	$\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{16}$
6	C, B	A	3	3	2	+7	$\frac{1}{32}$	$+\frac{7}{32}$
7	B, A	C	3	3	3	-3	$\frac{1}{64}$	$-\frac{3}{64}$
8	A, C	B	3	4	3	-4	$\frac{1}{128}$	$-\frac{4}{128}$
9	C, B	A	4	4	3	+9	$\frac{1}{256}$	$+\frac{9}{256}$
10	B, A	C	4	4	4	-4	$\frac{1}{512}$	$-\frac{4}{512}$
11	A, C	B	4	5	4	-5	$\frac{1}{1024}$	$-\frac{5}{1024}$
12	C, B	A	5	5	4	+11	$\frac{1}{2048}$	$+\frac{11}{2048}$

Quant à la sommation de la suite, on peut observer d'abord que la somme des trois premiers termes est zéro, celle des trois suivantes $-\frac{1}{64}d$; continuant ainsi on trouve facilement:

$$x = -\frac{1}{64}d \left(1 + \frac{2}{8} + \frac{3}{64} + \frac{4}{512} + \dots \right).$$

En appliquant ensuite l'artifice employé par Huygens en 1665 (voir la p. 106) on a:

$$1 + \frac{2}{8} + \frac{3}{64} + \frac{4}{512} + \dots = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \dots = \frac{8}{7} \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \dots = \frac{8}{7} \times \frac{1}{8} \\ \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \dots = \frac{8}{7} \times \frac{1}{64} \\ \frac{1}{512} + \dots = \frac{8}{7} \times \frac{1}{512} \end{array} \right\} = \frac{8}{7} \times \frac{8}{7};$$

d'où il résulte que le désavantage de C au commencement du jeu est égal à $\frac{1}{49}$ d'un ducat.

§ 5¹).

$$\begin{aligned}
 & \text{in d'eerste 3} \left\{ \begin{array}{l} \text{A B spelende} \\ \text{A C} \\ \text{C B} \end{array} \right\} \text{kans van C} \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\} \\
 & \text{spullen} \\
 & \text{1^e 2^{de}} \\
 & \text{A B of A C spelende} \\
 & \text{is x} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } 3d \\ \text{A, C} \\ \text{B i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } 3d \\ \text{C, B} \\ \text{A i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } d \\ \text{B, A} \\ \text{C i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } e \\ \text{A, C} \\ \text{B i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } f \\ \text{C, B} \\ \text{A i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } g \\ \text{B, A} \\ \text{C i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } h \\ \text{A, C} \\ \text{B i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } i \\ \text{C, B} \\ \text{A i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } j \\ \text{B, A} \\ \text{C i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } k \\ \text{A, C} \\ \text{B i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } l \\ \text{C, B} \\ \text{A i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } m \\ \text{B, A} \\ \text{C i in} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 tot } n \\ \text{A, C} \\ \text{B i in} \end{array} \right\} \\
 & x \infty \frac{-d+z}{2}; z \infty \frac{3d+e}{2}; e \infty \frac{-d+f}{2}; \\
 & f \infty \frac{-2d+g}{2}; g \infty \frac{5d+h}{2}; h \infty \frac{-2d+i}{2}; i \infty \frac{-3d+k}{2}; \\
 & k \infty \frac{7d+l}{2}; l \infty \frac{-3d+m}{2}; m \infty \frac{-4d+n}{2} \\
 & -d + \frac{3d}{2} - \frac{1}{4}d - \frac{1}{16}d + \frac{5}{16}d - \frac{1}{64}d + \frac{7}{128}d - \frac{3}{256}d - \frac{1}{128}d + \frac{1}{512}n^2) \\
 & x \infty \frac{-d + \frac{3d}{2} - \frac{1}{4}d - \frac{1}{16}d + \frac{5}{16}d - \frac{1}{64}d + \frac{7}{128}d - \frac{3}{256}d - \frac{1}{128}d + \frac{1}{512}n^2)}{2}
 \end{aligned}$$

* Traduction:

§ 5¹).

$$\begin{aligned}
 & \text{dans les 3} \left\{ \begin{array}{l} \text{A B jouant} \\ \text{A C} \\ \text{C B} \end{array} \right\} \text{chance de C} \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\} \text{supposant qu'on n'ait rien mis} \\
 & \text{1^e 2^{ne}} \\
 & \text{A B ou A C jouant} \\
 & \text{valeur de x} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } -d \\ \text{A, C} \\ \text{B met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } 3d \\ \text{C, B} \\ \text{A met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } e \\ \text{B, A} \\ \text{C met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } f \\ \text{A, C} \\ \text{B met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } g \\ \text{C, B} \\ \text{A met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } h \\ \text{B, A} \\ \text{C met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } i \\ \text{A, C} \\ \text{B met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } j \\ \text{C, B} \\ \text{A met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } k \\ \text{B, A} \\ \text{C met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } l \\ \text{A, C} \\ \text{B met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } m \\ \text{C, B} \\ \text{A met i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 à } n \\ \text{B, A} \\ \text{C met i} \end{array} \right\} \\
 & x \infty \frac{-d+z}{2}; z \infty \frac{3d+e}{2}; e \infty \frac{-d+f}{2}; \\
 & f \infty \frac{-2d+g}{2}; g \infty \frac{5d+h}{2}; h \infty \frac{-2d+i}{2}; i \infty \frac{-3d+k}{2}; \\
 & k \infty \frac{7d+l}{2}; l \infty \frac{-3d+m}{2}; m \infty \frac{-4d+n}{2}
 \end{aligned}$$

¹⁾ Ce paragraphe s'occupe de la solution d'un problème qui ne diffère de celui des §§ 1 et 2 que par la circonstance que le jeu commence sans qu'il y ait une mise. Comparez encore la p. 18 de l'Avertissement.

²⁾ En sommant les termes de cette suite trois à trois on trouve $\frac{1}{8}d - \frac{1}{512}d - \frac{2}{4096}d - \frac{3}{32768}d - \dots$, c'est-à-dire (par l'artifice exposé dans la note 5 de la p. 177) $\frac{1}{8}d - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{49}d = \frac{6}{49}d$; l'avantage de C est donc $\frac{6}{49}$ d'un ducat.

Voici d'ailleurs une solution générale qui s'applique à tous les problèmes traités dans cet Appendice : Soit m la mise de chacun des trois joueurs au début du jeu et n ce que le perdant doit ajouter chaque fois à l'enjeu. Supposons d'abord qu'une ou plusieurs parties aient déjà été jouées, de sorte que l'enjeu est devenu égal à e . Nous allons calculer les espérances mathématiques des joueurs à compter de cet instant. A cet effet nous faisons remarquer que chacune de ces espérances peut être considérée comme formée par la somme de deux parties dont l'une dépend de l'enjeu actuel e et l'autre des mises éventuelles qui peuvent encore y être ajoutées avant la fin du jeu, c'est-à-dire avant que l'un des joueurs ait gagné deux parties consécutives. La première partie de ces espérances est donc proportionnelle à l'enjeu, l'autre est une constante parce que, d'après les règles du jeu, la chance que le jeu finit à un moment donné à l'avantage de l'un des joueurs est indépendante de la grandeur de l'enjeu. On peut donc poser pour l'espérance de celui qui vient de gagner : $a_1e + a_2$, pour celle de celui qui vient de perdre : $b_1e + b_2$ et, enfin, pour l'espérance de celui qui n'a pas participé à la dernière partie : $c_1e + c_2$. Or, le gagnant a une chance égale de gagner la nouvelle partie qu'il va engager et de la perdre. Au premier cas il recevra l'enjeu et la nouvelle mise n de celui qui perd cette partie; au second cas il devra mettre n et il sera ensuite dans la situation de celui qui vient de perdre, mais l'enjeu sera maintenant $e + n$. On a donc $a_1e + a_2 = \frac{1}{2}(e + n) + \frac{1}{2}[b_1(e + n) + b_2 - n] = \frac{1}{2}(b_1 + 1)e + \frac{1}{2}b_1n + \frac{1}{2}b_2$. On trouve de même : $b_1e + b_2 = \frac{1}{2}[c_1(e + n) + c_2] = \frac{1}{2}c_1e + \frac{1}{2}c_1n + \frac{1}{2}c_2$, et enfin : $c_1e + c_2 = \frac{1}{2}[a_1(e + n) + a_2] - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}a_1e + \frac{1}{2}a_1n + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}n$. On en déduit les six équations : $a_1 = \frac{1}{2}(b_1 + 1)$; $b_1 = \frac{1}{2}c_1$; $c_1 = \frac{1}{2}a_1$; $a_2 = \frac{1}{2}b_1n + \frac{1}{2}b_2$; $b_2 = \frac{1}{2}c_1n + \frac{1}{2}c_2$; $c_2 = \frac{1}{2}a_1n + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}n$; ce qui donne $a_1 = \frac{4}{7}$; $b_1 = \frac{1}{7}$; $c_1 = \frac{2}{7}$; $a_2 = \frac{5}{49}n$; $b_2 = \frac{3}{49}n$; $c_2 = -\frac{8}{49}n$. Il en résulte que l'espérance du gagnant est représentée par $\frac{4}{7}e + \frac{5}{49}n$; celle du perdant par $\frac{1}{7}e + \frac{3}{49}n$, et celle du troisième joueur par $\frac{2}{7}e - \frac{8}{49}n$. Reportons nous maintenant au commencement du jeu et soient A et B les joueurs qui engageront la première partie, C le troisième joueur, qui jouera avec le gagnant. Il est certain qu'après la première partie C sera dans la situation du joueur qui n'a pas participé à la partie et que l'enjeu sera alors $3m + n$. Son espérance mathématique au début du jeu est donc égale à $\frac{2}{7}(3m + n) - \frac{8}{49}n = \frac{6}{7}m + \frac{6}{49}n$. Pour trouver son avantage ou désavantage, dans le sens que Huygens attache à ces expressions, on doit déduire de son espérance sa mise m . On obtient donc pour cet avantage : $-\frac{1}{7}m + \frac{6}{49}n$, et, par conséquent, pour celui des autres joueurs $\frac{1}{14}m - \frac{3}{49}n$. En posant $m = d$, $n = 0$, on retrouve la solution du problème simplifié du § 3; voir la note 4 de la p. 174. Prenant $m = d$, $n = a$, on obtient la solution du problème principal proposé au § 2; voir les dernières lignes de la note 5 de la p. 177. Enfin, en supposant $m = 0$, $n = d$, on trouve l'avantage de C égal à $\frac{6}{49}d$, comme dans le premier alinéa de cette note.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1655 À 1659.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE, DE STÉRÉOMÉTRIE
ET DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

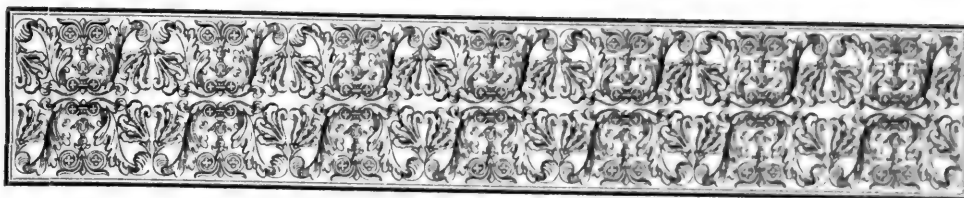
RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES NOMBRES. EQUATION DE PELL.

RECTIFICATION DE LA PARABOLE ET QUADRATURES DES SURFACES
COURBES DES CONOÏDES PARABOLIQUE, ELLIPTIQUE ET HYPERBOLIQUE.

COURBES DIVERSES. QUADRATURES. CUBATURES DES SOLIDES DE
RÉVOLUTION. CENTRES DE GRAVITÉ.

PROPRIÉTÉS DE LA CYCLOÏDE. APPLICATION À UN THÉORÈME DE
CYCLOMÉTRIE.

THÉORIE DES DÉVELOPPÉES ET DES COURBES PARALLÈLES.



Avertissement.

Aperçu général des travaux mathématiques de 1655 à 1659.

Les années 1655—1659 ont été fertiles, pour Huygens, en recherches mathématiques de genres très différents. Parmi les travaux qui datent de cette période on en trouve qui se rapportent à la théorie des nombres et surtout à l'équation dite de Pell ¹⁾; d'autres contiennent la rectification de la parabole et la quadrature des surfaces courbes des conoïdes parabolique, elliptique et hyperbolique ²⁾, ou la discussion d'un certain nombre de courbes diverses, de leur quadrature, de la cubature de leurs surfaces de révolution et de divers centres de gravité qui se présentent dans leur étude ³⁾; d'autres encore traitent, à l'occasion des problèmes sur la cycloïde proposés par Pascal, des propriétés de cette courbe ⁴⁾ et d'une application cyclométrique de l'une de ces propriétés ⁵⁾. Il y en a de très

¹⁾ Voir la Pièce N°. III (p. 212—224) avec les Appendices I (p. 225—288) et II (p. 229).

²⁾ Voir les Pièces N°. VI (p. 234—270) et N°. X (p. 314—346).

³⁾ Voir la Pièce N°. VIII (p. 273—282) qui traite des paraboles et hyperboles de divers ordres, représentées par les équations $y^a = kx^b$ et $x^a y^b = k$, avec les Appendices I (p. 283—287) et II (p. 288—293); la Pièce N°. IX (p. 294—313) qui traite de la conchoïde, de la cissoïde, du folium de Descartes et de quelques autres courbes moins célèbres, et enfin la Pièce N°. XVI qui se rapporte à la quadrature de Dinostrate (p. 407).

⁴⁾ Voir la Pièce N°. XI (p. 347—376) avec l'Appendice (p. 377—378).

⁵⁾ Voir la Pièce N°. XIII (p. 381—383).

importants qui exposent et appliquent la théorie des développées et des courbes parallèles ¹⁾ et d'autres plus élémentaires qui donnent la solution d'un problème, ou bien la démonstration d'un théorème, d'arithmétique ²⁾, de planimétrie ³⁾, de stéréométrie ⁴⁾ ou de géométrie analytique ⁵⁾.

Il ne semble pas nécessaire d'analyser ici toutes ces Pièces. Nous nous bornons donc à parler des principales. D'ailleurs pour les autres les notes que nous y avons ajoutées suffiront pour en faire connaître la genèse et la portée.

Difons encore que beaucoup des résultats les plus importants trouvés par Huygens pendant l'époque qui nous occupe ont été publiés par lui dans son „*Horologium oscillatorium*” de 1673; mais sans démonstrations et sans faire connaître aucunement la manière dont ils furent obtenus. Or, les Pièces qui suivent fournissent les démonstrations qui manquent dans cet ouvrage, et jettent une vive lumière sur les méthodes employées par Huygens pour découvrir les résultats qu'il y énonce.

Recherches sur la théorie des nombres. Équation dite de Pell.

Huygens n'a été que rarement sous l'influence du charme que la théorie des nombres a exercé sur tant de mathématiciens célèbres. On peut même dire que s'il s'est occupé quelquefois de cette théorie, c'était un peu malgré lui.

Ainsi, en mai 1656, Huygens écrit à Mylon ⁶⁾, qui lui fait parvenir deux problèmes de Fermat sur les nombres, que ces problèmes „sont tout a fait beaux dans le gendre, et mal aisez à refoudre,” qu’ „au moins ils me semblent tels a moy qui

¹⁾ Voir la Pièce N°. XV (p. 387—405) et l'Appendice (p. 406).

²⁾ Voir la Pièce N°. XIV (p. 384—386), où Huygens s'occupe d'un problème d'arithmétique publié par Eversdyck.

³⁾ Voir dans la Pièce N°. I (p. 208—209) la solution d'un problème élémentaire sur le triangle, proposé par Johan de Witt; dans la Pièce N°. VII (p. 271—272) celle d'un cas particulier, proposé par Pascal, du problème de décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés; enfin dans la Pièce N°. V (p. 232—233) une démonstration du théorème de Pythagore qui diffère de toutes les démonstrations connues en 1914, date où elle fut publiée dans l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 232.

⁴⁾ Voir la Pièce N°. XII (p. 379—380), où Huygens donne la démonstration d'un théorème de Wallis sur le volume d'un tronc de pyramide ou de cône.

⁵⁾ Voir la Pièce N°. II (p. 210—211) qui traite du problème de Pappus pour quatre lignes, et la Pièce N°. IV (p. 230—231) de nature très élémentaire, qui analyse l'équation cartésienne de la ligne droite et du cercle.

ne me suis gueres exercé dans les questions des nombres, parce que j'ay toujours pris plus de plaisir à celles de Geometrie. Toutefois j'essayeray encore si j'en puis devenir maître". Deux années plus tard, en septembre 1658, il s'exprime bien plus fortement dans une lettre à Wallis en disant qu'il ne comprend pas qu'on s'occupe avec tant d'animation de ces sortes de problèmes auxquels on ne devrait consacrer „les bonnes heures" que lorsque les questions importantes comme on en trouve tant dans la géométrie viendraient à manquer ⁷⁾. Et Huygens a persévéré longtemps dans cette attitude ⁸⁾. C'est seulement vers la fin de sa vie qu'il communique à Leibniz un jugement plus favorable lorsqu'il lui écrit ⁹⁾: „Dans la recherche des nombres, le plus utile seroit de s'arrester aux Theoremes dont il y en a des beaux et qui peuvent servir dans des rencontres".

Quel est donc le motif qui a poussé Huygens en 1657 et 1658 à s'occuper plus activement de problèmes sur les nombres? Il nous le révèle dans une de ses lettres ¹⁰⁾, où l'on lit: „Je n'adjousteray rien touchant le traité de Monsieur Frenicle ¹¹⁾ si non que je suis marry de n'avoir pas sceu, auparavant que de veoir la solution de ces problemes, que Monsieur de Fermat la jugeoit de telle importance. Car encore que je ne me fois jamais guere appliqué aux questions purement arithmetiques je n'aurais pas laissé d'entreprendre celles cy, afin de meriter s'il m'eust esté possible l'estime de ce grand homme" ¹²⁾.

⁶⁾ Voir la p. 426 du T. I.

⁷⁾ „Nesciveram equidem de Problematis illis Arithmeticiis tantis animis inter vos decertari. Quin imo idem de ijs sentiebam quod te quoque sæpius expressisse video, non debere bonas horas talibus impendi nisi cum potiora deessent, quæ sane in geometricis offeruntur plurima" (p. 211 du T. II).

⁸⁾ Voir encore une lettre du 31 août 1662 où on lit (p. 215 du T. IV). „Les questions que vous m'avez envoiees ne meritent pas qu'on s'y amuse n'estant aucunement belles ny utiles a rien. cela vient de quelque arithmeticien et non pas d'un Geometre". Il est vrai que les questions, qu'on trouve à la p. 211 du T. IV, n'avaient pas beaucoup d'importance.

⁹⁾ Voir la lettre du 16 novembre 1691, p. 190 du T. X.

¹⁰⁾ Voir la lettre du 7 mars 1658, p. 146 du T. II.

¹¹⁾ Il s'agit d'un petit traité de Frenicle, mentionné plusieurs fois dans le „Commercium epistolicum" de Wallis (voir les pp. 802, 807, 821 et 832 du „Volumen alterum", cité dans la note 10, p. 9 du présent Tome) et qui semble perdu. D'après Cantor, p. 784 du T. II des „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", édition de 1900, il fut imprimé à Paris en 1657 et portait le titre „Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos quæ tanquam insolubilia Universis Europæ Mathematicis a clarissimo viro D. Fermat sunt proposita et a D. B[ernard] F[renicle] D[e] B[essy] inventa".

¹²⁾ On trouve un jugement plus réservé de Huygens sur Fermat dans une lettre du 4 octobre 1658 à Van Schooten (p. 235 du T. II) où Huygens s'associe à l'opinion exprimée sur lui par van Schooten et Descartes (voir les p. 221—222 du T. II).

Ajoutons qu'une fois lancé dans cette voie, qui n'était pas de celles qu'il préférait suivre mais où ses relations avec les géomètres français de son époque l'avaient poussé, il n'a pas manqué de faire des remarques ingénieuses sur l'équation de Pell, d'inventer un bel algorithme pour trouver le résidu de la division d'un grand nombre p. e. par le nombre 7 ¹⁾ et d'indiquer de nouveaux caractères pour reconnaître si un nombre donné est un non-carré ²⁾.

Déjà en 1646 le père Mersenne tâcha, mais avec peu de succès, d'intéresser le jeune Huygens, âgé alors de dix-sept ans, aux problèmes sur les nombres ³⁾.

En 1656, après son premier séjour à Paris ⁴⁾, l'influence des mathématiciens français commence à se faire sentir. Il croit être agréable à Mylon en lui mandant ⁵⁾ que van Schooten lui a „montré une règle de Monsieur des Cartes ⁶⁾ pour trouver des nombres qu'on appelle *amicables*”. Il s'est lui-même appliqué à cette recherche et il veut savoir si Mylon a quelque règle semblable ⁷⁾.

Nous ne savons pas quels étaient ces deux problèmes de Fermat envoyés en mai 1656 dont il fut question plus haut ⁸⁾. Ce ne fut qu'en mars de l'année suivante

¹⁾ Voir les p. 218—224 et comparez la méthode de Pascal décrite dans la note 1 de la p. 220.

²⁾ Voir les pp. 217, 218, 220—223 et 229.

³⁾ Voir les lettres de Mersenne de septembre 1646 (p. 19—20 du T. I), du 8 décembre 1646 (p. 46—47) et du 8 janvier 1647 (p. 53—54 du même Tome) et la réponse de Huygens à l'une d'elles du 23 décembre 1646 (p. 557—558 du T. II). On trouve les premières recherches, peu importantes, de Huygens sur des questions de nombres aux pp. 9, 45 et 259—260 du T. XI. Elles datent de 1646 et de 1650.

⁴⁾ Voir sur ce séjour les p. 3—4 du présent Tome.

⁵⁾ Voir sa lettre du 15 mars 1656, p. 391 du T. I.

⁶⁾ On trouve cette règle aux p. 423—424 de l'ouvrage de van Schooten mentionné à la p. 5 du présent Tome.

⁷⁾ Voyez la réponse de Mylon et la règle qui l'accompagnait aux pp. 400 et 405—406 du T. I et consultez encore la p. 438 du même Tome. Ajoutons que les deux règles ne diffèrent pas essentiellement puisqu'on a $(3 \cdot 2^n - 1) (6 \cdot 2^n - 1) + (3 \cdot 2^n - 1) + (6 \cdot 2^n - 1)$ [Frenicle] = $= 18 \cdot 2^n - 1$ [Descartes].

⁸⁾ Voir le dernier alinéa de la p. 184. Il serait intéressant de connaître ces problèmes. Huygens écrit encore à leur propos à de Carcavy (p. 428 du T. I) qu'ils „sont de bien difficile recherche” et qu'il douterait „presque s'il y auroit moyen de trouver d'autres tels nombres autrement que par hasard, si l'on ne m'asseuroit que Monsieur de Fermat en a des règles certaines, lesquelles je croy pourtant estre de cette sorte, qu'il faille premièrement chercher

que Huygens reçut le célèbre problème qui a occupé tant de mathématiciens⁹⁾, savoir celui de trouver des nombres entiers satisfaisant à l'équation $au^2 + 1 = v^2$, où a est un nombre entier donné; équation à laquelle on a associé bien à tort le nom de Pell¹⁰⁾.

Voici les résultats obtenus par Huygens dans ses recherches sur cette équation: 1°. il montra que chaque solution de l'une des équations $au^2 - 1 = v^2$; $au^2 - 2 = v^2$; $au^2 + 2 = v^2$ en amène une autre de l'équation en question¹¹⁾; 2° il remarqua qu'il en est de même pour chaque solution d'une équation $au^2 \pm k = v^2$, pourvu que k satisfasse à une certaine condition¹²⁾; 3°. il indiqua une solution dans les cas particuliers où $a = p^2 \pm 1$, ou $p^2 \pm 2$ ¹³⁾; 4°. il montra qu'ayant trouvé une solution quelconque de l'équation de Pell on en peut déduire une infinité d'autres¹⁴⁾.

On voit donc, qu'excepté dans les cas particuliers prémentionnés, Huygens n'avait d'autre moyen, pour trouver une solution d'une équation de Pell donnée, que d'essayer diverses valeurs de u l'une après l'autre afin d'examiner si elles satisfaisaient à l'équation de Pell elle-même ou à l'une des équations auxiliaires. Il est vrai que, dans cette besogne, les caractères qu'il avait trouvés¹⁵⁾ pour reconnaître très vite dans un grand nombre de cas qu'un nombre donné est un non-carré, lui pouvaient être utiles; mais cela n'empêchait pas que sa méthode ne fût très laborieuse et ne pût pas servir dans les cas fréquents¹⁶⁾ où la plus petite

quelque nombre a l'avanture, comme dans les règles qu'on a donné pour les nombres parfaits et amicaux.

Ou bien étaient-ce après tout les deux problèmes du premier défi de Fermat aux mathématiciens du 3 janvier 1657? Voir les p. 12—13 de notre T. II, ou les p. 332—333 du T. II des „Œuvres de Fermat”, citées dans la note 1 de la p. 3 du présent Tome.

⁹⁾ Comparez la note 5 de la p. 213.

¹⁰⁾ Voir p. e. la p. 777 de l'ouvrage de Cantor cité dans la note 9 de la p. 21.

¹¹⁾ Voir les pp. 214 et 215.

¹²⁾ On doit prendre pour cette condition que k soit un facteur de $2uv$ (et non de $2u^2$ comme Huygens l'indique). En effet, soient u_1 et v_1 des nombres entiers qui satisfont à l'équation

$$au^2 \pm k = v^2, \text{ il sera satisfait à l'équation } au^2 + 1 = v^2 \text{ par les valeurs } u = \frac{2u_1v_1}{k}; v =$$

$$= \frac{2v_1^2}{k} \mp 1. \text{ Comparez la note 1 de la p. 214.}$$

¹³⁾ Voir la p. 215.

¹⁴⁾ Voir la p. 215—216.

¹⁵⁾ Comparez la note 2.

¹⁶⁾ Comparez la table de Frenicle aux p. 30—32 du T. II.

solution est un nombre assez grand. Sans doute Fermat et Frenicle possédaient des méthodes plus puissantes, mais ils ont eu le tort de ne pas les faire connaître ¹⁾.

Or, ayant reçu, en septembre 1658, le „Commercium epistolicum” de Wallis ²⁾, Huygens y trouva une méthode due à Brounker qui conduit au but avec sûreté, même dans les cas les plus compliqués, comme p. e. dans celui de $a = 109$, où la plus petite solution égale 15140424455100 ³⁾.

Quoique cette méthode soit encore loin de l'élégance et de la perfection obtenues plus tard dans cette matière par les mathématiciens modernes ⁴⁾, on comprend que Huygens, après en avoir éprouvé l'efficacité, ne manqua pas de témoigner à Wallis de son admiration pour cette invention, tout en y apportant, bien à raison, cette restriction: qu'il n'en résulte pas, comme Wallis le prétendait, que chaque équation de Pell doit admettre une solution ⁵⁾.

Rectification de la parabole et quadrature des surfaces des conoïdes parabolique, elliptique et hyperbolique.

Les problèmes de la rectification de la parabole et de la quadrature de la surface du conoïde parabolique étaient présents dans les esprits des mathématiciens au temps où Huygens commença sa carrière scientifique.

En 1646 déjà, lorsqu'il était âgé de 17 ans, il rencontra dans les „Cogitata physico-mathematica” de Mersenne ⁶⁾ une fausse quadrature de la surface du conoïde parabolique ⁶⁾.

De même, en 1656, Huygens reconnut la fausseté de la rectification de la parabole, proposée par Hobbes ⁷⁾.

¹⁾ Fermat n'a donné sur sa méthode qu'une indication vague qu'on trouve à la p. 460 du T. II. Quant à Frenicle, Wallis nous dit expressément (p. 832 du „Volumen alterum”, cité dans la note 10 de la p. 9) que dans le traité mentionné dans la note 11 de la p. 185, Frenicle ne révéla pas sa méthode, quoiqu'on y trouvât (voir la p. 821 du „Volumen alterum”) la table citée dans la note précédente qu'il y prolongea jusqu'au nombre 150.

²⁾ Voir la p. 211 du T. II.

³⁾ Voir sur cette méthode les p. 227—228.

⁴⁾ Voir p. e. les p. 600—602 du T. I de l'„Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Leipzig, Teubner, 1900—1904”.

⁵⁾ Voir la p. 99 de l'ouvrage de 1644, cité dans la note 2 de la p. 34 du T. I.

⁶⁾ Voir la minute d'une lettre à Mersenne, p. 34 du T. I.

⁷⁾ Consultez les pp. 392 et 440 du T. I.

Ainsi l'on comprend que, lorsque, le 27 octobre 1657, il trouva la solution des deux problèmes pour autant qu'elle était possible, savoir leur réduction respectivement à la quadrature de l'hyperbole et à celle du cercle, il fit sortir de sa plume le fameux „εὕρηκα”⁸⁾ dont il avait coutume de marquer dans ses manuscrits les endroits où il venait d'exposer une découverte importante. Ensuite il se mit à rédiger à la mode archimédienne les démonstrations des théorèmes qu'il avait trouvés⁹⁾; sans doute avec l'intention de les faire paraître dans un nouveau traité géométrique du genre de ceux qu'il avait déjà publiés. Vers le même temps il communiqua à de Sluse¹⁰⁾ et à van Schooten¹¹⁾ les résultats de sa quadrature de la surface du conoïde parabolique pour quelques cas particuliers, sans toutefois leur faire connaître ni sa méthode, ni la solution du cas général.

De la lettre qu'il avait reçue, van Schooten donna lecture à van Heuraet¹²⁾. Huygens nous assure¹³⁾, et il n'y a pas lieu d'en douter, que ce fut cette lecture qui inspira à van Heuraet son article „De transmutatione curvarum linearum in rectas”¹⁴⁾, où, en trois pages, il expose une méthode générale pour réduire la rectification d'une courbe à la quadrature d'une autre et l'applique à la rectification de la parabole cubique et à la réduction de celle de la parabole ordinaire à la quadrature de l'hyperbole.

À la suite de cette communication, van Heuraet fit bientôt parvenir à Huygens sa solution à lui du problème de la quadrature de la surface du conoïde parabolique¹⁵⁾. Elle correspond à celle de Huygens pour le fond, mais en diffère beaucoup par la forme¹⁶⁾. Or, Huygens avait obtenu son résultat d'une manière assez détournée, moitié algébrique, moitié géométrique, se basant sur une propriété

⁸⁾ Voir les p. 234—236 du présent Tome et surtout la Fig. 1 de la p. 234 où l'εὕρηκα et la date de la découverte furent inscrits.

⁹⁾ Voir sa lettre à de Sluse du 2 novembre 1657, p. 80 du T. II, où l'on lit: „Circa parabolam ante paucos dies duobus novis, ut mihi quidem videntur ac præclaris inventis potitus sum, quibus conscribendis summo studio nunc incumbo”. On trouve le résultat de ce travail aux p. 237—270 du présent Tome.

¹⁰⁾ Voir sa lettre du 20 déc. 1657, p. 104 du T. II.

¹¹⁾ Voir sa lettre du 28 déc. 1657, p. 112—113 du T. II.

¹²⁾ Voir la lettre de Van Schooten à Huygens du 4 février 1658, p. 129—130 du T. II.

¹³⁾ Voir la p. 72 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium.”

¹⁴⁾ L'article parut dans l'édition de 1659 de la „Geometria” de Descartes par van Schooten; voir les p. 518—520.

¹⁵⁾ Voir la p. 131 du T. II.

¹⁶⁾ Comparez la note 6 de la p. 265 et la note 5 de la p. 315.

de la suite des nombres carrés impairs 1, 9, 25, etc., et, en fin de compte, sur la cubature du conoïde hyperbolique obtenue déjà par Archimède ¹⁾. Il n'était pas probable que van Heuraet eût suivi la même voie. Il fallait donc qu'il en existât une autre plus directe et Huygens ne tarda pas à la découvrir; en la suivant il retrouva le résultat de van Heuraet dans la forme même dans laquelle celui-ci l'avait énoncé ²⁾. De plus, il aperçut que la méthode qu'il venait de trouver pouvait s'appliquer également à la quadrature des surfaces des conoïdes hyperboliques et elliptiques.

En effet, la nouvelle méthode apprenait à réduire la quadrature de la surface de révolution engendrée par une courbe méridienne donnée à la quadrature d'une courbe plane. Lorsque la première courbe était une parabole, la courbe adjointe l'était également ³⁾; lorsqu'elle était une hyperbole ou une ellipse l'adjointe était, dans le premier cas une hyperbole ⁴⁾, dans le second, selon les circonstances, une hyperbole ⁵⁾ ou une ellipse ⁶⁾. Cela signifiait qu'on pouvait réduire la détermination du rayon d'un cercle dont l'aire est égale à celle de la surface d'un conoïde hyperbolique ou elliptique, ou bien à la quadrature de l'hyperbole et, par conséquent, aussi à la rectification de la parabole, ou bien à la quadrature du cercle. C'était là une invention importante qui valait la peine d'être poursuivie en détail. Et, en effet, Huygens réussit bientôt à trouver des constructions très élégantes pour le rayon de ce cercle d'aire égale ⁷⁾.

Évidemment ces nouvelles découvertes méritaient d'être inférées dans le traité que Huygens avait projeté. Mais une difficulté se présenta. Jusqu'ici, en rédigeant ses ouvrages géométriques, Huygens avait toujours suivi scrupuleusement dans ses démonstrations la méthode des anciens de laquelle il donne, dans une annotation de 1659 ⁸⁾, une analyse, remarquable par sa généralité. Or, pour appliquer cette méthode on devait circonscrire aux grandeurs en question (longueurs, aires ou volumes) d'autres qui ne les surpassent que d'une quantité

¹⁾ Voir la note 4 de la p. 235 et la note 2 de la p. 236.

²⁾ Voir la p. 314.

³⁾ Voir le § 1 de la pièce N.° X, p. 314.

⁴⁾ Voir le § 2, p. 315—316.

⁵⁾ Voir le § 3, p. 317—319.

⁶⁾ Voir le § 4, p. 320—324. Le cas intermédiaire est celui où la courbe méridienne est un cercle auquel cas la courbe adjointe est formée par deux droites parallèles.

⁷⁾ Voir les pp. 319, 323 et 336.

⁸⁾ Voir le premier alinéa de la p. 338.

aussi petite qu'on le veut, et on devait prouver rigoureusement qu'il en est ainsi, en partant de postulats bien définis⁹⁾. Par des artifices souvent très ingénieux¹⁰⁾, Huygens avait réussi jusqu'à présent à satisfaire à ces exigences, mais il prévoyait que pour les résultats nouvellement obtenus cela demanderait un travail très pénible et d'une valeur douteuse. Il se décida donc à une sorte de compromis¹¹⁾; c'est-à-dire il résolut de se servir quelquefois des „indivisibles”¹²⁾, se bornant en ce cas à fournir non pas une démonstration rigoureuse, mais seulement „le fondement d'une telle démonstration, de sorte qu'après l'avoir examiné ceux qui s'y connaissent ne sauraient douter de la possibilité d'une démonstration rigoureuse”. Toutefois il ne changera pas les parties qu'il a déjà rédigées¹³⁾. Elles pourront „servir de preuve et en quelque sorte d'exemple pour montrer que les autres parties auraient pu être arrangées de la même façon¹⁴⁾”.

⁹⁾ Dans ses recherches sur les longueurs des lignes courbes et les aires des surfaces courbes, Huygens se sert constamment des postulats d'Archimède sur les courbes qui ont les mêmes points terminaux, et les surfaces qui se terminent à un même contour. On trouve ces postulats dans les notes 5 des pp. 237 et 255. Certes, les mathématiciens modernes n'acceptent pas volontiers des postulats si compliqués. Ils les réduisent à de plus simples. Mais on n'en admire pas moins ce qu'Archimède et d'autres ont bâti sur ces fondements.

¹⁰⁾ Voir par exemple le „Lemme II,” p. 247 où Huygens démontre que les segments successifs GHA, etc. de l'Hyperbole de la Fig. 9 deviennent de plus en plus petits à mesure qu'on s'éloigne du sommet A.

¹¹⁾ Voir la p. 337.

¹²⁾ On peut consulter sur l'opinion de Huygens concernant la méthode des indivisibles de Cavalieri les pp. 131, 561, 132 et 133 du T. I.

¹³⁾ Outre les p. 237—270, qui traitent de la rectification de la parabole et de la quadrature de la surface du conoïde parabolique, Huygens avait probablement en vue les parties les plus élaborées de la Pièce N°. VIII et de ses deux Appendices (p. 273—293) qui traitent des paraboles et des hyperboles de divers degrés.

¹⁴⁾ Voici, en entier, la traduction de l'annotation latine de la p. 337, d'où nous avons cité ces passages: „Quelquefois par les indivisibles. Mais on se trompe, lorsqu'on veut faire passer leur emploi pour une démonstration. D'ailleurs, pour convaincre ceux qui s'y connaissent il revient presque au même de donner une démonstration formelle ou bien le fondement d'une telle démonstration, de sorte, qu'après l'avoir examiné, ils ne sauraient douter de la possibilité d'une démonstration rigoureuse. J'avoue, il est vrai, que c'est aussi à la façon de donner à cette dernière une forme convenable afin qu'elle soit claire, élégante, et plus appropriée que toute autre, qu'on reconnaît la science et la sagacité de l'auteur, comme dans toutes les œuvres d'Archimède. Néanmoins, ce qui vient en premier lieu, et ce qui importe surtout, c'est la manière même dont l'invention a été obtenue. C'est cette connaissance qui réjouit le plus et qu'on demande aux savants. Il semble donc préférable de suivre la méthode par laquelle elle est aperçue le plus vite et le plus clairement, et comme posée devant les yeux. Nous nous épargnons ainsi du travail en écrivant, et les autres en lisant; il faut consi-

Conformément à ces intentions Huygens rédigea la partie du traité projeté qui se rapporte à l'étude détaillée des courbes adjointes de la parabole, de l'hyperbole et de l'ellipse¹⁾. Ensuite il cessa de s'en occuper; probablement parce que la première ardeur de l'invention était passée et qu'il était attiré par d'autres travaux²⁾. Enfin, en 1673, il se contenta de donner dans son „*Horologium oscillatorium*”³⁾ les principaux résultats qu'il avait obtenus, sans y joindre de démonstrations; ce qu'il jugea alors d'autant moins nécessaire que Wallis avait publié dans ses „*Tractatus duo*” de 1659, les quadratures de surfaces courbes de conoïdes avec les déductions⁴⁾.

Nous n'avons pas encore parlé de la deuxième Partie (p. 324—334) de la Pièce N.° X; elle occupe une place à part dans les recherches de Huygens sur la quadrature des surfaces des conoïdes hyperboliques et elliptiques.

Soit, afin d'en montrer la portée, h , la hauteur, S , l'aire de la surface courbe d'un conoïde elliptique découpé d'un sphéroïde aplati dont $2a$, est le plus grand axe et $2b$, le plus petit, qui est l'axe de révolution; soit de plus h , la hauteur d'un

dérer, en effet, que les savants finiront par ne plus trouver le temps de prendre connaissance de la grande quantité des inventions des Géomètres (quantité qui va en croissant de jour en jour et qui semble dans cet âge de science devoir prendre des développements immenses) si les auteurs continuent à se servir de la méthode prolix et rigoureuse des anciens.

Dans les parties précédentes, qui furent déjà rédigées autrefois, nous avons pourtant conservé cette méthode; elles peuvent servir de preuve et en quelque sorte d'exemple pour montrer que les autres parties auraient pu être arrangées de la même façon”.

Il est intéressant de comparer cette annotation de Huygens à la préface du „*Traité de la Méthode*” d'Archimède, découvert en 1906 par Heiberg; voir les p. 426—431 du Vol. 2 de l'ouvrage: „*Archimedis Opera omnia iterum edidit J. L. Heiberg, 1910—1913, Lipsiæ, Teubner.*”

¹⁾ Voir les p. 338—346.

²⁾ Dans la même année 1658 Huygens publia son „*Horologium*” et prépara le „*Systema Saturnium*”. Comparez encore sa lettre à Kinner à Löwenthorn du 30 octobre 1659 (p. 503 du T. II) et celle à Léopoldo de Medicis du 19 novembre 1667 (p. 162 du T. VI).

³⁾ Consultez les p. 73—79 de l'édition originale.

⁴⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 518 du T. II. On trouve les quadratures en question aux pp. 555—556 et 558—559 du „*Volumen primum*” des „*Opera mathematica*” de Wallis, „*Oxonix, 1695. E Theatro Sheldoniano*”. Remarquons que la méthode de Wallis est beaucoup plus compliquée que celle des courbes adjointes, suivie par Huygens, et que ses résultats sont formulés tout autrement que ceux de Huygens.

conoïde hyperbolique, S_1 l'aire de la surface courbe appartenant à un hyperboloïde dont $2a_1$ est l'axe réel et de révolution, et $2b_1$ l'axe imaginaire.

Pofons encore $x_1 = b_1 - h_1$; $c_1^2 = a_1^2 - b_1^2$; $x_2 = a_2 + h_2$; $c_2^2 = a_2^2 + b_2^2$. On a alors:

$$S_1 = \pi \left[a_1^2 - \frac{a_1 x_1}{b_1^2} \sqrt{c_1^2 x_1^2 + b_1^4} - \frac{a_1 b_1^2}{c_1} \cdot \frac{c_1 x_1 + \sqrt{c_1^2 x_1^2 + b_1^4}}{b_1 (c_1 + a_1)} \right],$$

$$S_2 = \pi \left[\frac{b_2 x_2}{a_2^2} \sqrt{c_2^2 x_2^2 - a_2^4} - b_2^2 + \frac{a_2^2 b_2}{c_2} \cdot \frac{c_2 x_2 - \sqrt{c_2^2 x_2^2 - a_2^4}}{a_2 (c_2 - b_2)} \right].$$

Si l'on prend la somme $S_1 + S_2$ de ces expressions, il est évident que dans certains cas les termes logarithmiques peuvent disparaître, de sorte que l'expression pour $S_1 + S_2$ devient purement algébrique.

Or, dans la Partie qui nous occupe, Huygens a réussi à découvrir un de ces cas par des raisonnements géométriques. Pour y parvenir, il suppose en premier lieu que la courbe méridienne LOTM⁵⁾ du sphéroïde aplati, de révolution autour de OM, et celle HGB du conoïde hyperbolique, de révolution autour de TK, possèdent la même courbe adjointe RXT.

Dans nos notations cela conduit aux relations:

$$a_1 = \frac{a_2^2}{c_2}, \quad \frac{b_1^2}{c_1} = b_2,$$

et l'on remarquera que ces relations amènent l'égalité des coefficients $\frac{a_1 b_1^2}{c_1}$ et $\frac{a_2^2 b_2}{c_2}$

des termes logarithmiques dans les expressions pour S_1 et S_2 .

Ensuite Huygens emploie une construction que nous allons expliquer. Consi-

⁵⁾ La figure à côté correspond à la Fig. 8, p. 324, de Huygens; mais nous y avons ajouté la ligne XT' et la ligne L'S'K'T' qui se termine au point T' de l'hyperbole TR et qui coupe l'ellipse LL'OT au point K'.

Ce cas exige $BS = OX$, c'est-à-dire $a_2 = \frac{a_1^2}{b_1}$. Combinée avec $b_2 = \frac{b_1^2}{c_1}$ et avec $a_1 = \frac{a_2^2}{c_2}$ ⁴⁾, cette relation nous donne :

$$a_2^2 + b_2^2 = \frac{a_1^4}{b_1^2} + \frac{b_1^4}{c_1^2} = c_2^2 = \frac{a_2^4}{a_1^2} = \frac{a_1^6}{b_1^4},$$

ou bien :

$$a_1^4 b_1^2 c_1^2 + b_1^8 = a_1^6 c_1^2,$$

ou enfin :

$$b_1^8 = a_1^4 c_1^4.$$

De cette dernière équation on déduit $b_1^4 = a_1^4 - a_1^2 b_1^2$; ce qui donne $b_1^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})a_1^2$.

Si l'on écrit cette dernière équation sous la forme : $\frac{b_1^2}{a_1} = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})a_1$, elle nous dit que le „latus rectum” de l'ellipse LOTM (par rapport à l'axe LT) est le plus grand segment de cet axe divisé en extrême et moyenne raison; résultat dont Huygens ne manqua pas de faire mention dans l'„Horologium oscillatorium” ⁵⁾.

Ajoutons encore, avant de passer à d'autres sujets, que déjà le 15 février 1658 ⁶⁾, Huygens donna à de Sluse un aperçu de ses nouvelles découvertes, y comprise celle que nous venons d'expliquer. Il fit suivre cet aperçu le 26 février ⁷⁾ par une description des constructions qui servent à la quadrature des sphéroïdes avec la recommandation de ne pas les montrer à d'autres personnes. Toutefois, l'année suivante, il résolut de faire „connaître partout” son théorème sur la rectification de la parabole ⁸⁾. Il le fit, en effet, en y joignant ses inventions sur la quadrature des surfaces des conoïdes et sphéroïdes, en janvier et février 1659, à de Carcavy, à Wallis, à Pascal, à van Schooten et à Boulliau ⁹⁾ et, encore, en septembre et octobre 1659, à Grégoire de St. Vincent et à Kinner à Löwen-

⁶⁾ Voir la p. 134 du T. II.

⁷⁾ Voir la p. 141 du T. II.

⁸⁾ Comparez sa lettre à de Sluse du 14 janvier 1659, p. 313 du T. II.

⁹⁾ Voir les pp. 316, 330, 341, 344 et 366 du T. II.

thurn ¹⁾). Évidemment Huygens croyait avoir trouvé ainsi le moyen le plus efficace de se réserver la priorité de ses découvertes, en attendant qu'il aurait le loisir de les publier. Aussi fait-il un appel, dans l'„Horologium oscillatorium” ²⁾, à sa correspondance avec de Sluse, Pascal, Wallis et d'autres pour constater cette priorité.

Nous avons déjà vu quel a été l'effet de la communication à Wallis ³⁾. Pascal loua beaucoup les inventions de Huygens dans une lettre à de Carcavy ⁴⁾ et dans la „Lettre de A. Dettonville à Monsieur Huguens de Zulichem” ⁵⁾ qu'il publia en février 1659. En même temps il fit parvenir à Huygens une esquisse de sa méthode pour la solution du cas du conoïde parabolique, en y ajoutant que les cas du conoïde hyperbolique et des sphéroïdes lui semblaient bien difficiles; „ainfy” poursuivit-il „ie n'y penseray pas seulement car ie suis persuadé qu'il y a pluſtot du blame que de l'honneur à accquerir en trauaillant sur les ouurages d'autrui et principalement quand ils ſont traittez par des perſonnes excellentes comme Monsieur Huguens” ⁶⁾.

À Fermat Huygens avait seulement fait demander par l'intermédiaire de de Carcavy ⁷⁾ si sa méthode s'étendait à trouver la dimension des surfaces courbes des conoïdes et des sphéroïdes. Fermat répondit affirmativement et afin que Huygens n'en pût douter il donna quelques indications sur les résultats, assurant qu'il les avait obtenus sans connaître ceux de Huygens ⁸⁾. Il ajouta qu'il avait trouvé de même la quadrature de la surface courbe engendrée par la révolution d'une parabole autour de son appliquée ⁹⁾; savoir qu'elle se réduit à la quadrature de l'hyperbole.

¹⁾ Voir les pp. 485 et 500—503 du T. II.

²⁾ Voir les p. 72—73 de l'édition originale.

³⁾ Voir le premier alinea de la p. 192.

⁴⁾ Voir la p. 348 du T. II où la p. 182 du T. 9 des „Œuvres de Blaise Pascal publiées suivant l'ordre chronologique avec documents complémentaires, introductions et notes par Léon Brunschvigg et Pierre Boutroux, Paris, Hachette, 14 vol., 1908—1914”. On y lit: „Pour ces autres problemes touchant la dimension des surfaces des conoïdes Je les admire au dela de tout ce que ie puis vous dire, ce ſont certainement d'admirablement belles choses”.

⁵⁾ Voir les p. 396—397 du T. II, ou la p. 189 du T. 9 des „Œuvres” de Pascal. Il s'agit de l'ouvrage cité sous la lettre β dans la note 32 de la p. 307 du T. II.

⁶⁾ Voir les p. 349—350 du T. II ou bien les p. 183—186 du T. 9 des „Œuvres” de Pascal.

⁷⁾ Probablement dans la lettre de 4 septembre 1659, dont nous ne possédons que le sommaire; voir la p. 474 du T. II.

⁸⁾ Voir les p. 539—540 du T. II.

⁹⁾ Comme p. e. la parabole ABC de la Fig. 7 de la p. 244 autour de la corde AC.

À ce propos Huygens écrivit à de Carcavy ¹⁰⁾ qu'il croyait bien que „Monsieur de Fermat n'avoit veu" aucune de ses propositions „puis qu'il l'affure", mais que „d'autres peut estre seraient plus incredules, si en les donnant au public il n'allegue celui a qui il les aie fait veoir auparavant. La mesure de la superficie du conoïde que fait la parabole autour de l'appliquée laquelle il promet en supposant la quadrature de l'hyperbole fera quelque chose de nouveau si elle est vraie".

En réponse de Carcavy rassura Huygens sur les intentions de Fermat ¹¹⁾ et lui fit parvenir ¹²⁾ de la part de celui-ci le résultat de la quadrature en question, laquelle fut trouvée „subtile" par Huygens qui pria de Carcavy d'exhorter Fermat à publier sa méthode si elle était nouvelle ¹³⁾.

Recherches sur les paraboles et hyperboles de divers degrés, sur la conchoïde, la cissoïde et sur d'autres courbes. Tangentes, quadratures, cubatures des solides de révolution, centres de gravité.

Nous ne dirons que peu de mots à propos des recherches qu'on trouve dans les Pièces N°. VIII et N°. IX ¹⁴⁾.

Dans la „Præfatio" du „Tractatus mechanicus" de Mersenne ¹⁵⁾ Huygens avait rencontré un grand nombre de résultats concernant les tangentes et les quadratures des courbes $y^a = kx^b$, les cubatures des solides de révolution, engendrés par leurs segments, et les centres de gravité de ces segments ¹⁶⁾ et de ces solides; mais tout cela sans démonstrations ni déductions. Ces résultats étaient dus, comme Mersenne l'affure, à deux savants qu'il ne nomme pas, mais dont l'un était probablement Roberval et l'autre certainement Fermat ¹⁷⁾.

Or, dans la Pièce N°. VIII, Huygens s'applique à vérifier et à étendre ces

¹⁰⁾ Voir sa lettre du 26 février 1660 à la p. 27 du T. III.

¹¹⁾ Voir la lettre du 6 mars 1660 à la p. 38 du T. III.

¹²⁾ Voir les pp. 85 et 88 du T. III.

¹³⁾ Voir sa lettre du 15 juillet 1660 p. 97 du T. III. La quadrature est, en effet, très compliquée.

¹⁴⁾ Voir les p. 273—313.

¹⁵⁾ Voir l'ouvrage de 1644 que nous avons cité dans la note 6 de la p. 111 du T. II.

¹⁶⁾ Aux cas où a est impair le contour de ces segments était complété à l'aide de la courbe symétrique par rapport à l'axe des x ($y^a = -kx^b$) voir p. e. la Fig. 2 de Huygens de la p. 274.

¹⁷⁾ Comparez les p. 195—198 du T. I des „Œuvres de Fermat" citées dans la note 1, p. 3 du présent Tome.

résultats ¹⁾, et aussi à en donner des démonstrations „Euclideo more” ²⁾. Il commence, à cet effet, par déterminer les tangentes des courbes prémentionnées qu’il appelle „paraboloïdes.” Ensuite il emploie d’une manière ingénieuse les propriétés de ces tangentes pour obtenir les quadratures ³⁾ et les cubatures cherchées dont il fait déduire enfin la situation des centres de gravité. Il résume ses résultats en six règles ⁴⁾ dont les trois premières correspondent exactement aux règles générales empruntées par Mersenne à Fermat qui, à ce qu’il paraît, était aussi en possession des autres règles ⁵⁾.

Après donc avoir trouvé à sa satisfaction les règles pour les „paraboloïdes”, Huygens s’aperçut que ses raisonnements étaient applicables avec peu de modifications aux „hyperboloïdes”, savoir aux courbes $x^b y^a = k$. Il étudia donc ces courbes et s’occupa surtout de ce qui les distingue des „paraboloïdes”, c’est-à-dire des espaces qui s’étendent jusqu’à l’infini entre les courbes et leurs asymptotes ⁶⁾.

Ajoutons encore que Huygens mentionne ses recherches sur les „paraboloïdes” et les „hyperboloïdes” dans l’„Horologium oscillatorium”, p. 90 de l’édition originale.

Les travaux de la Pièce N°. IX doivent pour la plupart leur origine à la correspondance assidue qui eut lieu entre Huygens et de Sluse dans les années 1657 et 1658. Ils peuvent servir à expliquer plusieurs passages dans les lettres de Huygens à son ami.

¹⁾ De sa lettre à Mersenne du 23 décembre 1646 (p. 557 du T. II) il résulte qu’alors Huygens avait déjà pris connaissance de la „Præfatio” et trouvé une partie des résultats dont nous traitons ici; mais il ne nous est rien resté de ce travail de jeunesse. Comparez les p. 4—5 de notre T. XI.

²⁾ Voir, p. 115 du T. 2, sa lettre à de Sluse du 3 janvier 1658, où on lit: „Sed et quadraturas omnium, et solidorum ex conversionibus ipsarum ortorum ad cylindros relationem eodem Euclideo more deduxi, earumque omnium regularum quæ apud Mersennium in præfatione Mechanicorum leguntur scripsi demonstrationem”.

³⁾ On peut comparer, quant aux quadratures, la méthode de démonstration de Huygens du „Theorema II” (p. 285—287) à celle de Fermat, très différente, qui fut publiée en 1679, comme œuvre posthume, dans ses „Varia opera mathematica”, ouvrage cité dans la note 1 de la p. 326 de notre T. I; voir les p. 255—266 du T. I des „Œuvres de Fermat”, mentionnées dans la note 17 de la p. 197.

⁴⁾ Voir les p. 280—282.

⁵⁾ Mersenne ne donne pas les résultats qui correspondent à ces dernières règles; il dit seulement que le savant en question les avait obtenus. On ne les trouve pas non plus dans la lettre

D'abord ⁷⁾ les deux correspondants s'occupent des „perles de de Sluse”, savoir des courbes dont les équations sont comprises dans l'équation générale $y^p = kx^r(a-x)^r$. Ils les complètent, si c'est nécessaire, par leurs symétriques ⁸⁾ $y^p = -kx^r(a-x)^r$, afin d'obtenir des boucles fermées dont ils déterminent les tangentes, les points d'inflexion, les quadratures et les centres de gravité, comme aussi les cubatures de leurs solides de révolution. Ensuite c'est le tour de la conchoïde ⁹⁾ et de la cissoïde ¹⁰⁾. Quelquefois d'autres mathématiciens, van Schooten ¹¹⁾, Hudde ¹²⁾, van Heuraet ¹³⁾, Wallis ¹⁴⁾ et Mylon ¹⁵⁾, participent à la discussion de ces mêmes sujets.

Ce qui intéresse beaucoup Huygens et de Sluse, ce sont ces espaces dont nous avons déjà parlé à propos des „hyperboloïdes”, qui s'étendent à l'infini entre les courbes et leurs asymptotes et dont toutefois les aires, ou les volumes des solides de révolution, sont parfois finis ¹⁶⁾. C'est de Sluse qui donne à cet intérêt l'expression la plus pittoresque lorsqu'il se vante de pouvoir donner la mesure d'un vase de poids médiocre mais que, cependant, le plus grand glouton ne pourrait vider ¹⁷⁾.

de Fermat à Cavalieri où Mersenne avait puisé ses renseignements; voir les pages mentionnées dans la note 17 de la p. 197.

Quant à l'autre savant dont les travaux sont mentionnés par Mersenne, il s'était borné au cas $b = 1$; mais, sous cette réserve, ses résultats s'étendent aux quatre premières règles de Huygens et à la construction des tangentes.

⁶⁾ Voir l'Appendice II, p. 288—293; Fermat aussi, au lieu indiqué dans la note 3, donne la quadrature de ces „hyperboloïdes”.

⁷⁾ Voir les §§ 1 et 5 de la Pièce N^o. IX, pp. 294—300 et 303—305.

⁸⁾ Voir p. e. la Fig. 1 de la p. 294.

⁹⁾ Voir le § 6, p. 306—309.

¹⁰⁾ Voir le § 7, p. 309—312.

¹¹⁾ Voir les pp. 62, 73—75, 89, 94—95 et 353 du T. II.

¹²⁾ Voir les p. 97—101 du T. II.

¹³⁾ Voir les pp. 96—97 et 116 du T. II.

¹⁴⁾ Voir les pp. 298—304 et 358—359 du T. II.

¹⁵⁾ Voir les pp. 337—338 et 374 du T. II.

¹⁶⁾ Voir, outre les pages du Tome présent citées dans les notes 9 et 10, les pp. 164, 168 et 212 du T. II. Nous relevons en particulier les deux manières ingénieuses dont Huygens démontre que l'aire de l'espace comprise entre la conchoïde et son asymptote est de grandeur infinie; voir les pp. 306 et 308—309.

¹⁷⁾ Voir les p. 167—168 du T. II, où l'on lit: „dici enim vix potest quam inuentis tuis delectatus sim, sed eo maxime quo spatium inter Asymptoton et Cissoïdem (quando ita vocari jubes) meam, dimensus es. Non quod infinito spatio æquale finitum inveneris, (hoc enim iam sæpe factum est) sed quod ex inventis tuo meoque simul compositis, et centrum gravitatis et cylindroidis illius vasculj mensura, levj operâ deducatur, vasculi inquam, pondere

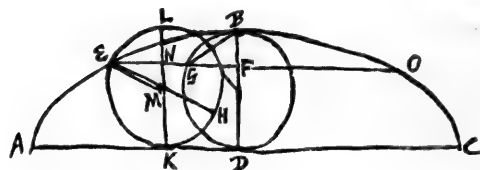
Remarquons encore l'importance que Huygens et de Sluse, et surtout ce dernier, attachent aux réductions à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole. Chaque problème dont la solution amènerait en même temps une de ses quadratures est appelé par de Sluse une „ἀπαγωγή”; et les nombreuses quadratures et cubatures de ce genre qui se présentent dans la correspondance avec Huygens, il les considère principalement comme des „ἀπαγωγές” plus ou moins intéressantes ¹⁾.

Recherches sur les propriétés géométriques de la cycloïde.

C'était le père Merfenne qui, comme sur tant d'autres sujets, fournit à Huygens, en 1646, les premiers renseignements ²⁾ en partie inexacts ³⁾ sur des travaux existants concernant la cycloïde; mais ces communications ne semblent pas avoir donné lieu du côté du jeune Huygens à des recherches originales.

Il en fut autrement, lorsque, douze années plus tard, Boulliau lui envoya ⁴⁾ les deux lettres circulaires dans lesquelles Pascal, sous le pseudonyme Dettonville, proposa „à tous les géomètres de l'univers” les problèmes suivants: Trou-

ver l'aire d'un demi-segment cycloïdal EBF ⁵⁾ et la situation de son centre de gravité, les volumes des solides engendrés par la révolution de ce segment autour de BF et autour de EF, ainsi que



non magni, quod interim helluo nullus ebibat.” Voici l'explication de ce passage: De Sluse avait donné le volume du solide engendré par la révolution de l'espace cissoïdal $AR \infty QDA$ de la Fig. 22 de la p. 310 autour de l'asymptote DQ (voir sa lettre du 14 mars 1658, p. 151—152 du T. II, où il trouve ce volume égal à celui du solide engendré par la rotation du demi-cercle AGC de la figure de la p. 151 autour de sa tangente en A, puisqu'on a $AL \times LK = ML \times LC$). Huygens de son côté lui communiqua dans une lettre du 12 avril 1658 (p. 164 du T. II) la quadrature de ce même espace. De ces données on pouvait donc, à l'aide du théorème de Guldin, déduire la distance du centre de gravité à la droite DQ. Appliquant ensuite de nouveau le théorème de Guldin, on pouvait évaluer le volume, de grandeur finie, du solide engendré par la révolution de l'espace en question autour de l'axe AX. Or, c'est ce dernier solide qui forme la paroi du vase de de Sluse.

Voir encore les p. 238—239 du T. IV où Huygens décrit une courbe à l'aide de laquelle on peut obtenir un autre vase possédant la même propriété.

¹⁾ Voir la p. 107 du T. II où de Sluse préfère l'ἀπαγωγή concernant la surface courbe du cône parabolique, réduite par Huygens à la quadrature du cercle, à toutes les siennes qui se rapportent à des aires planes; voir aussi les pp. 122, 132, 134, 135, 140, 144, 149, 151 et 154 du même Tome.

les centres de gravité de ces solides et aussi des solides partiels qu'on obtient en les coupant par un plan passant par leur axe de révolution.

Pascal, d'ailleurs, n'exigeait pas que tous les calculs fussent exécutés; il se contenterait, écrivit-il, de chaque solution qui établirait, soit à la manière des anciens, soit par la méthode des indivisibles, comment on pourrait déterminer toutes les choses demandées. Toutefois il réclamait la démonstration complète, ou le calcul complet, dans les cas particuliers où le point F se confond avec le point D, ou avec le centre du cercle générateur BGD. Les prix seraient décernés à ceux qui, avant le 1^{er} octobre 1658, auraient résolu les questions proposées ⁶⁾.

Ensuite dans sa seconde lettre circulaire il avertit qu'il suffirait de calculer la situation du centre de gravité du solide engendré par une demi-révolution de l'espace ABD autour de la base AD ⁷⁾.

Huygens, ayant pris connaissance de ces problèmes, ne tarda pas à se mettre à l'œuvre. Il trouva d'abord l'aire BEF dans les deux cas particuliers signalés par Pascal ⁸⁾. Ensuite il détermina l'aire du segment EBO dans le cas général ⁹⁾ et

²⁾ Voir ses lettres du 13 octobre 1646 (p. 559 du T. I) et du 8 janvier 1647 (p. 52 du T. I).

³⁾ L'indication de la situation du centre de gravité de l'espace de la cycloïde entière fut déjà corrigée sur place dans la note 2 de la p. 52 du T. I. L'expression qu'on trouve à la même page pour le volume du premier solide doit se rapporter au solide obtenu par la rotation autour de la tangente au sommet, et non pas à celui qu'on obtient (comme il y est dit) par la rotation autour de la base.

Ces deux données provenaient de Torricelli. Il les avait communiquées à Mersenne dans la forme exacte, puisqu'on les trouve dans cette forme aux dernières deux pages des „Ad lectorem monita” qui précèdent l'„Universæ Geometriæ Synopsis” dans l'ouvrage de Mersenne, cité dans la note 2 de la p. 34 du T. I. Quant à l'expression pour le volume engendré par la révolution de la cycloïde autour de son axe, elle est juste. Mersenne la devait à Roberval (voir à ce propos les p. 193—194 du T. 8 des „Œuvres de Blaise Pascal”, citées dans la note 1 de la p. 196 du Tome présent). Comme on le verra plus loin (p. 204—205), cette cubature, trouvée par Roberval, est équivalente à l'un des problèmes que Huygens ne savait pas résoudre avant d'avoir pris connaissance des méthodes de Pascal.

⁴⁾ Voir ses lettres du 28 juin et du 16 juillet 1658, pp. 186 et 196 du T. II.

⁵⁾ Nous empruntons la figure à celle de Huygens de la p. 347 avec addition des lignes BG et FO.

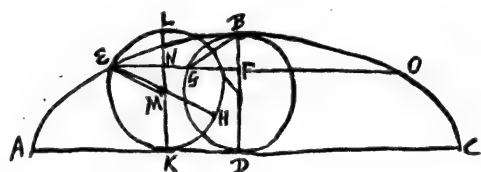
⁶⁾ Voir les p. 187—189 du T. II.

⁷⁾ Voir les p. 196—197 du T. II.

⁸⁾ Voir les §§ 1—3, p. 347—349.

⁹⁾ Voir le § 4, p. 349—350.

découvrit à cette occasion un cas remarquable où ce segment est carrable sans supposer la quadrature du cercle ¹⁾.



Enfin il trouva, dans les deux cas particuliers, la distance du centre de gravité du segment EBO à sa base EO et en déduisit le volume du solide engendré par la révolution autour de

cette base ²⁾.

Il put mander, à Boulliau, le 25 juillet 1658, qu'il avait obtenu ces résultats ³⁾. Il ajouta qu'ayant manqué le reste, il ne pouvait aspirer au prix proposé par l'auteur; d'ailleurs les problèmes lui „semblent si difficiles pour la plupart, qu'il doute fort si celui même qui les a proposés les pourroit tous résoudre”.

Toutefois ces problèmes et surtout celui signalé en particulier dans la seconde circulaire, ne lui laissaient pas de repos. Il reprit donc ce dernier problème et il réussit, en effet, par des artifices des plus ingénieux à déterminer la distance du centre de gravité du solide en question au plan ABD ⁴⁾, de sorte que pour connaître complètement la situation du centre de gravité demandé il ne lui manqua plus que la distance au plan décrit par BD ⁵⁾. Il communiqua à Boulliau ⁶⁾ ce résultat qui était faussé par des erreurs de calcul ⁷⁾, en ajoutant de nouveau qu'il croyait à peine „que tous les dits problèmes estoient possibles”.

¹⁾ Voir les p. 350—351 et voici l'explication de ce cas particulier: Posant $EM = r$ (voir la figure du texte), $\angle EML = \varphi$, on trouve pour l'aire BEF: $r^2 \left[\varphi \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi \right) + \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]$. Dans le cas où $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ cette expression se réduit à $r^2 \left(\sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) = \frac{3}{8} r^2 \sqrt{3}$, et l'on vérifie facilement que dans ce cas le demi-segment EBF est égal au triple du triangle BGF. C'est le cas découvert par Huygens à l'aide de considérations géométriques.

²⁾ Voir le § 5, p. 353—356; au § 6, p. 356—357, Huygens traite encore avec succès le cas d'un segment quelconque EBO.

³⁾ Voir les p. 200—201 du T. II.

En janvier 1659 les recherches de Huygens sur la cycloïde reçurent une nouvelle impulsion. Pascal lui avait fait parvenir son „*Historia cycloidis*”⁸⁾. Il y mentionne la rectification de la cycloïde par Wren et propose quelques nouveaux problèmes relatifs au centre de gravité d’un arc cycloïdal, comme EBO, et aux dimensions et centres de gravité des surfaces engendrées par la révolution d’un tel arc autour de sa flèche ou de sa corde⁹⁾. Huygens admira beaucoup l’invention de Wren¹⁰⁾, quoiqu’il ne fût pas encore si sa rectification s’appliquait à un arc quelconque — ce qui était bien le cas¹¹⁾ — ou seulement à la cycloïde entière. Il réussit bientôt à retrouver le résultat de Wren¹²⁾ et à résoudre le premier des nouveaux problèmes, savoir celui de déterminer le centre de gravité de l’arc EBO¹³⁾. Il fut agréablement surpris¹⁴⁾ par la simplicité du résultat, indiquant que le centre de gravité de cet arc divise toujours la flèche BF dans la raison de 2 à 1.

Toutes ces dernières recherches portaient de la connaissance de la tangente à la cycloïde, qui, en tout point E, est parallèle à la corde BG. Huygens avait rencontré cette propriété dans l’édition de van Schooten de la „*Geometria*” de Descartes¹⁵⁾, mais il n’était pas entièrement content de la manière dont elle y est déduite. Il s’appliqua donc à en donner une nouvelle démonstration¹⁶⁾ basée sur le postulat qu’une droite qui passe par un des points d’une courbe

4) Voir les §§ 1 et 2 de la Deuxième Partie de la Pièce N° XI, p. 358—362.

5) Comme il le manda plus tard à Pascal, il ne pouvait trouver cette dernière distance „fauté de sçavoir le centre de gravité de certaines pieces de cylindre”; voir sa lettre du 5 février 1659, p. 341 du T. II.

6) Dans une lettre du 19 septembre 1658; voir la p. 220 du T. II.

7) Voir sur ces erreurs et leurs corrections la dernière ligne de la p. 362 et la note 1 de cette page.

8) Consultez les pp. 310 et 312 du T. II. Il s’agit de l’ouvrage cité dans la note 2 de la p. 276 du T. II.

9) Voir pour plus de détails la note 5 de la p. 363.

10) Voir la p. 330 du T. II.

11) Voir la p. 360 du T. II et la note 4 de la p. 367.

12) Voir les §§ 1 et 2 de la Troisième Partie de la Pièce N° XI, p. 363—367.

13) Voir les §§ 3 et 4, p. 368—373.

14) Voir le deuxième alinéa de la p. 373.

15) Voir la note 3 de la p. 374.

16) Voir la Quatrième Partie de la Pièce N° XI, p. 374—375.

est tangente à cette courbe lorsque les points de la courbe qui se trouvent de part et d'autre du point considéré et dans son voisinage, sont situés du même côté de la droite; postulat qu'il emploie souvent dans ces sortes de démonstrations ¹⁾).

Quoique Pascal tâchât de faire parvenir à Huygens aussitôt qu'il lui fût possible ²⁾ la célèbre „Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy suivie de traités de géométrie” ³⁾, publiée en décembre 1658, Huygens ne la reçut que le 8 mai 1659 ⁴⁾. Il y trouva, du moins en principe, la solution de tous les problèmes proposés. En effet, dans la lettre elle-même et dans les traités qui l'accompagnent, Pascal fait se procurer, pour le cas spécial de la cycloïde, presque toutes les ressources, notamment l'intégration par parties, dont dispose aujourd'hui le mathématicien moderne. Par suite, ses méthodes sont plus générales et plus puissantes que celles de Huygens, qui pour chaque nouveau problème devait chercher de nouveaux artifices; mais, comme Huygens s'exprime ⁵⁾ „il faut avouer que c'est un labyrinthe lors que l'on veut faire la construction de quelque problème, et pour cela je voudrois qu'il eust partout pris seulement un cas le plus facile pour en donner le calcul tout du long et non seulement le dernier facit, ou bien un exemple à chaque Theoreme”. C'est pourquoi Huygens choisit, pour y appliquer la méthode de Pascal, deux cas particuliers de l'un des problèmes qu'il n'avait pas pu résoudre auparavant. Il envoya sa solution du cas le plus compliqué à de Carcavy ⁶⁾, le priant de lui dire s'il avait „bien supputé”. Quant à la solution de l'autre cas, nous la reproduisons dans la Cinquième Partie de la Pièce N°. XI, p. 376 ⁷⁾. Par l'application du théorème de Guldin on en déduit facilement la

¹⁾ Comparez les pp. 273—276, 284—285, 375 et 397—398.

²⁾ Voir sur les causes du retard les pp. 310, 320, 364, 374, 376, 378, 379, 381, 383, 389, 390 et 396 du T. II.

³⁾ Voir dans les „Œuvres de Blaise Pascal”, publiées par Brunschvicg et Boutroux, les p. 325—384 du T. 8 et les p. 1—133 du T. 9.

⁴⁾ Voir la p. 402 du T. II.

⁵⁾ Voir sa lettre à Carcavy du 22 mai 1659, p. 411 du T. II. On peut encore consulter sur l'opinion de Huygens concernant l'ouvrage de Pascal les pp. 416, 418, 435 et 474.

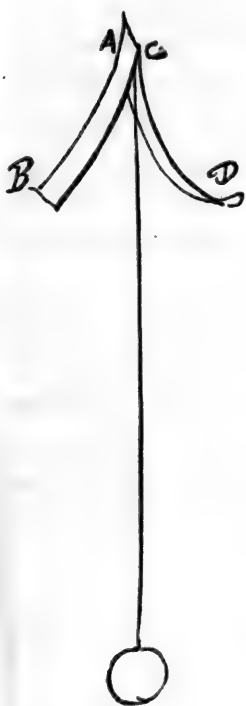
⁶⁾ Voir la p. 411 du T. II.

⁷⁾ Voir encore, aux p. 377—378, l'Appendice daté de 1691, où Huygens s'occupe du même cas, pour le traiter avec la méthode exposée par Wallis dans le traité „De cycloïde” dont nous allons parler.

cubature trouvée par Roberval ⁸⁾ déjà avant 1646 et mentionnée par nous dans la note 3 de la p. 201. Encore en août 1693, Huygens témoigna à de la Hire de son admiration pour cette invention de Roberval ⁹⁾.

Ajoutons que vers le commencement de mars 1660 Huygens reçut ¹⁰⁾ le traité „De cycloïde” de Wallis ¹¹⁾, où celui-ci résout les problèmes de Pascal à l'aide des méthodes de l'„Arithmetica infinitorum” ¹²⁾. Wallis s'y plaint violemment des procédés de Pascal. Dans la polémique qui s'ensuivit, Huygens, sans y prendre une part active, servit d'intermédiaire entre Wallis et de Carcavy ¹³⁾.

Théorie des développées et des courbes parallèles.



À propos des recherches sur la cycloïde, dont nous venons de traiter, nous avons dû constater une certaine infériorité des méthodes de Huygens, comparées à celles de Pascal et de Wallis. Par ses travaux sur la théorie des développées, Huygens a pris, pour ainsi dire, une revanche éclatante. En effet, en développant cette théorie, il a ajouté à l'analyse des courbes planes un chapitre intéressant et beau dont la priorité lui appartient sans contestation.

Il faut en chercher l'origine dans l'emploi des petits arcs BA et CD ¹⁴⁾ que Huygens appliqua en 1658 à ses horloges à pendule afin de rendre la période des oscillations indépendante de leur largeur. Il est clair que ces arcs sont

⁸⁾ Les travaux de Roberval sur la cycloïde ne parurent qu'après son décès dans les „Divers ouvrages de Mathématique et de Physique” de 1693; voir les p. 246—278 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 91 de notre T. IX.

⁹⁾ Voir la p. 486 du T. X.

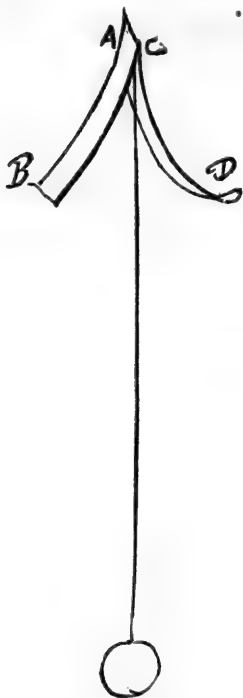
¹⁰⁾ Voir la p. 56 du T. III.

¹¹⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 518 du T. II.

¹²⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 2 de la p. 340 du T. I. Il fut reproduit aux p. 355—478 du „Volumen primum” des „Opera mathematica” de Wallis.

¹³⁾ Voir les pp. 56—58, 86—87, 96, 97 et 126—127 du T. III. Cette partie de la Correspondance de Huygens a été pleinement utilisée par les éditeurs des „Œuvres de Blaise Pascal” dans leur introduction au „Recit de l'examen et du jugement des écrits envoyés pour les prix” de Pascal (voir les p. 233—240 du T. 8 de ces „Œuvres”).

¹⁴⁾ Nous empruntons la figure à la lettre de Huygens à Petit du 1 novembre 1658; voir la p. 271 du T. II.



avec la courbe décrite par la masse pesante dans la relation d'une développée à la développante.

D'abord c'était à l'expérience que Huygens demanda „de quelle maniere et combien” il devait „les plier pour esgaler entre eux les coups des plus larges jusqu'aux plus menus”. Il y réussit si bien avec „deux Horologes de cette façon, qu'en trois jours il n'y eust jamais entre elles la différence d'autant de secondes: quoyque cependant” il en changeât „souvent les poids, les rendant plus ou moins pesants” ¹⁾.

C'est au 1 décembre 1659 ²⁾ que Huygens découvrit le tautochronisme de la cycloïde, et déjà le 6 décembre il put écrire à van Schooten ³⁾ qu'il avait trouvé ces jours ce qu'il n'avait jamais espéré de connaître, c'est-à-dire la forme exacte qu'il faut donner aux arcs AB, CD afin d'égaliser absolument les oscillations. Cette invention lui sembla la plus heureuse de toutes celles qui se soient jamais présentées à lui ⁴⁾.

Ayant trouvé une méthode générale pour déterminer la développée d'une courbe donnée, Huygens l'appliqua non seulement à la cycloïde ⁵⁾, mais aussi aux coniques et aux paraboles et hyperboles de divers degrés. Dans la Pièce N°. XV nous avons reproduit ses recherches de 1659 sur les développées de l'ellipse et de l'hyperbole ⁶⁾. Elles nous apprennent comment Huygens a obtenu les résultats qui sont mentionnés dans l'„Horologium oscillatorium” sans qu'on y trouve leur déduction ⁷⁾.

Nous faisons suivre dans la même Pièce la théorie générale des développées telle qu'elle fut inventée par Huygens dans cette même année ⁸⁾. L'exposition

¹⁾ Voir la lettre citée dans la note précédente.

²⁾ C'est la date annotée sur une feuille séparée où Huygens expose sa découverte.

³⁾ Voir la p. 522 du T. II.

⁴⁾ Voir encore sur la nouvelle invention ses lettres de janvier 1660 à Tacquet, Chapelain et Boulliau (pp. 3, 12 et 13 du T. III). Dès janvier 1660 Huygens se proposait de la faire paraître dans une seconde édition de son „Horologium” (voir les pp. 13, 25, 44, et 57 du T. III); plus tard il la destinait à son „Horologium oscillatorium” qui parut en 1673 (voir les p. 10—11 de l'édition originale).

s'écarte en plusieurs points de celle qu'il donna plus tard dans l'„*Horologium oscillatorium*”⁹⁾. Elle en diffère surtout en ce qu'elle est accompagnée de considérations sur les courbes parallèles et équidistantes, qui manquent entièrement dans cet ouvrage.

Difons encore que dans le manuscrit dont nous avons emprunté la Pièce N°. XV on trouve aussi quelques calculs incomplets sur les développées des paraboles et hyperboles de divers degrés qui montrent que les résultats qui se rapportent à ces courbes dans l'„*Horologium oscillatorium*”¹⁰⁾, furent découverts eux aussi en cette année 1659.

5) Voir sur l'application à cette courbe la note 1 de la p. 404 et les p. 66—69 de l'édition originale de l'„*Horologium oscillatorium*”.

6) Voir les p. 387—397.

7) Voir la Prop. X de la „*Pars tertia*”, p. 79—81 de l'édition originale.

8) Voir les p. 397—403.

9) Voir les p. 59—65 de l'édition originale.

10) Voir les p. 85—90.

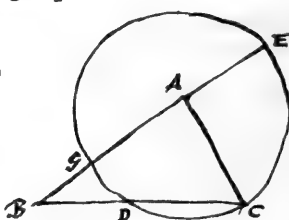
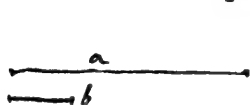
I').

1655.

18 Jun. 1655. Propositum à D. de Wit. Pens.^o 2).

Data summa laterum trianguli rectanguli $\propto a$ et differentia segmentorum basis $\propto b$ invenire triangulum.

[Fig. 1.]



Esto id triang. ABC, et radio AC describatur circulus CDE, et producat BA in E.

Est igitur $BE \propto a$; $BD \propto b$ ³⁾.
Sit $BC \propto x$.

$$BE(a) \text{ — } BC(x) \text{ — } BD(b) \text{ — } BG\left(\frac{bx}{a}\right).$$

$$\text{Ergo } \frac{a - \frac{bx}{a}}{2} AC \propto AG \text{ et } \frac{a + \frac{bx}{a}}{2} AB.$$

¹⁾ La Pièce est empruntée à la p. 178 du Manuscrit N^o. 12 mentionné dans la note 1, T. XI, p. 7.

²⁾ Il s'agit du célèbre Pensionnaire de Hollande et de West-Frise; voir la note 6 de la p. 347 du T. I.

³⁾ En effet, si du point A on abaisse sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AF, il est évident qu'on a $BD = BF - DF = BF - FC = b$.

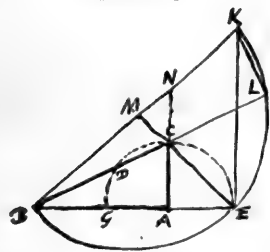
$$\left. \begin{aligned} aa - 2bx + \frac{bbxx}{aa} [\infty] 4q.AC \\ aa + 2bx + \frac{bbxx}{aa} [\infty] 4q.AB \end{aligned} \right\} a[\text{dditur}].$$

$$xx \propto \frac{2aa + \frac{2bbxx}{aa}}{4} [\infty] q.BC$$

$$xx \propto \frac{a^4}{2aa - bb}$$

Constructio⁴⁾.

[Fig. 2.]



Sint BE et EK sing. $\propto a$, invicemque ad rectos angulos et junctâ BK describatur supra ipsam semicirculus BEK. accipiatur KL $\propto b$ et ducatur LB, denique ex centro ducatur ME secans LB in C, sitque CA perpend. BE. Dico triang. CAB esse qui quærebatur.

Demonstr.⁵⁾ Ex constr. enim rectangulum est $\triangle BAC$. Sed et latera BA et AC æquari simul ipsi BE, perspicuum est. Itaque ostendere tantum opus est differentiam segmentorum basis, BD, (descriptâ nimirum circumf.^a CG radio AC) æqualem esse datæ KL. Produc. AC in N. BK ad KL ut BC ad CM et permut. BK ad BC ut KL ad CM, sed BE ad BK ut CM ad CN. Ergo ex æquali in prop. perturbata⁶⁾ erit BE ad BC ut KL ad CN h. e. GB. Sed ut EB ad BC ita quoque DB ad BG. Ergo DB \propto KL. q. er. dem.

⁴⁾ La construction qui va suivre donne successivement $BK^2 = 2a^2$, $BL^2 = 2a^2 - b^2$, $BL^2(2a^2 - b^2) : MB^2(\frac{1}{2}a^2) = BK^2(2a^2) : BC^2(x^2 = \frac{a^4}{2a^2 - b^2})$, tandis que la somme des côtés de l'angle droit du triangle BCA est égale à a . Elle est donc fondée, en effet, sur l'analyse qui précède.

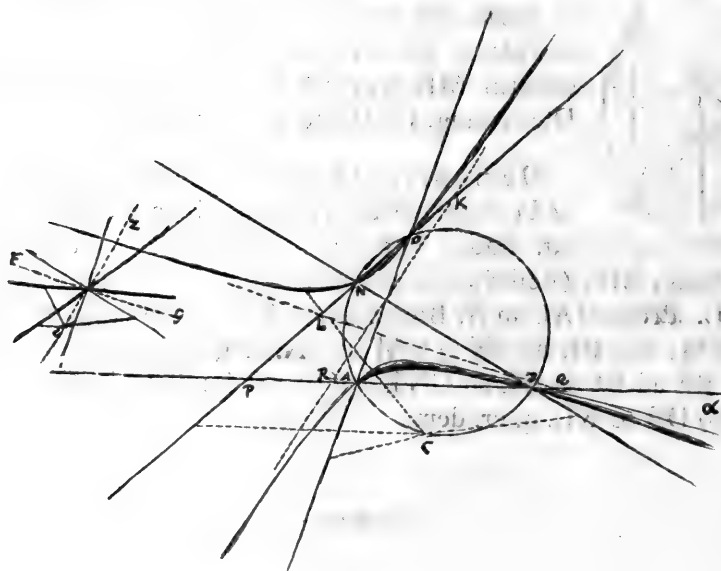
⁵⁾ Il s'agit maintenant de justifier par une démonstration synthétique à la mode des anciens la construction déduite à l'aide de l'analyse.

⁶⁾ Consultez la note 22 de la p. 304 du T. XI. Pour les quantités a, b, c de cette note on doit prendre ici BE, BK et BC, et pour les quantités d, e, f : KL, CM et CN.

II^o.

1656.

30 Nov. 1656.



¹) Dans cette Pièce, écrite sur une feuille détachée, il s'agit de construire les asymptotes d'une hyperbole qui constitue une solution du problème de Pappus „proposé en quatre lignes”, dont Descartes s'est occupé dans le premier et le second Livre de sa Géométrie (voir les pp. 377—387 et 396—411 du T. VI de l'édition récente d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes). On y demande de trouver le lieu d'un point C (voir la grande figure) pour lequel le rectangle sur les lignes tirées dans des directions données jusqu'à leurs intersections avec les droites AO et BN est égal ou dans un rapport donné au rectangle sur d'autres lignes de directions données tirées vers les droites AB et NO.

Roberval avait fait remarquer à Huygens dans sa lettre du 6 juillet 1656 (voir la p. 450 de notre T. I) que ce lieu comprend deux sections coniques à la fois, comme ici le cercle et

ducantur positione datis lineis ²⁾ parallelæ 4, in uno et eodem puncto sese interfecantes ³⁾. Et inveniatur locus puncti **c** ⁴⁾, ex quo in eisdem angulis datis ductæ faciant idem quod hic præscribitur. Erit locus puncti **c** in duabus rectis **cZ**, **FG** quibus sciendum est asymptotas hyperbolarum hic parallelas esse debere. Et constat puncta 4. **A**, **B**, **N**, **O** esse in ipsis hyperbolis. Oportet igitur sic ordinare asymptotas dictis lineis parallelas ut **LN** sit æqu. **OK** et **RA** æqu. **BQ**.

Sit $PR \propto x$; $PN \propto a$; $PO \propto b$; $PA \propto c$; $PB \propto d$. Ratio **RP** ad **PK** data est. Sit ut a ad p . Similiter ratio **LP** ad **PQ** data est quæ sit ut q ad a .

$$\text{fiet } x \propto \frac{aa + ab - dq - cq}{p - q}$$



l'hyperbole qui passent par les points **A**, **B**, **N** et **O**. Cette remarque donna lieu à une correspondance entre Huygens et van Schooten, qu'on trouve aux pp. 460—462, 466—470 et 519—524 du T. I. C'est à cette occasion que Huygens composa la présente Pièce.

Outre cette construction on trouve sur la même feuille des calculs et des figures qui ont servi à préparer la lettre à van Schooten du 6 décembre 1656, p. 519—524 du T. I. Il n'a pas semblé nécessaire de les reproduire.

²⁾ C'est-à-dire les quatre lignes **AO**, **BN**, **AB** et **NO**.

³⁾ Voir la petite figure à gauche de la grande.

⁴⁾ Voir la lettre **c** (difficilement lisible) de la petite figure.

III¹⁾.

1657²⁾.

§ 1.

Numero dato invenire quadratum cui additus summam faciat quadratum.

a , num. dat. xx quadr. quæsitum.

$a + xx \propto yy$ quadratum effectum.

$a \propto yy - xx$. Quod si itaque y et x tales assumantur ut additi æquent a , differentia vero scilicet $y - x$ æquetur unitati; multiplicando simul summam ipsorum $y + x$ et differentiam $y - x$ productum erit $yy - xx$ ipsi a æquale. estque $yy - xx$ differentia duorum quadratorum. Quare sic assumpti numeri propositum efficient. Sit $a \propto 19$. Itaque 10 et 9 erunt y et x nam additi faciunt 19. differunt vero unitate.

81 qu.9; 19 $\propto a$, 100 qu.10.

Quoties autem a primus numerus datur, apparet non nisi unum inveniri posse quadratum idque ex præscripta ratione, quod ipsi additum faciat quadratum quia alias deberet a habere partes aliquotas $x + y$ et $x - y$ ³⁾.

Aliter.

Sit $a + xx \propto xx + 2bx + bb$; $\frac{a - bb}{2b} \propto x$.

$a + xx \propto xx - 2bx + bb$; $x \propto \frac{bb - a}{2b}$.

¹⁾ La Pièce, que nous avons divisée en paragraphes, est empruntée aux p. 255—272 du Manuscrit N°. 12.

²⁾ Voir la p. 217.

³⁾ Lisez: $y - x$.

⁴⁾ Il est bien étrange que Huygens n'ait pas remarqué que cette impossibilité se rencontre chez tous les nombres qui se composent du produit de 2 par un nombre impair mais chez aucun autre nombre > 1 à l'exception du nombre 4. En effet, tous les autres nombres peuvent être décomposés en deux facteurs inégaux p et q ($p > q$) qui sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs; dans ces cas les équations $x + y = p$, $y - x = q$ amènent une solution du problème en nombres entiers.

Hic oportet $a - bb$ dividi posse per $2b$ quod quidem semper continget si sumatur $b \propto 1$, numerusque a datus fuerit impar. at quoties par datus est, oportet experiendo quærere. ut si datus sit 12. sit $b \propto 6$, erit $bb - a \propto 24$, qui dividitur per $2b \propto 12$, et fit 2. Ergo hujus quadr. 4 additum ad 12 facit 16 qui est quadratus.

Multi autem numerorum parium faciunt quæstionem impossibilem, velut 6, 10; ⁴⁾ quia enim quadrata ex 3 et 4 differunt 7.^{rio} sequitur si numeri majus fumantur quam 3 et 4, unitate differentes, eorum quadrata majoris intervallum quam 7 ac proinde quam 6 habitura et si non unitate differant sed majori numero, adhuc majus quadratorum fore intervallum. Frustra igitur b major fumetur quam 4.

Quin imo necesse est $2b$ non sit major a . Dato enim a numero pari etiam b necessario par est assumendus ut $bb - a$ dividi possit per $2b$ parem. Sed bb , quadratum à numero pari dividitur per $2b$. Si igitur et $bb - a$ dividetur per $2b$; etiam reliquum a dividi poterit per $2b$; ideoque $2b$ non debet major esse quam a .

§ 2.

Cur omnis numerus primus addita vel dempta unitate dividitur per 6, item per 4? exceptis 2 et 3.

Quoniam omnis primus numerus est impar sequitur five addita five ablata unitate fieri parem, ideoque dividi per 2. Sed et impar numerus primus existens per 3 divisus relinquit 1 vel 2 necessario. itaque si relinquat 1, demptâ 1 metietur eum 3, si relinquat 2, addita unitate rursus 3 ipsum metietur. fit igitur addendo vel auferendo unitatem ut 2 et 3 ipsum metiatur. Quare et 6 qui fit ex 2 et 3 ipsum metietur.

Porro omnis impar numerus per 4 divisus relinquit 1 vel 3. Ideoque si relinquat 1, demptâ 1 metietur ipsum 4. si vero relinquat 3, additâ 1 rursus ipsum metietur 4.

§ 3.

Si numerus non quadratus in quadratum ducatur productus quadratus non erit. Addita autem unitate fieri potest quadratus. Itaque Fermattius hoc problema proposuit ⁵⁾: *dato numero non quadrato invenire quadratum per quem multiplicatus, additâ ad productum unitate, fiat denuo quadratus.*

⁵⁾ Voir le second défi de Fermat aux mathématiciens, p. 334—335 du T. II des Œuvres de Fermat, cités dans la note 1 de la p. 3 du présent Tome, ou bien le fragment de lettre de Fermat à Frenicle de Bessy (p. 11 de notre T. II) duquel Huygens reçut la copie par l'intermédiaire de Mylon avec sa lettre du 2 mars 1657. L'équation diophantine $au^2 + 1 = v^2$, qui correspond au problème proposé par Fermat, est connue sous le nom d'équation de Pell. Elle

Sit datus non quadratus a . fit $\frac{axxyy}{zz} + 1 \propto xx + 2x + 1$, qu. ab $x + 1$.

$$axxyy \propto zzxx + 2zzx$$

$$x \propto \frac{2zz}{ayy - zz}$$

hunc oportet esse numerum integrum quod fiet si $ayy - zz \propto 1$, hoc est, si $ayy - 1 \propto zz$. Idem etiam continget si $ayy - zz$ fuerit $\propto 2$, hoc est $ayy - 2 \propto zz$. Experiendo igitur inveniendum est quadratum yy quod in a ductum demptâ 1 vel 2 relinquat quadratum.

Quod si superius quadratum formatum fuisset ab $x - 1$ inventa fuisset æquatio

$$x \propto \frac{2zz}{zz - ayy}.$$

Ubi si $zz - ayy \propto 1$, hoc est $ayy + 1 \propto zz$ rursus quæstio resoluta est. Sed hic ad ipsum primum quæsitum devenimus ut sit nempe $ayy + 1$ æquale quadrato. Si vero $zz - ayy \propto 2$, rursus integrum numerum x inveniemus. Hoc est si $ayy + 2 \propto zz$. Quod si $2zz$ per $zz - ayy$ vel per $ayy - zz$ tantummodo dividi possit erit rursus x numerus integer ¹⁾.

Aliter.

Si $axx \propto 2x$ esset quadratus is propositum efficeret, nam ductus in a , fit $aaxx \propto 2ax$ qui additâ 1 facit $aaxx \propto 2ax + 1$ qui est quadr. Sit ergo

$$axx \propto 2x \propto \frac{zzxx}{yy}$$

donna lieu à des recherches nombreuses dont on trouve la liste dans la note 30 de la p. 599 du T. I, 2 de l'„Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften”; où l'on rencontre entre autres les noms d'Euler, de Lagrange et de Gauss.

¹⁾ Remarquons toutefois que pour avoir une solution en nombres entiers de l'équation $au^2 + 1 = v^2$ il ne suffit pas que $v = x \pm 1$ soit un nombre entier, il en doit être de même de $u = \frac{xy}{z} = \pm \frac{2yz}{ay^2 - z^2}$. Considérons, par exemple, l'équation $18u^2 + 1 = v^2$ et supposons

$y = 1, z = 3$. On trouve alors $x = 2, v = 3$, mais $u = \frac{2}{3}$. En effet, pour faire réussir l'artifice employé ici par Huygens, il faut et il suffit que $ay^2 - z^2$, ou $z^2 - ay^2$, soit un facteur de $2yz$. En ce cas u est un nombre entier, et, par conséquent, v aussi.

²⁾ Le signe \propto représente chez Huygens notre \pm .

$$ayyx - zzx \propto 2yy$$

$$\text{Ergo } x \propto \frac{2yy}{ayy - zz} \text{ vel } x \propto \frac{2yy}{zz - ayy}.$$

Consideratis itaque simul hac et antecedenti æquatione huc devenit esse liquet, ut quærendus sit numerus quadratus qui si in datum numerum ducatur productumque ab aliquo quadrato auferatur, vel hoc ab illo, residuum metiatur alterutrius dictorum quadratorum duplum. Quotiens enim erit x .

Quoties autem datus numerus aliquem quadratum unitate superat vel ab eodem unitate deficit sumendus est $y \propto 1$, et zz quadratum isti quadrato æquale, ut ita fiat $ayy - zz$ vel $zz - ayy \propto 1$, unde secundum priorem modum ³⁾ fit $x \propto 2zz$, ideoque $\frac{xyy}{zz} \propto 4zz$ ⁴⁾.

Ex. gr. numerus 5 superat unitate quadratum 4. ergo sumatur $zz \propto 4$. Ergo $\frac{xyy}{zz} \propto 4zz \propto 16$. 16 est quadratus qui ductus in 5 facit 80 cui addita 1, efficit 81 quadratum.

Sic numerus 3 unitate minor est quadrato 4 quare rursus fit $zz \propto 4$, Eritque $\frac{xyy}{zz} \propto 16$. 16 quadratus ductus in 3 facit 48 cui si addatur 1 fiunt 49 quadratus.

Quoties vero datus numerus, quadratum aliquem binario superat, vel binario minor est eodem quadrato: sumendum rursus est quadr. zz isti quadrato æquale, et $y \propto 1$, ut fiat $ayy - zz$ vel $zz - ayy \propto 2$. Unde secundum priorem rursus modum ³⁾ fit $x \propto zz$, ideoque $\frac{xyy}{zz} \propto zz$ ⁵⁾.

Ex. gr. 11 binario superat quadr. 9. Ergo 9 est zz , qui ductus in 11 facit 99, cui additâ 1 fiunt 100 quadratus.

Item 7 binario minor quam 9, ductus in 9 facit 63, cui si apponatur 1, fiunt 64 quadr. numerus.

Quoties itaque numerus datus quadratum numerum unitate vel binario excedit vel alterutro horum à quadrato deficit facile problema solvitur per ea quæ jam dicta sunt. Sciendumque quod uno reperto quadrato qui propositum efficiat infiniti alij idem facientes inveniri possint. Si enim inventus quadratus vocetur yy . Ergo

³⁾ Voir la p. 214.

⁴⁾ Cette solution particulière de Huygens peut être déduite en remarquant que l'expression $(p^2 \pm 1) \times 4p^2 + 1$ représente un nombre carré. Si l'on a, par conséquent, $a = p^2 + 1$, $2p = u$ sera une solution de l'équation $au^2 + 1 = v^2$.

⁵⁾ On peut faire dépendre cette solution de la remarque que $(p^2 \pm 2)p^2 + 1$ est un carré.

quia $ayy + 1$ æquatur quadrato quod vocetur zz , erit $zz - ayy \propto 1$. Et secundum priorem methodum $\frac{2zz}{zz - ayy} \propto x$ numerus integer quia scilicet divisor est unitas, itaque $x \propto 2zz$, et $\frac{xyy}{zz} \propto 4zzyy$. Sed zz est $\propto ayy + 1$. Ergo $4zzyy \propto 4ay^4 + 4yy$, quod quadratum ductum in a , addita ad productum unitate rursus quadratum efficit. Quoniam autem fit $4ay^4 + 4yy$ ex ductu $ayy + 1$ in $4yy$, hinc talis existit regula.

Quadratum inventum (qui nimirum propositum efficit) duc in datum numerum, producto adde unitatem, summam duc in quadruplum ejusdem quadrati inventi, prodibitque aliud quadratum quæstioni satisfaciens. Et simili ratione ex hoc rursus aliud invenitur, atque ita alia quot libuerit¹⁾.

Exempl. gr. Quoniam inventum est quadratum 16 quod ductum in 3, assumpta ad productum unitate facit quadratum 49. ducatur ergo 49 in 64 quadruplum scilicet 16, fit 3136 quadratus necessario quem dico proposito convenire. Nam ductus in 3 facit 9408, cui addita 1 fit 9409 quadratus à radice 97.

Datus sit numerus 13, qui vocetur a .

Ergo secundum primam regulam²⁾, quia $x \propto \frac{2zz}{ayy - zz}$; fit $y \propto 5$. $z \propto 18$ ³⁾.

$yy \propto 25$; $ayy \propto 325$; $zz \propto 324$; $ayy - zz \propto 1$;

$2zz \propto x$. ergo $4zzyy \propto \frac{xyy}{zz}$. $4zzyy \propto 32400$

quadr. quæf. $\sqrt{[32400]}$ est 180.

$32400 a \propto 421200$

1 add.

421201

Handwritten calculation showing the steps of the method, including the final result 421201 and the intermediate steps 32400, 421200, and 421201.

¹⁾ Soit, en effet, u_1 une solution de l'équation $au^2 + 1 = v^2$ et soit $au_1^2 + 1 = v_1^2$. On a alors $a(4u_1^2v_1^2) + 1 = (4v_1^2 - 4)v_1^2 + 1 = (2v_1^2 - 1)^2$. Par suite $2u_1v_1$ est une autre solution de la même équation pour laquelle solution: $v = 2v_1^2 - 1$. Il résulte de la lettre de Huygens à Wallis du 6 septembre 1658 (p. 212 de notre T. II) que Huygens avait communiqué à Mylon cette méthode „quomodo uno quadrato invento innumeri alij reperiantur”, de même que sa méthode précédente pour trouver des solutions en nombres entiers de l'équation de Pell.

²⁾ Celle de la p. 214.

³⁾ On ne voit pas comment Huygens a obtenu ces valeurs de y et de z qui satisfont à l'équation $13yy - zz = 1$ et qui conduisent à la solution $2yz = 180$ de l'équation $13u^2 + 1 = v^2$. D'ailleurs le résultat du calcul, c'est-à-dire la solution $u = 180$ de l'équation $13u^2 + 1 = v^2$, pouvait être connu à Huygens par la communication de Frenicle (p. 30 du T. II) que Mylon lui avait fait parvenir avec sa lettre du 18 mai 1657 (p. 29 du T. II).

Ajoutons encore à ce propos que les nombres y et z doivent se trouver souvent, l'un ou l'autre, ou tous les deux, parmi les facteurs de $u = \frac{2yz}{ay^2 - z^2}$.

$a.3^5)$	$a.3$	$a.61$
$y.3$	$y.11$	$y.3805$
$z.5$	$z.19$	$z.29718$
$ayy - zz \propto 2$	$ayy - zz \propto 2$	$ayy - zz \propto 1$
quadr. quæf. est	quadr. quæf. à	qu. quæf. à rad. $2yz$
à radice $15 \propto yz$.	rad. $209 \propto yz$	$[(2 \times 29718 \times 3805)^2 \times 61 + 1 =$
$[15^2 \times 3 + 1 = 26^2]$	$[209^2 \times 3 + 1 = 362^2]$	$= (2 \times 29718 \times 29718 + 1)^2]$
	$a.21$	$a.21$
	$y \propto 2$	$y \propto 3$
	$z \propto 9$	$z \propto 14$
$ayy - zz \propto 3$		$zz - ayy \propto 7$
$x \propto 54$		$x \propto 56$
quadr. quæf. à rad. 12		quadr. quæf. à rad. 12
$[12^2 \times 21 + 1 = 55^2]$		$[12^2 \times 21 + 1 = 55^2]$

§ 4.

1657.

Numerum aliquem non quadratum esse ut noscatur.

Si ultima litera fuerit 2, 3, 7, 8; vel 5 non præcedente 2 numerus non erit quadratus.

Item si definat per 1, 4, 9, præcedente impari; vel per 6 præcedente pari, non erit quadratus, vel per 25 non præcedente 2, 6 aut 0.

Item si definat per imparem multitudinem nullarum, vel per multitudinem 0 parem quidem sed præcedentibus qui arguerent numerum non quadratum si nullæ adessent cifræ.

Hæc Mersennus fere⁶⁾. Quod sequitur nostrum.

4) Nous avons reproduit ici l'algorithme dont Huygens s'est servi pour l'extraction de la racine carrée du nombre 421201.

5) Dans les petits calculs qui suivent Huygens déduit à l'aide de l'une ou de l'autre des règles qu'il vient de trouver quelques solutions $\left(x = \frac{2zz}{ayy - zz} \text{ ou } \frac{2zz}{zz - ayy}, u = \frac{xy}{z}\right)$ de l'équation $au^2 + 1 = v^2$. On retrouve les trois dernières dans la communication de Frenicle, citée dans la note 3. Les deux premières ne s'y trouvent pas parce que Frenicle s'est toujours borné à donner une seule solution pour chaque valeur de a . Nous avons ajouté à la fin de chaque calcul la solution à laquelle on est conduit.

6) Huygens fait allusion au passage suivant, qu'on trouve à la p. 181 des „Novarum observationum physico-mathematicarum F. Marini Mersenni Minimi. Tomus III. Parisiis,

Numerus qui rejectis novenarijs, (ut fieri solet in examine additionis) non relinquit 1, 4, 7 aut 0 non erit quadratus.

Quia enim ut fiat quadratus idem est multiplicatus numerus ac multiplicandus; necesse autem est ut uterque simul horum rejectis novenarijs relinquat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, vel 0; sequitur productum quoque multiplicationis, hoc est ipsum quadratum numerum, abjectis novenarijs tantum relinquere debere quantum quadratum alicujus harum simplicium notarum, rejectis itidem si opus sit novenarijs, nam alias constat multiplicationem non recte se habere. atqui quadratum alicujus simplicium notarum rejecto quoties potest novenario relinquit 1, 4, 0 aut 7. Ergo omnis quoque quadratus numerus abjectis novenarijs relinquit 1, 4, 7 aut 0, quod erat demonstr.

Numerus qui rejectis novenarijs non relinquit 1, 8 vel 0 non erit cubus.

Proprietas illa insignis novenarij in examinandis omnium specierum supputationibus (nam etsi nonnulli examina istiusmodi rejiciant, magnam tamen utilitatem habent, quod certos faciant, vitiosum esse calculum, quoties numeri non respondent) non aliunde est quam quod 9 proximus est 10, cum denariâ progressionem numeri scribantur; quod facile esset ostendere. Si itaque alia progressionem numeri scriberentur, alterius numeri nec amplius novenarij illa esset proprietas. Veluti si non ultra septem simplices characteres adhibere placuerit, adeo ut secundi loci numerus octuplum faciat primi, et tertij loci numerus octuplum secundi, &c. jam septenarij eadem prærogativa erit ut examen per ipsum possit institui, sicut alias per 9 solet. Foret autem secundum hanc octonariam progressionem pro 8 scribendum 10, pro 9, 11, pro 20, 24, &c. quod facile est intelligere. Quod si vero dati quivis numeri secundum denarium progressum scripti, continuo ad octonarium reduci possent, prodeffet hoc ad alterum instituendum examen cujusvis arithmeticæ operationis, posteaquam jam per 9 experti essemus: juvaretque præterea in quadratis numeris discernendis, de qua re modo egimus. Verum reductio illa expeditè fieri non potest; sed tabulam primo construere necesse esset; tum deinde molesta atque insolita additio peragenda. Hoc incommodo evitando aliud compendium inveni, tabellâ nimirum conditâ quæ ostendat

Sumptibus Antonii Bertier, MDCXLVII: „Cum autem scire volueris an numerus sit quadratus, vide num desinat per hos numeros, 1, 4, præeunte numero pari; vel per 6, impari præcedente; vel per 25, cum 0, 2, aut 6 antecedentibus, vel denique per 00 præeunte quadrato, hi si quidem numeri sunt quadratorum indices: vt non quadratorum 2, 3, 7, 8, vel 5, nisi præeat 2”. Évidemment l'omission du 9 après les nombres 1 et 4 est due à l'imprimeur.

de singulis denarijs, centenarijs, millenarijs, &c., quantum quisque relinquat septenarijs abjectis, sive per 7 divisus, cujus tabellæ construendam rationem primò, deinde usum exponam.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1	1
5	4	6	2	3	1	5	4	6	2	2
4	6	2	3	1	5	4	6	2	3	3
3	1	5	4	6	2	3	1	5	4	4
2	3	1	5	4	6	2	3	1	5	5
1	5	4	6	2	3	1	5	4	6	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1	8
5	4	6	2	3	1	5	4	6	2	9

Characteres supernè inscripti denotant ordines numerorum secundum denarium progressum scriptorum. Scilicet qui sub 2 in columna habentur ad denarium pertinent, qui sub 3, ad centenarium, &c. Qui autem ad latus adscripti sunt characteres indicant ad quod denarium, centenarium, millenariumve &c. pertineant, qui in eo transverso ordine continentur. Itaque in columna sub 1, continentur ij numeri quibus numeri simplices seu primi ordinis excedunt septenarium nec in his nisi duo maximi 8, 9 septenarium excedunt. In columna sub 2, continentur ij quibus denarij sive 2^{di} ordinis numeri septenarium vel septenarios excedunt. Primi nempe denarij excessus est 3, secundi sive numeri 20 excessus supra septenarios est 6, atque ita de cæteris. qui quidem facile inveniuntur. Nam cum compertum sit primum denarium excedere per 3, ut hinc sciam quid excessus secundi denarij, multiplico ipsum 3 per 2 in columna laterali fitque 6, quod in concursu utriusque ordinis colloco.

Rursus ut tertij denarij excessum supra septenarios invenio multiplico 3 laterale in idem 3 excessum sc. primi denarij fiuntque 9 quæ rejecto septenario relinquunt 2, quod similiter in concursu ordinum colloco. Et sic tota columna sub 2 consequenter perficitur.

Rursus ut primi centenarij excessus habeatur sive primus numerus in columna sub 3, duco eundem rursus excessum denarij 3, in seipsum, fiunt 9, et rejecto septenario, 2, qui est excessus primi centenarij quæsitus. Nam cum denarij excessus

fit 3, necesse est eum qui fit ex ductu denarij in se ipsum, hoc est primum centenarium excedere (collectis in unum omnibus characteribus cum per octonarium progressum scriptus erit) quantum 3 in 3 ductum, septenarium excedit; quoniam videlicet eadem tunc septenarij proprietates est quæ solet alias esse novenarij in multiplicatione. Cognito autem excessu primi centenarij 2, ut habeatur exc. secundi centenarij ducendum est rursus 2 laterale in ipsum excessum 2 fit 4 pro quæsito excessu. atque ita porro columna hæc ac deinceps tota tabella repletur, estque animadvertendum postquam supremus columnæ numerus idem contigerit cum aliquo supremorum columnæ alicujus præcedentis, quod ex inde eadem columnæ in ipsidem numeris revertantur, adeo ut describere tantum sit opus. ut hic in 7^a columna fieri cœpit.

Dato itaque numero aliquo secundum vulgarem denariam progressionem scripto velut 853824, si scire velim quid relicturus sit abjectis septenarijs si ad octonariam progressionem reducatur, scribo, sub 8 quod sextum locum occupat, 5, quia hoc invenio in concursu columnæ sub 6 et transversæ ordinis cui adscriptum est 8. Et constat sane, si numerum 800000 totum per octonarium progressum exprimerem, rejectis postea septenarijs superfuturum 5: ex constructione nimirum tabellæ. Rursus simili ratione invenio pro caractere secundo numeri dati qui est 5, scribendum esse 6, quod sub dicto caractere 5 repono: atque ita de cæteris omnibus, ut datus numerus cum subscripto sit.

$$\begin{array}{r} 853824 \\ 564264 \end{array}$$

Hic jam subscriptus rejectis septenarijs tantundem relicturus est, atque integer numerus datus si ad octonarium progressum reductus esset; relinquit autem 6, idque patet ea simplici notarum additione rejecto quoties opus est 7^{nario} ¹⁾).

Possunt itaque numeri ex multiplicatione vel alia operatione arithmetica orti hac ratione immutari ut inde, per septenarium, examen eodem modo instituatut sicut solet per 9. Quanquam etiam absque ulla immutatione idem examen institui potest, sed tunc per 7 dividendum est: veluti in multiplicatione, primum uterque numerus qui sese invicem multiplicant per 7 dividendus est, et reliquum ab utroque in se invicem ducendum et videndum quis sit excessus producti hujus supra 7.^{os} cum quo idem esse debet excessus producti multiplicationis per 7 divisi. Unde constat omnem numerum quadratum sive hoc modo sive præcedenti per 7 examinatum relinquere debere 1, 2, 4 aut 0 ²⁾). Quod eodem modo demonstratur sicuti

¹⁾ Cette méthode de Huygens pour déterminer le résidu de la division par 7 ressemble beaucoup à celle de Pascal exposée dans l'ouvrage „De numeris multiplicibus”, qu'il présenta en 1654 à l'Académie Parisienne mais qui ne fut publié qu'en 1665 avec le „Traité du triangle arithmétique” (voir les p. 313—339 du T. 3 des „Œuvres de Blaise Pascal”, citées dans la note 4 de la p. 196).

Toutefois les méthodes de Huygens et de Pascal diffèrent en ce que Pascal ne se sert que

supra de examine per 9 ostensum est, nempe quod illic quadrati numeri relinquant semper 1, 4, 7 aut 0.

Facto itaque examine per 9, si non deprehendatur non quadratus, neque ex finalibus notis agnoscat, deinceps per 7 explorandus est. Sed antea potius per 11, quoniam expedita est magis operatio, ut jam ostendemus.

Tabella sequens indicat quo excessu quilibet denarius, centenarius, millenarius &c. superet undenarios, estque eadem methodo descripta, qua præcedens ad septenarios pertinens. Hujus autem usu non indigebimus, sed eo tantum proponitur ut demonstrentur proprietates quædam numeri 11. Nota τ significat 10.

	5	4	3	2	1	
1	1	τ	1	τ	1	1
2	2	9	2	9	2	2
3	3	8	3	8	3	3
4	4	7	4	7	4	4
5	5	6	5	6	5	5
6	6	5	6	5	6	6
7	7	4	7	4	7	7
8	8	3	8	3	8	8
9	9	2	9	2	9	9

Apparet autem numeros in columnis alternatim reverti eosdem, quod necessario contingere ex constructionis ratione manifestum est. Dato itaque numero aliquo secundum consuetum denarij progressum scripto si velim ipsum reducere ad alios characteres, ita ut examen per 11 ex collectione simplici notarum peragi queat, (sit verbi gr. numerus datus 255481) liquet omnibus locis imparibus, à dextra incipiendo, nempe primo, tertio, quinto &c., eosdem characteres haberi quos ex tabella substituere oporteret; locis autem paribus illos fore substituendos quibus quisque datorum characterum ab 11 deficit. Veluti quia secundo loco habetur 8, substituetur 3, et sic de ceteris. Hoc cum constet, nihil opus esse

de la première ligne du Tableau de la p. 219, de sorte que pour trouver le résidu septénaire du nombre 853824 le calcul se fait comme il suit : $8 \times 5 + 5 \times 4 + 3 \times 6 + 8 \times 2 + 2 \times 3 + 4 \times 1 = 104$; $1 \times 2 + 4 \times 1 = 6$.

2) Comparez l'Appendice II à cette Pièce, p. 229 du présent Tome.

video ut datus numerus in alios characteres transcribatur, sed tantum ut primò ex notis locorum imparium undenarius rejiciatur quoties potest (hic ne semel quidem potest sed fiunt 10 ex simplici additione notarum 1, 4, 5,) deinde ex notis locorum parium undenarius similiter quoties potest rejiciatur, (fit hic excessus 4), atque posterior hic excessus a priore auferatur, qui quidem si minor est augendus est undenario; reliquum enim fore quo totus numerus datus undenarios superat sive id quod supererit cum per 11 dividetur. fit autem hic 6. Et hic quidem examandi modus expeditus est fere æque ac qui per 9 solet usurpari. Utrique si hoc quoque observetur in additione simplici notarum et quoties supra 10 ascenderis, veluti ad 17, &c., auferas tantum sinistram notam à dextra nota velut hic 1 à 7 fit 6; unde scias excessum ipsius 17 supra 11 esse 6. nam hoc facilius cogitatione fit quam si ex 17 demas 11.

Porro ut quadratos numeros hoc examine exploremus sciendum est omnem quadratum per 11 divisum relinquere necessario, 0, 1, 3, 4, 5 aut 9 adeoque si per examen inveniatur excessus, 2, 6, 7, 8 aut 10, non erit quadratus numerus. Cujus ratio eadem est quam supra de quadratis per 9 explorandis dedimus, vel in universum hæc erit, quod quoties numeri duo sigillatim per aliquem numerum dividuntur, atque utriusque residua, in se invicem ducuntur, ejus producti excessus supra eundem illum divisorem idem erit cum excessu qui habetur si productum duorum ab initio dictorum numerorum per eundem quoque divisorem dividatur.

Sint propositi numeri a et b , et sumatur divisor c . Et diviso a per c fiat quotiens d et residuum e . Rursus diviso b per c fiat f quotiens et residuum g . Est igitur $dc + e \propto a$ et $fc + g \propto b$. Quare ab productum numerorum erit $\propto dfcc + dcg + fce + eg$. Quo diviso per c apparet residuum fieri eg , (omnibus reliquis partibus per c divisionem recipientibus), quod idem est cum residuo producti duorum residuorum e et g per c divisi. quod erat demonstr. ¹⁾

Ex hoc theoremate proprietas undenarij quæ ex præc. tabella colligitur demonstrari potest quod nimirum quilibet numerus unum characterem habens, cum sequente pari numero cifrarum, per 11 divisus tantundem relinquat, atque ipse character initialis unitates denotat. Ut si 700 per 11 dividatur relinquetur 7, si 40000, relinquetur 4, &c. Numerus autem unum characterem habens cum adjectis cifris imparibus, si per 11 dividatur, tantum relinquet quantum character initialis ab 11 deficit. Ut si 3000 vel 30 per 11 dividas supererit 11—3 hoc est 8.

Tentato examine per 8, inveni id ad tres extremos characteres tantum pertinere quia 1000 per 8 divisum nihil relinquit, ideoque etiam omnes numeri qui tres

¹⁾ On rencontre à la p. 337 du Manuscrit D une démonstration analogue du même théorème, laquelle doit avoir été écrite vers 1673. Il ne nous semble pas nécessaire de la reproduire.

pluresve cifras adjectas habent. Tres ergo postremi characteres omnis quadrati numeri si per 8 dividantur debent relinquere 1, 4 aut 0²⁾. Ex tabella autem ad octonarium comparata inveni³⁾, quadratos numeros quorum extrema est 9 sic finire debere nempe

$$\left. \begin{array}{l} m \ 69 \\ m \ 29 \\ p \ 49 \\ p \ 89 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ signif. numerum imparem.} \\ p \text{ numerum parem.} \end{array}$$

quorum autem extremo est 1 sic finire debere

$$\left. \begin{array}{l} m \ 21 \\ m \ 61 \\ p \ 41 \\ p \ 81 \end{array} \right\}$$

²⁾ Comparez l'Appendice II à cette Pièce, p. 229 du présent Tome.

³⁾ Les résultats qui suivent sont incomplets. Huygens aurait dû ajouter aux deux colonnes suivantes respectivement $p \ 09$ et $p \ 01$, puisque p. e. $53^2 = 2809$ et $51^2 = 2601$. Voici comment on peut arriver aux résultats complets: Remarquons d'abord que le résidu de la division par 4 ou par 8 de tout nombre carré impair est égal à l'unité. Il en doit donc être de même pour le nombre formé dans le cas de 4 par les derniers deux et dans celui de 8 par les derniers trois chiffres. On en peut conclure que le nombre formé par les derniers trois chiffres doit prendre l'une ou l'autre des formes: $100b + 8a + 1$ ou $100b + 8a + 5$ et que dans le premier cas (celui de $8a + 1 = 01, 09, 41, 49, 81$ ou 89) le chiffre des centaines doit être pair et dans le second (celui de $8a + 5 = 21, 29, 61, 69$) impair, puisqu'autrement le résidu de la division par 8 ne serait pas égal à 1 mais à 5.

4 3 2 1

0	0	0	0
0	4	2	1
0	0	4	2
0	4	6	3
0	0	0	4
0	4	2	5
0	0	4	6
0	4	6	7
0	0	0	8
0	4	2	1

On peut admettre que des raisonnements analogues à ceux qui précèdent ont été suggérés à Huygens par la considération attentive du tableau pour les résidus de la division par 8, qu'on trouve ici à côté. Alors l'omission de la première ligne, qui manque dans les tableaux des pp. 219 et 221, expliquerait le résultat incomplet de Huygens. En effet, prenant 1 pour le dernier chiffre, le tableau apprend qu'on peut combiner ce chiffre avec 0, 2, 4, 6 et 8 comme avant-dernier chiffre, mais que dans le premier, le troisième et le cinquième de ces cas le chiffre des centaines doit être pair et dans les autres impair. Or, c'est précisément le premier cas, dépendant de la première ligne du tableau, qui a été omis par Huygens.

Dans quel but Huygens cherchait-il tant d'artifices pour reconnaître si un nombre donné peut être un carré? Il nous semble que ce but n'est pas difficile à deviner, vu les recherches qui précèdent. Il s'agissait probablement de trouver par tâtonnements des solutions de l'équation de Pell $au^2 + 1 = v^2$, ou bien des équations, comme p. e. $ay^2 - 1 = z^2$, ou $ay^2 \pm \pm 2 = z^2$, de la résolution desquelles Huygens avait fait dépendre celle de l'équation de Pell; voir la p. 214 du présent Tome.

Ajoutons que, nonobstant tous ces artifices, la méthode de Huygens pour résoudre l'équation de Pell reste extrêmement laborieuse, comme il en convient lui-même dans sa lettre à van Schooten du 21 avril 1657 (p. 27 du T. II). Fermat et Frenicle

$$\begin{array}{r}
 2643215 \\
 412231 \\
 \hline
 2643215 \\
 7929645 \\
 5286430 \\
 5286430 \\
 2643215 \\
 10572860 \\
 \hline
 1089615162665
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 \text{ in } 4 \left. \vphantom{\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}} \right\} \text{per } 9.^m \\
 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 + 11 \quad 4 + 11 \\
 10 \quad 9 \\
 \hline
 3 \quad \text{in} \quad 6 \\
 18
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4 + 11 \\
 8 \\
 \hline
 7
 \end{array}
 \quad
 \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{per } 11.^m$$

Facto examine per 9^{rium} si convenire numeri inveniantur, erunt 9 partes pro recto calculo, 1 pars pro vitiofo. Facto examine per 11^{rium} erunt 11 partes pro recto, una pro vitiofo.

Peracto vero tum per 9^m tum per 11^m examine, si convenire numeri inveniantur, erunt 99 partes pro recto calculo, una pro vitiofo.

en possédaient sans doute de meilleures qu'ils ont tenues secrètes. Brouncker en inventa une qui permit d'arriver à une solution même dans les cas les plus difficiles qui furent proposés par Frenicle, comme p. e. le cas $a = 109$. Voir sur cette méthode, que Wallis publia en 1658 dans le „Commercium epistolicum”, le § 3 de l'Appendice I, p. 227 du présent Tome.

APPENDICE I À LA PIÈCE N^o. III^o.

[1658].

§ 1²).

$$\frac{4nxx}{zz} + 1 \propto \frac{nn + 2nxx + x^4}{zz} \text{ suppositio M.}^{\text{rd}} \text{ Brouncker}$$

$$zz \propto nn - 2nxx + x^4$$

$$\frac{4nxx}{nn - 2nxx + x^4} + 1 = \frac{nn + 2nxx + x^4}{nn - 2nxx + x^4}$$

Ergo si $\frac{2x}{n-x[x]}$ fuerit integer numerus habebitur quæsitum. utique si et x sit integer. nam alias quadr. ab $x[x] + n$ non esset integer³).

¹) Les annotations qui suivent, empruntées aux p. 40—41 du Manuscrit A, ont été écrites à propos du „Commercium epistolicum”, publié par Wallis en 1658 (voir la note 3 de la p. 192 de notre T. II). Elles se rapportent aux solutions qu'on y trouve du problème de Fermat traité dans la Pièce N^o. III au § 3 (voir les p. 213—217 du présent Tome). Huygens se sert de ces annotations dans la composition de sa lettre à Wallis du 6 septembre 1658, p. 211—212 du T. II.

²) Dans ce paragraphe Huygens s'occupe de la solution de Brouncker exposée à la p. 15 du „Commercium” (p. 767—768 du „Volumen alterum” de l'„Algebra” cité dans la note 10 de la p. 9).

³) Remarquons toutefois que cela n'empêcherait pas que $\left(\frac{n+x^2}{n-x^2}\right)^2 = 1 + n\left(\frac{2x}{n-x^2}\right)^2$ ne fût un nombre entier.

Oportet esse num. integrum $\frac{2x}{n-xx}$

$$\frac{s}{r} \propto x \quad \frac{2sr}{nrr-ss} \quad ^1)$$

§ 2²).

α . hoc est si numerus n talis sit ut quadratum proximè majus unitate ipsum superet velut si $n \propto 3$ vel 8 vel 15 &c.

hic $a \propto 1$ erit quadratorum quæditorum unus, quia differentia inter quadratum illud proximum et n in qu. aliquod scil. 1. cum sit 1, metietur rectangulum e radicibus utriusque quadrati.

β . hoc est si num. n talis sit ut qu. proxime majus amplius quam unitate ipsum superet.

γ . ante enim transiri hoc modo nequit. amplius autem expectandum non est, siquidem quæritur 1 pro differentia.

δ . quia scilicet $\frac{cd + \sqrt{nd^2 + b}}{b} \propto a$.

¹) Il s'agit donc de choisir les nombres s et r de manière que $2sr$ soit divisible par $nrr - ss$, auquel cas $u = \frac{2sr}{nrr - ss}$ représentera une solution en nombres entiers de l'équation $nu^2 + 1 = v^2$. Dès ce moment Huygens doit s'être aperçu de l'identité de la méthode de Brouncker avec la sienne telle qu'on la trouve exposée au début du § 3 à la p. 214, où une solution de l'équation $au^2 + 1 = v^2$ est obtenue de la forme $u = \frac{xy}{z} = \frac{2yz}{ayy - zz}$. Voir la p. 212 du T. II, où on lit: „Ego canonem tantum inveneram eundem fere quem pagina 57” (p. 289 du „Volumen alterum”) „et alibi adducis”.

²) L'annotation qui suit se rapporte entre autres à une méthode exposée par Wallis à la p. 63 du „Commercium” (p. 792 du „Volumen alterum”). Posant $n = c^2 - b$, Wallis en déduit $na^2 = (ca - d)^2 - d^2 + 2acd - ba^2$ et il remarque que le nombre a sera une solution de l'équation $au^2 + 1 = v^2$ toutes les fois qu'on aura: $d^2 - 2acd + ba^2 = 1$, c'est-à-dire, $a = \frac{cd + \sqrt{nd^2 + b}}{b}$. Après quoi Wallis continue: „His positis. Ut cognoscatur d , quærendum erit... quis quadratus ductus in numerum datum, assumpto numero b , faciat quadratum; (ut nempe $\sqrt{nd^2 + b}$ sit numerus rationalis integer). Quod quamvis videatur nihilo facilius reperiri posse quam quod primum petebatur; tamen hinc magnum futurum operæ compendium, certum est, quia d ... minor semper erit quam a ... adeoque citius eo pervenietur ubi habebitur defectus b , quam ubi defectus 1.”, etc.

§ 3³⁾.*Problema Fermatij.*

Datus est numerus aliquis non quadratus ut 5. oportet invenire quadratum qui in 5 ductus, addita 1 faciat quadr.

Methodus Brounkeri ⁴⁾. $5aa + 1 \infty 4aa + 4ab + bb$
 $aa + 1 \infty 4ab + bb$ ⁵⁾
 $8b > a > 4b$ ⁶⁾
 $a \infty 4b + c$

$16bb + 8bc + cc + 1 \infty 16bb + 4cb + bb$
 $4bc + cc + 1 \infty bb$
 $5c > b > 4c$ ⁷⁾
 $b \infty 4c + d$

³⁾ Dans ce paragraphe Huygens examine une méthode exposée à la p. 71 du „Commercium” (p. 797 du „Volumen alterum”). Afin de s’assurer si elle est exacte et expéditive, il l’applique à un autre exemple que celui choisi par Wallis, c’est-à-dire à l’équation $5u^2 + 1 = v^2$.

⁴⁾ La méthode qui suit doit en effet être attribuée à Brouncker. Il est vrai que Huygens dans sa lettre à Wallis du 6 septembre 1658 (p. 211 du T. II) l’appelle: „tuane an Illustri. Brounkeri, neque enim satis certo id significas, methodus pagina 71 exposita”; mais Wallis lui répond (p. 297 du T. II) „... Methodum illam quæ pagina 71. occurrit, quæ est Illustris Brounkeri magis quam mea (quod ibidem me satis inuisse putaveram) licet eam mihi deinceps reliqueret exponendam”.

⁵⁾ En posant $b = 1$, $a = 4$, on obtient une première solution de l’équation $5u^2 + 1 = v^2$; mais Huygens suppose $b > 1$ et par suite $aa > 4ab$, ce qui fournit la limite inférieure de l’inégalité qui suit.

⁶⁾ Il eût été plus conforme à la méthode de Brouncker d’écrire: $5b > a > 4b$. Voici, en effet, l’artifice par lequel Brouncker obtient les limites. Pour $a = 4b$ on a $a^2 + 1 = 16b^2 + 1 < 4ab + b^2 = 16b^2 + b^2$; pour $a = 5b$ on a au contraire $a^2 + 1 = 25b^2 + 1 > 4ab + b^2 = 21b^2$. On en peut conclure que s’il y a une valeur entière et positive de a qui satisfait à l’équation $a^2 + 1 = 4ab + b^2$, elle doit être située entre $4b$ et $5b$, l’autre racine de cette équation étant négative.

⁷⁾ La limite inférieure se trouve en remarquant que nécessairement $4bc < bb$.

$$17cc + 4cd + 1 \infty 16cc + 8cd + dd$$

$$cc + 1 \infty 4cd + dd$$

$$c \infty 4d$$

$$16dd + 1 \infty 17dd$$

$$\text{fit } d \infty 1^1), c \infty 4, b \infty 17, a \infty 72, aa[\infty] 5184, 5aa + 1[\infty] 25921$$

$$[2a + b \infty] 161 [4aa + 4ab + bb \infty] 25921 \text{ bon.}$$

¹⁾ Puisque les quantités a, b, c , etc. constituent nécessairement une suite descendante quant à leurs valeurs, il est évident que la circonstance qui se présente ici, c'est-à-dire qu'une dernière équation est satisfaite en posant l'inconnue égale à l'unité, doit arriver toujours, tôt ou tard, pourvu qu'il existe une solution en nombres entiers de l'équation qu'on examine. C'est en cela que consiste la valeur de la méthode de Brouncker qui est appliquée e. a. dans le „Commercium”, p. 85, (voir les p. 804—805 du „Volumen alterum”) à l'équation $109u^2 + 1 = v^2$, où la solution la plus simple $u = 15140424455100$ est trouvée après la considération de 22 équations. Elle fut donc louée à juste titre par Huygens lorsqu'il écrivit à Wallis (voir la p. 211 du T. II): „Præ cæteris mihi placuit illa... methodus”; mais il ajouta à raison: „ex qua tamen nequaquam illud recte colligere mihi videris pagina 83” (p. 803 du „Volumen alterum”) „dari aliquem quadratum qui in datum numerum non quadratum ductus adscita unitate faciat quadratum. Nam secundum methodum illam operatione instituta, nequaquam scis quam diu continuandæ tibi sint positiones antequam quæsitum obtineas, ideoque nec omnino certus esse potes an unquam eo perventurus sis. Sunt, inquis pagina 82, differentiæ b, c, d , &c. numeri integri et continuè decrescentes, ergo tandem ad unitatem deveniri necesse est. at revera ex tua tantum hypothesi sunt numeri integri eoque illud supponere videris quod erat demonstrandum”.

APPENDICE II À LA PIÈCE N^o. III ²⁾.

[1657].

Tout nombre apres 2 est ternaire $+ 0$ ou $+ 1$ ou $+ 2$
 donc tout nombre quarrè apres l'unité est tern. $+ 0$ ou $+ 1$ ou $+ 1$

Tout nombre apres 3 est quaternaire $+ 0$ ou $+ 1$ ou $+ 2$ ou $+ 3$
 donc tout nombre quarrè apres 1 est quat.^e $+ 0$ ou $+ 1$ ou $+ 0$ ou $+ 1$
 donc tout nombre cube apres 1 est quat.^e $+ 0$ ou $+ 1$ ou $+ 0$ ou $- 1$

Tout nombre apres 6 est septenaire $+ 0$ ou $+ 1. 2. 3. 4. 5. 6$
 donc tout nombre quarrè apres 4 est septenaire $+ 0$ ou $+ 1. 4. 2. 2. 4. 1$
 donc tout nombre cube apres 1 est septen. $+ 0. 1. 1. - 1. + 1. - 1. - 1$

Tout nombre apres 7 est octonaire $+ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7$
 donc tout n. quarrè apres 4 est octonaire $+ 0. 1. 4. 1. 0. 1. 4. 1$
 donc tout n. cube apres 1 est octonaire $+ 0. 1. 0. 3. 0. 5. 0. 7$
 c'est a dire est octonaire ou octonaire plus un impair.

Tout nombre apres 8 est novenaire $+ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8$
 donc tout n. quarrè apres 4 est novenaire $+ 0. 1. 4. 0. 7. 7. 0. 4. 1$
 donc tout n. cube apres 1 est novenaire $+ 0. 1. - 1. 0. 1. - 1. 0. 1. - 1. 3)$

De tout quarrè les 3 derniers caracteres font un nombre octonaire, ou octonaire
 $+ 1$ ou $+ 4$.

De tout cube les 3 derniers caracteres font un octonaire ou un octonaire $+ 1$ ou un impair.

Si l'on divise deux nombres par un autre nombre chacun apart, et que l'on multiplie les deux residus ensemble, ce produit, ou (s'il peut estre encore divisè par le mesme nombre) le residu, sera egal au residu qui se fait quand on divise le produit des deux premiers nombres, par le mesme qu'on a pris pour diviseur.

²⁾ L'Appendice, qui contient des recherches analogues à celles du § 4 de la Pièce N^o. III, est empruntée à une feuille détachée. Il a probablement précédé cette Pièce. Voir les notes 2 des pp. 221 et 223 du présent Tome.

³⁾ Vers 1690 Huygens s'est occupé du même sujet, puisqu'on trouve à la p. 71A du Manuscrit G les trois théorèmes suivants qui y sont déduits de la même manière que dans cet Appendice: „Omnis quadratus numerus rejectis 9, relinquit 0 vel 1 vel 4 vel 7. Omnis cubus rejectis 9 relinquit 0, 1 aut 8. Omnis cubocubus rejectis 9, relinquit 0 aut 1”.

IV ¹⁾.

[1657].

Constructio locorum planorum, cum punctum est ad lineam rectam.

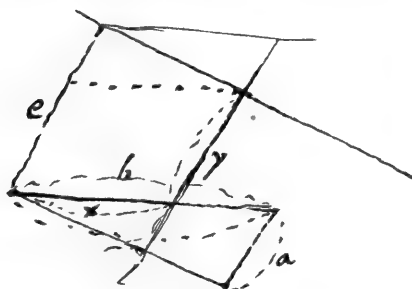
Posito x pro distantia seu linea à certo puncto sumpta, et y pro linea quæ à termino prioris ad certum angulumeducta est, tum si reperiatur æquatio hujusmodi

$$y \propto e \cdot \frac{ax}{b} {}^2)$$

erit locus puncti ad lineam rectam quæ hoc modo invenitur. Si habeatur $+e$, ponenda est à puncto unde sumpta fuit x , in dato angulo, linea ipsi e æqualis atque in eandem partem versus quam sumpta fuit y . at in partem contrariam si habeatur $-e$.

Porro ex puncto unde x sumpta fuit, capiatur in eadem recta, et versus eandem partem in quam tendit x , recta æqualis b , inque hujus termino in dato angulo statuatur recta æqualis a , quæ, si habeatur $+\frac{ax}{b}$, sumenda est eo versus quo sumpta est y ; at in partem contrariam cum habetur $-\frac{ax}{b}$. Inde ducatur quæ cum postre-

mis hisce duabus triangulum constituat. tandemque ultimo ductæ parallela agatur à termino ejus quæ fuit ipsi e æqualis sumpta. Hæc erit locus quæsitus.



$$\text{sit } y \propto +e - \frac{ax}{b} {}^3).$$

¹⁾ La Pièce occupe les p. 273—275 du Manuscrit N°. 12.

²⁾ Les gros points indiquent qu'on peut appliquer à volonté le signe $+$ ou le signe $-$.

³⁾ Voir la figure à côté qui donne la construction de la droite qui correspond à cette équation.

Constructio loci plani cum punctum est ad circuli circumf.

Si habeatur æquatio in qua reperiatur inter quantitates ipsi yy æquales $-xx$; nullus autem terminus ubi xy . fuerintque x et y sibi mutuo ad rectos angulos erit necessario puncti quæsitæ locus ad circumferentiam circuli. Ut si sit æquatio

$$yy \propto 2by + bb - aa + cc + 2ax + dx - xx.$$

Ut autem construatur, redigenda est primum solito more ⁴⁾ ad hanc $y \propto b \pm \sqrt{2bb - aa + cc + 2ax + dx - xx}$. Vel posito $2bb - aa + cc \propto pp$ et $2a + d \propto q$ ad hanc, $y \propto b \cdot \sqrt{pp + qx - xx}$.

Apparet jam, quod si quantitatibus quæ in $\sqrt{\quad}$ continentur addatur rursusque adimatur $\frac{1}{4}qq$, fiet $y \propto b \cdot \sqrt{pp + \frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}qq + qx - xx}$ eruntque quantitates eadem quæ prius. Est autem $-\frac{1}{4}qq + qx - xx$ quadratum à radice $\frac{1}{2}q - x$. ablatum à quantitate $pp + \frac{1}{4}qq$. Ergo hinc inventum est, quoties habetur $y \propto b \cdot \sqrt{pp + qx - xx}$, constructionem hoc modo exequendam.

Nimirum à puncto unde x sumpta est ⁵⁾ sumatur in eadem linea $\frac{1}{2}q$; inque partem eandem, si in $\sqrt{\quad}$ habeatur $+qx$: sed in contrariam si habeatur $-qx$. Super hujus lineæ terminum statuatur perpendicularis æqualis b , in eandem partem quo sumpta fuit y , si habeatur $+b$; at in contrariam si habeatur $-b$. Terminus perpendicularis erit quæsitæ circumferentiæ centrum; femidiameter vero $\sqrt{pp + \frac{1}{4}qq}$.

⁴⁾ Voir p. e. la p. 15 du T. XI.

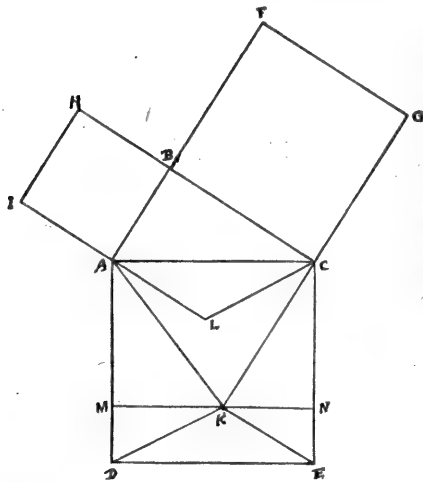
⁵⁾ C'est-à-dire : l'origine des coordonnées.

V¹⁾.

[1657].

Aug. 1657.

Demonstratio mea Propos. is 47 lib. 1 Euclidis.



Esto triangulum rectangulum ABC rectum habens angulum ABC. Dico quadratum ex AC æquale esse quadratis ex AB, et ex BC simul sumptis.

Describatur enim super AC quadratum ADEC; super AB vero et BC quadrata AH, CF. Et producatur IA usque in L ut sit AL æqualis AI, et jungatur LC, similiter producatur CG in K, ut sit CK æqualis CG, et jungatur KA; et ducantur etiam KE, KD, et per K agatur MN parallela AC.

Quoniam itaque anguli ABC, CBF, uterque recti sunt, recta linea est FBA: estque ipsi parallela GK. Quamobrem cum inter easdem parallelas sint quadratum GB et triangulum CAK, habeantque bases GC, CK æquales, erit trianguli CAK duplum quadratum GB. Sed et rectangulum AN, duplum est ejusdem trianguli AKC,

¹⁾ La Pièce occupe la p. 47 du Manuscrit K. Une traduction hollandaise fut publiée par J. Versluys aux p. 25—26 de l'ouvrage „Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras, verzameld en gerangschikt door J. Versluys, Amsterdam, 1914, A. Versluys.” Comme M. Versluys le fait remarquer, il est bien curieux que parmi les démonstrations nombreuses du théorème de Pythagore, qu'on a inventées plus tôt ou plus tard, aucune n'est identique avec celle de Huygens.

cum sint inter easdem parallelas AC, MN, habeantque basin eandem AC. Igitur rectangulum AN æquale est quadrato GB. Superest ut ostendatur rectangulum DN æquale quadrato AH. Quoniam itaque angulus uterque ACE, BCK rectus est, ablato communi angulo ACK, fiet KCE æqualis angulo BCA, verum et utrumque latus EC, CK æquale est utrique AC, CB, singula nimirum singulis. Ergo et reliquum latus KE æquale erit reliquo AB, et angulus KEC æqualis angulo BAC^{*)}. Quare et ablato angulo KEC ab angulo recto DEC; angulo vero BAC ab angulo recto BAL, relinquentur anguli inter se æquales KED, LAC. Sed ostensa est KE æqualis AB, hoc est ipsi AL: et ED æqualis est ipsi AC. Itaque cum triangulum KED, duo latera habet æqualia duobus lateribus trianguli LAC, et angulum KED æqualem angulo LAC, erunt hæc triangula inter se æqualia. Est autem trianguli KDE duplum rectangulum DN, cum eandem habeant basin DE et eandem altitudinem; trianguli vero LAC duplum est quadratum AH cum sint inter easdem parallelas HC, IL constituta, et bases æquales habeant LA, AI. Itaque necesse est rectangulum DN æquari quadrato AH. Sed et rectangulum MC æquale ostensum est quadrato CF. Ergo apparet quadratum totum DC æquari utrique simul quadrato CF, AH; quod erat demonstr.

^{*)} 8. *primi* ²⁾).



²⁾ Il s'agit en vérité de la quatrième (et non pas de la huitième) Proposition du premier Livre des „Elementa” d'Euclide: „Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.” (Clavius, ed. 1507, p. 41.)

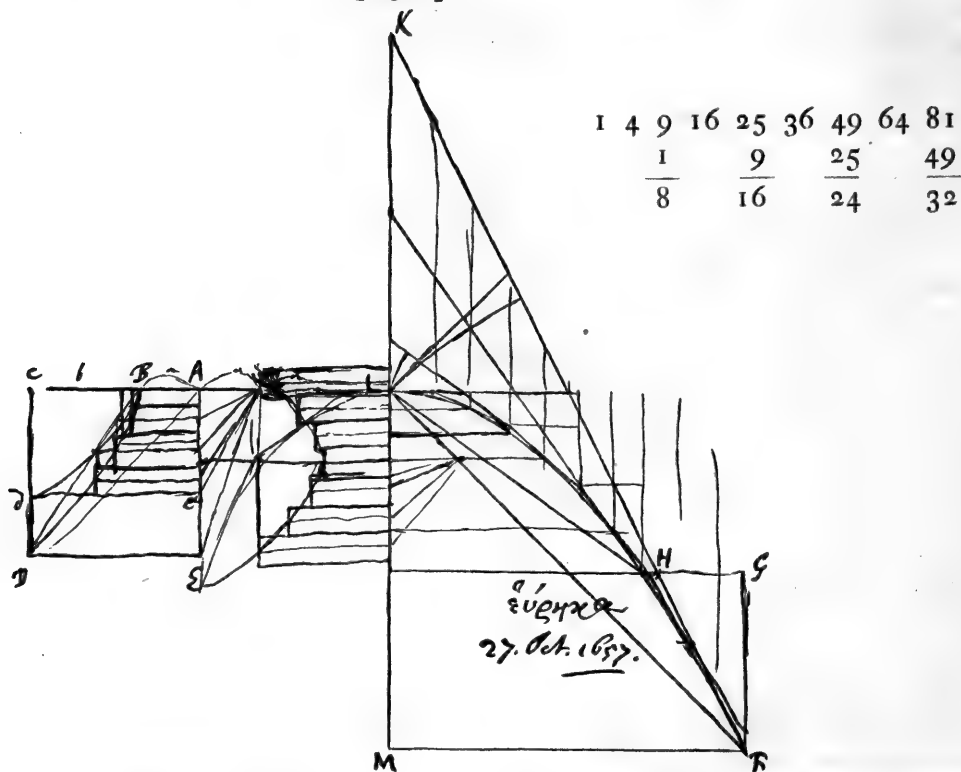
VI¹⁾.

1657.

[Réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole et de la quadrature de la surface du conoïde parabolique à celle du cercle.]

[PREMIÈRE PARTIE²⁾.]

[Fig. I.]



¹⁾ La Pièce que nous avons divisée en trois Parties, a été empruntée aux pp. 39 et 47—60 du livret du frère Philips que nous avons mentionné dans la note 4, p. 217 du T. XII et à quelques feuilles détachées.

Sit LF parab. axis LM. tangens FK. Sit hijperb. BD æqualium laterum recti et transv.ⁱ et sit AB dimidium lat. transv.ⁱ sicut autem KF ad FM, five ut HF ad HG ita sit ED ad AB. vel quod eodem redit ³⁾, sicut KM ad MF ita sit AE ad AB. Et compleatur \square EC. Erit nisi fallor, circumferentia parabolæ LF ad rectam FK, ut spatium BDEA ad \square ACDE ⁴⁾. Potest fumi quævis hijperbola, dummodo fiat, **de** five CA ad AB ut KF ad FM ⁵⁾.

²⁾ Cette première Partie, qui occupe la p. 39 du livret, expose les découvertes faites le 27 octobre 1657. Elle ne donne aucune indication directe sur la manière dont ces découvertes ont été obtenues; mais consultez à ce propos les notes 4 de cette page et 2 de la suivante.

³⁾ On a, en effet, $KF^2 : FM^2 = ED^2 : AB^2$; donc $(KF^2 - FM^2) : FM^2 = (ED^2 - AB^2) : AB^2$; c'est-à-dire, en appliquant une propriété connue de l'hyperbole équilatère, $MK^2 : FM^2 = AE^2 : AB^2$, ou bien $MK : FM = AE : AB$.

⁴⁾ La figure que nous avons reproduite en tête de cette „Première Partie”, contient plusieurs lignes énigmatiques qui, peut-être, se rapportent en partie à des tentatives qui n'ont pas abouti au but désiré. Toutefois il ne nous semble pas impossible de reconstruire à peu près à l'aide de la „Deuxième Partie” qui constitue une démonstration en règle du résultat obtenu, et de quelques autres indications, les raisonnements qui ont guidé Huygens. Dans leur exposition nous nous servirons librement des notations modernes.

Son point de départ, indiqué par la suite de nombres qu'on trouve à côté de la figure, était sans doute la remarque que dans la parabole $x^2 = py$, où les x sont comptés dans la direction de la tangente au sommet L, les accroissements successifs des y pour des valeurs $a, 3a, 5a, 7a$, etc. de x sont proportionnels aux nombres 1, 2, 3, 4, etc. On peut appliquer cette remarque à la fig. 3 de la p. 239 qui suit. Dans cette figure les ordonnées à gauche du sommet B correspondent aux nombres 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 de la suite prémentionnée et les différences $NF - GH = ND$, $OE - NF = OC - DN$, etc. entre la troisième et la première ordonnée, la cinquième et la troisième, etc. aux nombres 8, 16, 24, etc. Or, puisque ces derniers nombres sont proportionnels aux abscisses des points de contact des tangentes successives DG, CD, etc. menées à la parabole AEKFB, on est évidemment conduit à une relation représentée par la formule $\Delta s = \sqrt{1 + k^2 x^2} \cdot \Delta x$, d'où l'on peut conclure que les éléments successifs de la circonférence de la parabole sont proportionnels aux ordonnées d'une hyperbole $y^2 = a^2(1 + k^2 x^2)$. C'est la conclusion à laquelle Huygens arrive au Théorème V, p. 243.

Dès lors il est évident que la rectification de la parabole se réduit à la quadrature de l'hyperbole; mais si dans une telle hyperbole la première ordonnée AB [Fig. 1] prend la grandeur a , il faut que la dernière DE ou **de** soit égale à $a\sqrt{1 + k^2 x_1^2}$, où $\sqrt{1 + k^2 x_1^2}$ représente le rapport de Δs à Δx pour le point F de la parabole. On a donc, comme le texte l'indique, **de** (ou DE, ou CA) : AB = FK : FM. Or, de même que les éléments de la parabole, qui correspondent à des accroissements égaux Δx , sont proportionnels aux ordonnées hyperboliques $a\sqrt{1 + k^2 x^2}$, ceux de la tangente FK correspondant aux mêmes accroissements Δx sont dans le même rapport à la dernière ordonnée **de** (ou DE), d'où il résulte que le rapport de la longueur de la parabole à celle de la tangente FK doit être le même que celui de l'aire hyperbolique BdeA (ou BDEA) au rectangle Ad (ou AD).

⁵⁾ En effet, dans la démonstration qui va suivre, et dans les énoncés donnés à diverses occasions

dato ergo centro gr. in hijperbola, inveniri poterit recta periferiæ parabolicæ æqualis ¹⁾).

videtur conoidis parab.ⁱ superficies ad circulum redigi posse ²⁾. Datâ parabolicæ lineæ longitudine Hyperbolam quadrare ³⁾.

de sa rectification de la parabole, Huygens n'emploie plus l'hyperbole équilatère BD mais une autre hyperbole, comme **Bd**, de forme arbitraire.

On trouve ces énoncés aux „Theoremata VIII et IX”, pp. 249 et 253 du présent Tome, aux pp. 344, 435, 501 et 502 du T. II et à la „Prop. IX” de la „Pars tertia” de l’„Horologium oscillatorium”, p. 77 de l’édition originale. Remarquons que Huygens y remplace souvent la proportion $CA : AB = KF : FM$ par les égalités $CA = 2KF$; $AB = 2FM$.

Ajoutons qu’on retrouve l’énoncé de l’„Horologium oscillatorium” sans modification essentielle à la p. 95 du Manuscrit B, qui doit dater de 1662, et de même à la p. 38 du Manuscrit N°. 13, où Huygens à une époque inconnue (probablement vers 1667) résuma les découvertes principales qu’il avait faites jusqu’à cette époque.

¹⁾ Comparez le „Theorema VI” des „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro”, p. 305 du T. XI, et l’avant-dernier alinéa de la démonstration du „Theorema IX”, p. 253 du présent Tome.

²⁾ Afin d’expliquer de quelle manière Huygens a pu arriver à cette conclusion, nous commençons par faire observer que, comme nous l’avons vu dans la note 4 de la p. 235, les éléments de la parabole LF (Fig. 1) sont aux éléments correspondants de la tangente KF comme les ordonnées de l’hyperbole **Bd** sont à la longueur constante AC, ou, si l’on veut, comme les rectangles élémentaires qui représentent approximativement les accroissements de l’aire hyperbolique **ABde** sont à ceux qui constituent le rectangle **Ce**. Or, il est évident qu’en faisant tourner ces figures élémentaires, ceux de la parabole et de la tangente autour de KM, et ceux de l’hyperbole et du rectangle autour de AC, l’égalité des rapports est conservée, c’est-à-dire que les éléments de la surface courbe du conoïde parabolique, sont aux éléments de la surface conique, décrite par KF, comme les éléments du volume engendré par l’aire hyperbolique **ABde** sont à ceux du cylindre décrit par le rectangle **Ce**. En outre, les éléments successifs de la surface conique sont entre eux dans la même proportion que les éléments correspondants du volume du cylindre **Ad**.

À l’aide de ces considérations Huygens a pu parvenir (comme nous l’expliquons plus loin dans la note 8 de la p. 261) au Théorème XIII, p. 259, d’après lequel le volume engendré par le rectangle **Ad** est au volume engendré par la figure **ABde** comme la surface conique KF est à la surface courbe du conoïde MLF. La quadrature de cette dernière surface dépend dès lors de la cubature du solide engendré par la révolution de la figure **ABde**. Or, le volume de ce dernier solide est égal à celui du cylindre engendré par le rectangle **ACde**, diminué du volume du conoïde hyperbolique **BCd**; mais la détermination de ce dernier volume avait été réduite par Archimède (voir la note 4 de la p. 263) à la cubature du cône de révolution, c’est-à-dire à la quadrature du cercle.

Quant aux résultats obtenus par ces considérations on les trouve aux „Theoremata XV—XVII” (p. 264—267) et aux „Problemata I et II” (p. 267—270) qui contiennent la réduction de la quadrature de la surface du conoïde à la quadrature du cercle avec les conséquences que Huygens en a tirées et les problèmes qu’il y a rattachés.

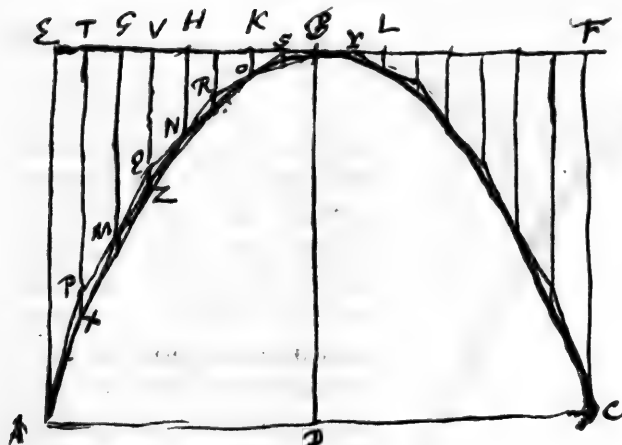
Sur la manière dont Huygens a publié ces résultats ou les a faits connaître à ses correspondants on peut consulter les notes 1 de la p. 264, 4 de la p. 266 et 10 de la p. 267.

³⁾ Comparez le dernier alinéa de la p. 253.

[DEUXIÈME PARTIE ⁴⁾.]

[DEFINITIO I.]

[Fig. 2.]



Si circa parabolam ab axe æqualiter sectam descriptum fuerit rectangulum AEFCEandem cum parabole basin eandemque altitudinem habens, Dividatur autem latus rectanguli EF quod parabolam in vertice contingit in partes æquales quotlibet EG, GH, HK, KB, BL, &c. numero pares. Et ducantur ab omnibus divisionum punctis rectæ parabolæ occurrentes, et axi parallelæ GM, HN, KO, &c. atque per singula occurfus puncta ducantur rectæ parabolam tangentes uti et a terminis baseos A, C. hæ omnes sibi invicem occurrentes, una cum parte quadam tangentis in verticem, constituent circa parabolam lineam quandam inflexam, quæ vocetur ordinatè circumscripta.

Hanc autem majorem esse liquet longitudine parabolæ cui circumscripta est, quum enim utriusque iidem sint termini A, C; sintque in eadem partes cavæ, necesse est comprehendentem comprehensa majorem esse, hoc enim et ab Archimede in libris de Sphæra et Cylindro ⁵⁾ sumptum fuit.

⁴⁾ Cette partie traite, suivant la méthode des anciens, de la réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole. Elle est empruntée aux p. 47—60 du livret de Philips, et ensuite à des feuilles détachées; voir la note 2 de la 248.

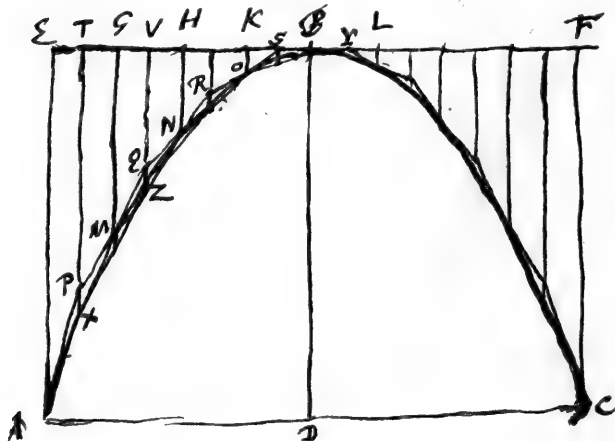
Nous avons introduit une division du texte en „Definitiones”, „Lemmata” et „Theoremata”, telle que Huygens l'aurait apportée s'il avait publié la Pièce, comme c'était sans doute son intention, quoiqu'il n'y ait pas donné suite; consultez à ce propos sa lettre à Kinner à Löwenthorn, p. 503 de notre T. II.

⁵⁾ Voici le postulat en question qu'on trouve au début de l'ouvrage mentionné: „Linearum eosdem terminos habentium rectam minimam esse. Aliarum uero quæ in plano fuerint, si

[THEOREMA I.]

Descriptâ circa parabolē lineâ ordinatē, si ab omnibus flexionis punctis ducantur axi parallelæ quæ occurrant lateri circumscripti rectanguli ut sunt PT, VQ [Fig. 2.], dividēt hæ segmenta prius facta EG, GH etc. bifariam.

[Fig. 2.]



Connectantur enim rectâ lineâ duo quævis inter se proxima contactuum puncta, ut M, N, et occurrat rectæ MN producta VQ in Z. itaque, quoniam ex puncto Q duæ eductæ sunt parabolam contingentes in MN, bifariam dividetur MN tactus conjungens in Z per 30.21. Con. ¹⁾ quomobrem et GH in V bifariam dividetur, cum tres hæ MG, NH, ZV sint inter se parallelæ. Similiter ratione liquet etiam segmentum KB

axi proximum à tang. RS bifariam dividi in S.

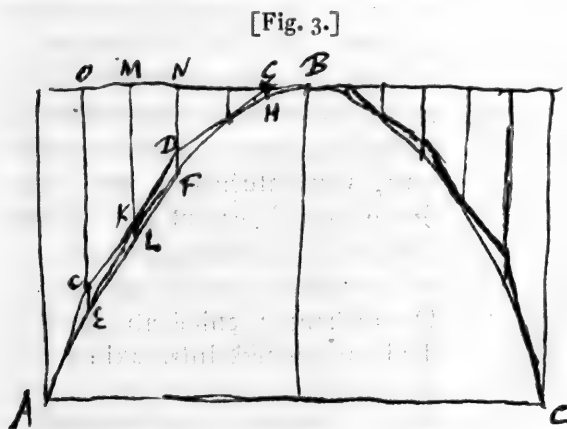
[THEOREMA II.]

Si circa parabolē ab axe suo æqualiter divisam lineâ ordinatē circumscripta fuerit, et à singulis punctis quibus

eosdem habuerint terminos, eas inæquales esse. Vbi autem ambæ in easdem partes cauæ fuerint, ut uel altera tota comprehendatur ab altera, vel altera earum ab alterius superficie, & recta eosdem cum illa terminos habente contineatur: uel quidpiam ipsius contineatur, quidpiam uero habeat commune cum altera, & comprehensam esse minorem" (voir la p. 2 de l'édition de Bâle, citée dans la note 3, p. 274 du T. XI, ou les p. 9—11 du T. I de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du T. XI).

¹⁾ Il s'agit de la „Prop. XXX du „Lib. II” des „Conicorum libri quattuor” d'Apollonius. Voir la p. 55 verso de l'édition de Commandin citée dans la note 4 de la p. 6 de notre T. I où l'on lit: „Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum punctum conueniant: diameter, quæ ab eo puncto ducitur, lineam tactus coniungentem bifariam secabit.”

inflexa est ad parabolam rectæ ducantur axi parallelæ eæ omnes inter se æquales erunt.



Sit enim parabolæ ABC linea circumscripta ordinatè, et ab inflexionis angulis C, D, G, &c. ductæ sint CE, DF, GH &c. axi parallelæ, dico has omnes sibi æquales effici.

Producantur namque binæ quævis ipsarum sibi proximæ ut EC, DF, donec occurrunt ei quæ tangit parabolam in vertice, in O et N.

Producatur item MK, quæ definit punctum contactus rectæ CD, et occurrat rectæ EF in L.

Quoniam igitur per præced. lineæ DN, CO bifariam secant æqualia segmenta tangentis in vertice; Erunt quoque horum dimidia NM, MO æqualia quare et EL æqualis LF. Est autem LK diameter parabolæ per cujus terminum ducta est tangens CD. Ergo per 5.21 Con. ²⁾ erunt CD, EF parallelæ. ac proinde parallelogrammum erit CDFE, ideoque æqualia inter se, opposita ipsius latera, CE, DF. Eodem modo demonstrabitur DF esse æqualis GH, atque ita continuè procedendo omnes tandem à punctis flexionum eductæ inter se æquales esse ostendemus.

[THEOREMA III.]

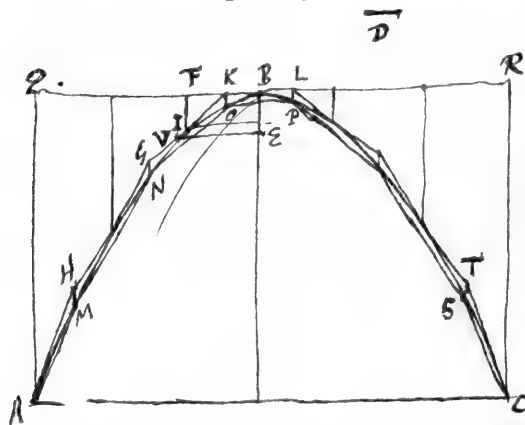
Data parabola ab axe suo æqualiter divisa, potest circa eam linea ordinatè describi, quæ superest parabolæ excessu qui sit minor quavis proposita linea.

Sit enim data Parabola qualis dicta est ABC, lineaque proposita D [Fig. 4.]. Sumatur in axe parabolæ à vertice B intervallum BE, quod sit duplum lineæ D.

²⁾ Voir la note 32, p. 108 du T. XI.

Et ducatur ordinatim applicata EV. Descripto itaque circa parabolam rectangulo AQRC eandem basin eandemque cum ipsa altitudinem habente, potest ipfius latus QR, quod parabolam contingit in vertice, in partes dividi æquales numero

[Fig. 4.]



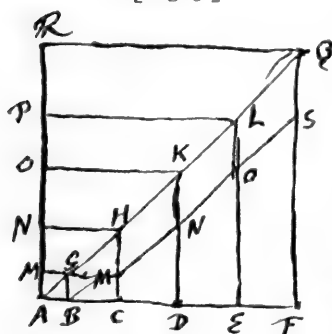
pares ita ut singulæ earum sint minores rectâ VE. Sit factum igitur, sitque partium una BF. Et ex punctis divisionum ductis lineis axi parallelis, quæ parabolæ occurrant, circumscribatur per occurfus puncta linea inflexa ordinatè AHGKL, dico eam superare parabolam minori excessu quam sit linea D. Ducantur enim ab omnibus flexionum punctis lineæ axi parallelæ et parabolæ occurrentes ut sunt HM, GN, KO, LP. Punctaque singula occurfus cum proximis sibi jungantur rectis PO, ON, NM ab extremis vero quæ basi proxima sunt M et S ducantur rectæ ad terminos baseos MA, SC. Est igitur inscripta quoque hoc modo linea AMNOPSC intra parabolam, eisdem cum illa terminos habens inque eandem parte cava, quæ proinde comprehendente curva minor erit. Quia autem sicut in præc. ostensum fuit ¹⁾, MN est æqualis HG, et NO æqualis GK atque ita unaquæ pars inscriptæ æqualis parti circumscriptæ sibi parallelæ usque ab M ad S; Erit proinde tota pars inscriptæ MNOPS æqualis parti circumscriptæ HGKBLT. at verò duæ HM, MA simul majores sunt HA, similiterque duæ simul TS, SC majores TC; itaque apparet totam lineam inscriptam parabolæ unâ cum duabus MH, ST majorem esse tota circumscripta. Quare multo magis parabola una cum duabus MH, ST excedet quoque circumscriptum sibi ordinatè. Si igitur ostendatur duas MH, ST simul minores esse data D; patebit minorem esse excessum ordinatè circumscriptæ supra parabolam, quam est dicta D linea. Illud autem hinc liquebit, lineæ HM, ST singulæ æquantur ipsi KO. Hæc vero quarta pars est FI; cum sit FI ad KO ut quadratum FB ad qu. BK, sitque FB dupla ipsius BK. Igitur duæ simul HM, ST æquantur dimidiæ FI. Est autem FI minor quam BE, quoniam FB minor quam VE. Ergo duæ simul HM, ST minores erunt dimidiâ BE hoc est datâ D. quod demonst. supererat.

[LEMMA I.]

Si fuerit series quadratorum quorum latera eadem proportionem crescant qua numeri ab unitate impares, eorum exces-

fus, quo unumquodque sibi proximum superat crescent secundum simplicem numerorum ab unitate seriem²⁾).

[Fig. 5.]



Sint in recta AF sumptæ quotcunque AB, AC, AD, AE, AF &c. quarum inter se ratio eadem sit quam numerorum 1, 3, 5, 7, 9 &c. Sintque quadrata ab ipsis descripta BM, CN, DO, EP, FR. Sunt igitur excessus quadratorum gnomones BGMNHC, CHNOKD, DKOPLE, ELPRQF, quos ostendendum est inter sese esse sicut numeri deinceps ab unitate 1, 2, 3, 4, &c. Ducatur ex A diameter communis omnium quadratorum AQ, sumptæque CM³⁾ \propto BG, agatur MS dictæ diametro parallela. Erunt igitur omnes hæ inter se æquales MH, NK, OL, SQ, et singulæ ipsi BC, quia sumpta fuit MC \propto GB hoc est AB, eratque tota CH \propto AC. Sunt autem et BC, CD, DE, EF inter sese æquales. quare æquales quoque erunt MN, NO, OS, et singulæ ipsi GH. Fit igitur trapezio BGHC simile et æquale trapez. CMND. Hoc autem trapez. duplum est Δ^{li} GMH, (quoniam HM dupla est MC) ac proinde æquale \square° MHKN. Ergo et CMND trapez. æquale erit parallelogr^o. MHKN. Itaque trapez. CHKD duplum est trapezij CMND ideoque et trapezij BGHC. Ideoque et gnomon CKN⁴⁾ duplus gnomonis BHM. Rursus trapez. DNOE quia est simile et æquale trapez.^o CHKD, erit duplum quoque trapez. BGHC. \square vero KO ipsi trapez. BGHC æquale est, cum sit æquale \square° HN. Ergo totum trapez. DKLE erit triplum trapezij BGHC. Quare et gnomon DLO triplus gnomonis BHM. Simili ratione quoniam trapez. EOSF fit simile et æquale trapezio DKLE, erit illud quoque triplum trapezij BGHC. at \square LS ipsi trapezio BGHC æquale est. Ergo totum trapez. ELQF quadruplum erit trapezij BGHC, et gnomon EQP quadruplus propterea gnomonis BHM. Itaque ostensum est gnomones omnes deinceps crescere secundum rationem numerorum 1, 2, 3, 4. Et patet eandem progressionem continuatum iri, quotcunque demum quadrata exponantur.

[THEOREMA IV.]

Circa parabolam BAC [Fig. 6], æqualiter ab axe divisam, linea ordinatè BEDIKF circumscripta fit cujus partes basi

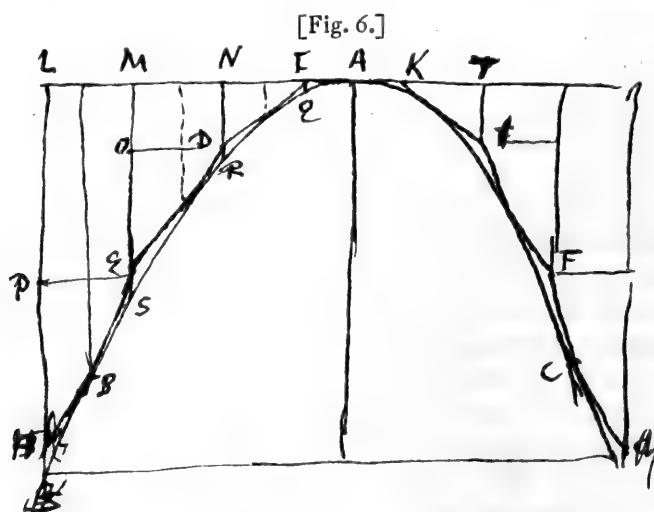
¹⁾ Voir la démonstration du théorème précédent.

²⁾ Comparez la suite numérique qu'on trouve à la p. 234 à côté de la Fig. 1.

³⁾ On remarquera le double emploi dans la figure et dans le texte des lettres M, N et O.

⁴⁾ Notation abrégée pour CDKONHC.

proxime EB, FC ultra basin producantur ut fiant sui ipsius duplæ. Et ducantur ab omnibus flexionis punctis, item a



terminis duarum ultra basin produc-
tarum, rectæ axi
parallelæ quæ occur-
rant parabolæ in
vertice tangenti,
sintque HL, EM, DN,
FT¹⁾. Et notetur ex-
cessus quibus una-
quæque harum a sibi
proxima superatur,
ut sit EO excessus
EM supra DN; HP
excessus HL supra
EM. Dico seriem
linearum quarum

prima fit DN reliquæ vero deinceps excessus omnes dicti OE, PH, eadem ratione crescere qua numeri ab unitate crescunt. Hoc est ipsius DN duplam esse EO, triplam vero HP; atque ita deinceps si pluribus angulis fuerit ordinate circumscripta.

Productis enim ME, ND, ut parabolæ occurrant in S, et R, ductaque itidem IQ axi parallela. Constat ex præc.²⁾ ipsi IQ æquales esse singulas DR, ES, HB³⁾. Constat etiam lineas AI, AN, AM, AL crescere secundum rationem numerorum imparium ab unitate 1, 3, 5, 7. Sicut autem harum inter se quadrata ita sunt longitudine IQ, NR, MS, LB. Itaque harum excessus qua unaquæque harum à sequente superatur erunt sicuti numeri ab unitate 1, 2, 3, 4, &c.⁴⁾ Excessus autem quo superatur IQ à NR est ND, cum sit DR æqualis IQ; Et excessus qua NR superatur à MS est OE, quum sit NR æqualis utrisque simul MO, ES. Similiterque excessus quo MS superatur à LB est PH, quoniam MS æqualis est duabus simul LP, HS⁵⁾. Ergo ND, OE, PH, crescent secundum rationem numerorum ab unitate 1, 2, 3, 4, &c. Quod erat dem.

¹⁾ La lettre T est mal placée dans la figure, il faut la transporter vers la droite au pied de la perpendiculaire qui part du point F.

²⁾ Voir le théorème II, p. 238—239.

³⁾ Ici et dans ce qui suit B indique le point le plus bas au côté gauche de la figure et non pas le point B qui se trouve entre H et E.

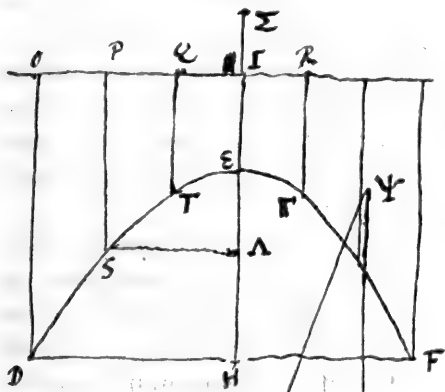
⁴⁾ D'après le lemme qui précède.

⁵⁾ Lisez : HB.

[THEOREMA V.]

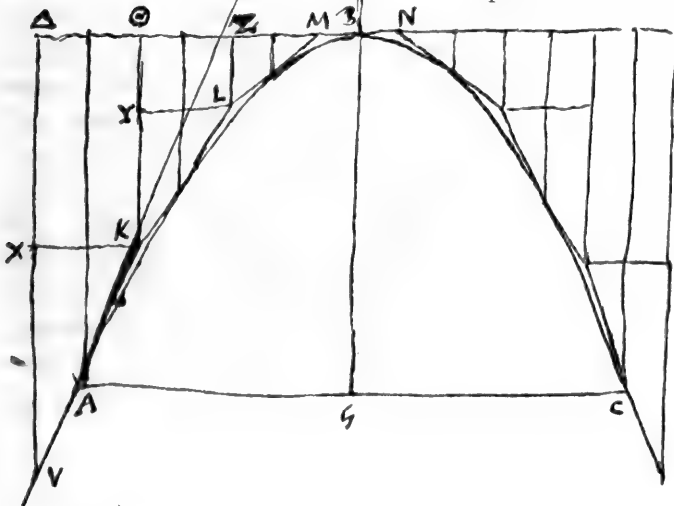
Esto parabola ab axe æqualiter divisa ABC, si circa eam linea ordinate describatur, hujusque partes quæ parabolam ad ter-

[Fig. 7.]



minos basis contingunt ut KA,
producantur ultra basin ut fiant
fui ipsius duplæ.

Exponatur autem et hyperboles portio DEF ejusmodi, in qua diameter HE juncta dimidio lateris transversi EI, ad dimidium latus transversum EI eandem rationem habent quam recta A ψ parabolam inter terminos baseos contingens axique occurrens, ad ipsius baseos dimidium AG. Et super basi portionis hyperbolæ parallelogrammum constituitur OF cujus latus basi oppositum per centrum sectionis I transeat,



reliqua vero latera
sint diametro por-
tionis parallela. Et
dividatur latus \square^i
quod per centrum
sectionis est, in par-
tes totidem ac divi-
sum fuit latus \square^i
circa parabolam de-
scripti cum linea
ordinatè circumscri-
beretur. Ducantur-
que a punctis divi-
sionum rectæ diametro
parall. PS, QT, RR,

&c. quæ hyperbolæ occurrant. Dico lineam OD ad reliquas singulas PS, QT, IE, &c. eadem proportionem referri quæ et VK ad singulas rectas KL, LM, MN, &c. si utrobique eadem in

IA—qu.IE. Porro quoniam ex datis est sicut ψA ad AG, hoc est sicut VK ad KX ita HI ad IE; erit quoque sicut qu.VK ad qu. KX ita qu.HI ad qu.IE. quare et per conversionem rationis erit qu.VK ad excessum qu.VK supra qu.KX, hoc est ad qu.VX sicut qu.HI ad qu.HI—qu.IE. Et permutando, qu.VK ad qu.HI sicut qu.VX ad qu.^mHI—qu.^o.IE.

Sicut autem qu.VX ad qu.HI—qu.IE item ostendimus esse qu.KY ad qu.IA—qu.IE. Ergo et qu.VK ad qu.HI sicut qu.KY ad qu.IA—qu.IE. Verum ut qu.VK ad qu.HI ita est qu.KX ad qu.IE. (nam modo diximus esse qu.VK ad qu.KX ut qu.HI ad qu.IE). Ergo et qu.KY ad qu.IA—qu.IE ut qu.KX ad qu.IE. Et permutando qu.KY ad qu.KX sive ad qu.YL ut qu.IA—qu.IE ad qu.IE. Itaque et componendo erit sicut duo simul, qu.KY et qu.YL hoc est sicut qu.KL ad qu.YL ita qu. IA ad qu.IE. Sed ut qu.YL sive qu.KX ad qu.KV, ita est qu.IE ad qu.IH, ut supra patuit. Ergo ex æquali erit qu.KL ad qu.KV sicut qu.IA ad qu.IH, hoc est sicut qu.PS est ad qu.OD. Et convertendo. Quamobrem et linea OD erit ad SP sicut VK ad KL.

Eodem modo ostendimus quod VK ad LM sicut DO ad TQ. Sed et quod VK ad MN sicut DO ad IE manifestum fiet hac ratione. Est enim MN æqualis ipsi KX. Sicut autem VK ad KX hoc est ut ψA ad AG ita positum fuit esse HI sive DO ad IE. Quare et VK ad MN sicut DO ad IE. Itaque constat lineam OD ad singulas SP, QT, IE eadem ratione referri qua et DO ad singulas SP, TQ, EI ⁶⁾.

[DEFINITIO II.]

Data hyperboles portione, si super basi ipsius \square describatur ita ut latus \square quod basi oppositum est transeat per centrum sectionis reliqua vero diametro parallela sint vocetur ejusmodi \square ad centrum terminatum. pars vero ejusdem quæ dempta hyperboles portione remanet vocetur spatium residuum.

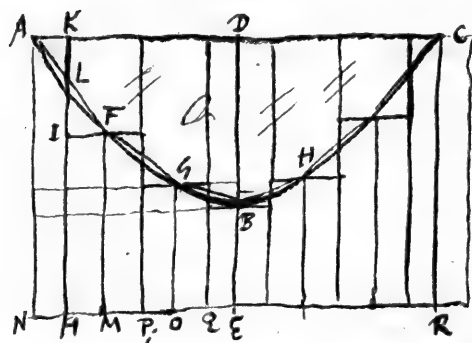
3) Voir le Théorème IV, p. 241—242.

4) C'est-à-dire le rectangle dont les côtés sont égaux à ΣH et HE.

5) Il s'agit de la Prop. 21 du Livre I des Coniques d'Apollonius; voir la note 12, p. 300 du T. XI.

6) Lisez : qua et VK ad singulas KL, LM, MN.

[Fig. 8.]



Et si dividatur hujus \square i latus quod per centr. sectionis transit in partes æquales quotlibet, numero pari, aganturque à divisionum punctis rectæ diametro parall.æ quæ portioni occurrant. Circa has autem pari ipfis altitudine parallelogramma describantur, lateribus diametro portioni parallelis bases vero segmentis rectæ [NM, MO, &c.] ¹⁾ æquales habentia et a lineis [FM, GO, BE, &c.] ¹⁾ bifariam divisas. Figura ex his \square is composita et ex duobus dimidiæ horum latitudinis \square is [ut ANHK] dicatur ordinatè circa spatium residuum constituta.

[THEOREMA VI.]

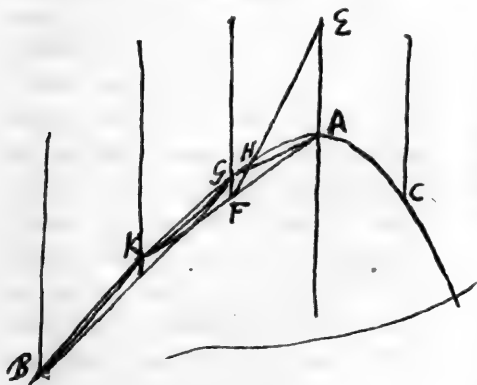
Data autem hyperbolæ portione si \square m ei circumscribatur ad centrum terminatum et figura ordinatè circa spatium resid. porro describatur. Dico hanc ipso spatio residuo majorem esse.

Jungantur enim [Fig. 8] rectis lineis puncta [A, F, G, B, H, &c.]. Quoniam igitur æquales et parallelæ inter se sunt AK, IF, necesse est fieri æqualia quoque Δ .^a LKA, LIF, ideoque æquale esse trapezium AFMN utrique simul \square ° AH, HF. Eadem ratione trapezium FGOM æquale erit duobus \square is FP, PG. Et trapez. GBEO, \square is GQ, QB, atque ita de cæteris. Unde patet figuram ex omnibus trapezijs compositam AFGBHCRN æquari figuræ ex \square is ordinatè circumscriptæ. Dicta vera figura ex trapezijs composita major est spatio residuo, quoniam ipsum continet atque insuper segmenta quædam ipsius portioni. Ergo et figura ex \square is ordinatè circumscripta major erit dicto residuo spatio. quod erat ostend.

¹⁾ Ici Huygens indiqua par des points qu'il y avait encore quelque chose à ajouter. Aussi, à côté de la figure avec les lettres que nous avons reproduite, il y en a une autre, presque identique, sans lettres. C'est de celle-ci sans doute qu'il s'est servi pendant la rédaction de cette définition; celle avec les lettres étant donc postérieure à cette rédaction.

[LEMMA II²⁾.]

[Fig. 9.]



Si hyperbolæ CAB occurrant rectæ quotvis parallelæ, et æqualibus intervallis à se invicem distantes in punctis C, A, G, K, B fueritque earum una EA diameter sectionis. Jungantur autem rectis lineis duo quæque sibi vicina occursum puncta. dico, segmentorum hyperbolæ hisce lineis abscissorum, maxima esse quæ diametro adjacent AG, AC. Reliqua vero eo quæque minora quo ulterius ab his abfuerint.

Jungatur enim AK. eique occurrat producta IG³⁾ in F. dividet autem ipsam bifariam propter æqualem parallelarum linearum distantiam. ducatur ad centrum sectionis recta FE, secans hyperbolen in H, secabit enim ipsam quia centrum E extra sectionem est, punctum vero F intra. Et erit FH diameter portionis AHKA, ipsam proinde in duo æqualia secabit. quia autem recta FE tota inter parallelas EA, GF sita est, sequitur intersectionem H contingere inter G et A. Itaque frustum FHA pars erit frusti FGA. Unde quum recta FH dividat segmentum AGKF in duo æqualia, apparet FG ipsum dividere inæqualiter, ita ut majus sit spatium FGA quam FGK. Verum triacula hisce spatijs inscripta FGA, FGK inter se æqualia sunt. Igitur residuum segmentum GA majus esse necesse est residuo segmento GK. Eodem modo ostendetur segmentum GK majus esse segmento KB atque ita unumquodque eo quod proxime subsequitur. Quare constat propositum.

[THEOREMA VII.]

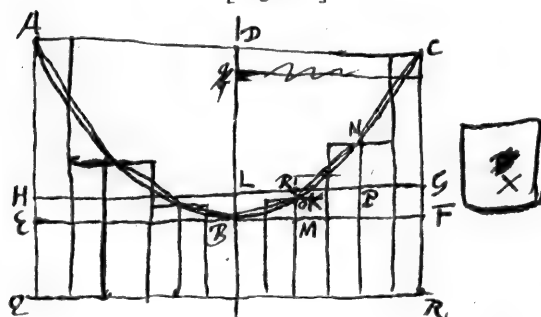
Data hyperbolæ portione, descriptoque circa eam \square° ad centrum terminato, dico circa spatium residuum figuram

²⁾ Comme l'état du manuscrit le prouve, le „Lemma II” fut rédigé après le Théorème VII, le besoin d'un tel lemme s'étant fait sentir pendant la rédaction de la démonstration de ce théorème.

³⁾ La lettre I manque dans la figure; on la retrouve toutefois dans une autre figure qui est moins complète sous d'autres respects. La ligne IG est la parallèle à l'axe AE, qui passe par G.

ordinatè describi posse quæ superet spatium residuum minori excessu quam fit propositum quodvis spatium.

[Fig. 10.]



Detur enim portio [ABCD] itemque spatium [X]. Et circumscripto \square° ad centrum terminato ducatur tangens portionem in vertice B recta EF. Eique alia agatur parallela HG, ita ut comprehensum \square EG sit duplum spatij X. Secet autem HG recta diametrum portionis in L, hyperbolen vero in K. Potest jam itaque figura ordinate circa spatium residuum constitui ita ut bases

singulæ \square orum ex quibus ipsa componitur sint minores rectâ LK. Sit igitur factum et jungantur bina quæque puncta in hyperbola quibus latera dictorum \square orum bifariam secantur rectis lineis [CN, NO, OB] &c. Cum igitur segmentum hyperbolæ vertici proximum BO sit minus triangulo BOM; triangulum BOM minus quam dimidium \square i ML; (nam quia BM minor est ordinatim applicatâ LK, etiam MO minor erit quam BL. ideoque \triangle^m BOM minus quam dimidium \square ML). Erit proinde et dictum segmentum BO omninò minus quam $\frac{1}{2}$ \square ML. Reliqua vero segmenta hyperbolæ quæ ab eadem parte diametri sunt ON, NC, singula minora cum sint segmento BO, per [Lemma præcedens], totidem vero \square^a MP, PF æquentur singula \square° ML; Erunt proinde omnia simul segmenta hæc BO, ON, NC, minora $\frac{1}{2}$ \square° BG. Eadem vero ratione, et ea quæ ad alteram partem diametri sunt segmenta, minora probabuntur $\frac{1}{2}$ \square° BH. Itaque omnia simul segmenta ab hyperbolæ portione abscissa minora erunt dimidio \square EG, hoc est minora spatio dato X. Ideoque si spatio residuo dicta segm.^a addantur compositum minus erit quam hoc ipsum spatium + X. Atqui dicta segmenta addita spacio residuo, æquant figuram ordinatè circa spatium residuum ex \square is circumscriptam, sicut in præc. demonstratione ¹⁾ ostensum fuit. Ergo figura ordinatè circumscripta minor erit dicto spatio una cum spatio X. Unde manifestum est excessum quo figura ordinate circumscripta superat idem spatium à rectis AQ, QR, RC et hyperbola CBA comprehensum, minorem esse ipso X spatio. Quare constat propof. ²⁾.

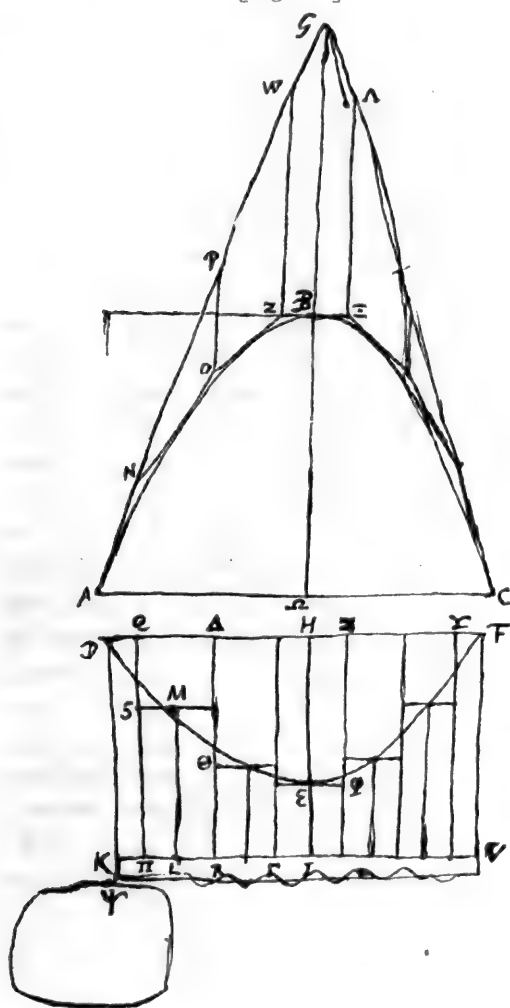
¹⁾ Voir la démonstration du „Theorema VI”, p. 246.

²⁾ Ici finit la partie que nous avons empruntée au livret de Philips. Le reste se trouve sur des feuilles détachées dont la première porte le numéro 5. En effet, la démonstration du „Lemma II” qui, comme nous l’avons dit dans la note 2 de la p. 247, se trouve dans le livret à la suite du „Theorema VII”, est suivie par les mots: „Reliqua in folio. Incipiunt pag. 5. signo . . .”, accompagnés d’un signe de renvoi qu’on retrouve sur la feuille prémentionnée.

[THEOREMA VIII.]

Si fuerit Parabola ab axe æqualiter divisa, itemque Hïperbolæ portio, ita comparatæ, ut quam rationem habent duo

[Fig. 11.]



simul latera trianguli isoscelis communem cum portione parabolica basin et duplam altitudinem habente ad ipsam basin, eandem habent hïperbolæ portionis diameter [HE] juncta $\frac{1}{2}$ lateris transversi ad dimidium latus transversum. Et describatur circa hyperboles portionem rectangulum ad centrum sectionis terminatum. Erit sicut dicta duo latera trianguli circa parabolam descripti ad parabolæ longitudinem, ita \square circa hïperbolen descriptum ad partem sui quæ dempta hyperboles portione relinquitur³⁾.

Esto parabola ABC qualem diximus, sitque supra basin ipsius AC descriptum $\triangle AGC$ axem sive altitudinem parabolæ duplam habens unde fiet ut latera GA, GC parabolam contingant.

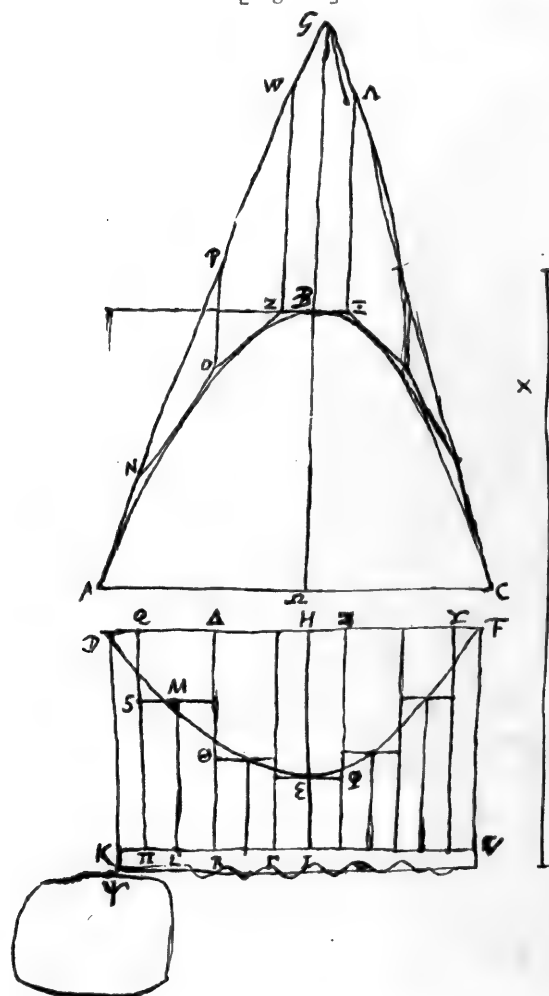
Porro et hyperboles portio sit DEF cujus diameter EH, dimidium vero lateris recti⁴⁾ EI. Sitque HI ad IE sicut duo simul latera GA, GC

³⁾ Comparez le premier alinéa de la Première Partie, p. 235.

⁴⁾ Lisez : lateris transversi.

ad basin AC. Describaturque circa hyperboles portionem rectangulum ad centrum sectionis terminatum FK. Dico itaque esse sicut duo latera AG, GC ad longitudinem parabolæ ABC, ita \square FK ad spatium residuum DKVFED.

[Fig. II.]



Si enim dictæ rationes æquales esse negentur. Ergo sicut \square ad spatium DKVFED ita erunt dicta duo latera sive linea AGC ad lineam aliquam vel majorem vel minorem parabola ABC. Sit primo, si fieri potest, linea X major parabola ad quam AGC eandem dicatur habere rationem quam \square ad \square . Potest itaque circa parabolam linea ordinatè describi ita ut excessus quo descripta superat parabolam minor sit excessu quo X parabola superat ¹⁾. Esto descripta ejusmodi linea ordinate ANOZEC. Ergo ipsa minor erit quam linea X. Dividatur deinde \square i¹ latus KV in tot partes æquales quot fuere in recta parabolam in vertice contingente ad circumscribendam lineam ordinatè. Et a punctis sectionum ducantur ad hyperbolam rectæ axi parallelæ, et secundum has figura ordinatè circa hyperbolam describatur, cujus extrema \square a quæ dimidiam cæterorum latitudinem habent, altitudine vero æquant \square FK, sint QK, YV. Et reliqua etiam \square a ad hanc altitudinem produ-

cantur. A punctis vero quibus linea ordinate circum parabolam descripta inflexa

¹⁾ D'après le „Theorema III”, p. 239.

²⁾ Cette Proposition n'a pas été formulée explicitement, mais elle résulte presque immédiatement du „Theorema I”, p. 238.

³⁾ Voir la p. 243.

⁴⁾ Voir la lettre peu lisible à droite de la lettre H.

est ducantur rectæ axi parall. ut OP quæ quidem in linea AGC partes æquales intercipient quarumque singulæ ut NP duplæ erunt ad NA, uti constat ex Prop. ...²⁾).

Quoniam igitur per [Theorema V]³⁾ dupla rectæ NA ad NO, et reliquas singulas lineæ circumscr.^æ partes eadem ratione refertur, qua DK ad ML et reliquarum unamquamque quæ \square orum altitudines definiunt. Ut autem DK ad ML et singulas reliquas dictarum linearum, ita duplum \square QK ad \square SR, et reliquorum unumquodque quæ secundum illas descripta sunt \square^a . Ergo sicut dupla NA hoc est sicut NP ad NO ita duplum \square QK, hoc est, \square QR ad \square SR. Et sicut PW ad OZ ita \square Δ Γ ad \square Θ Γ . Et sicut WG Δ ad Z Ξ ita \square Γ Σ ⁴⁾ ad \square Γ Φ . atque ita porro, sicut singulæ partes lineæ AGC, ad partes singulas lineæ ordinatè circumscriptæ, quæ inter easdem secum parallelas continentur, ita \square^a singula altitudinem DK habentia ad ea quæ easdem cum ipsis bases habent. nam ipsa quoque AN prout est pars lineæ AGC ad seipsam prout est pars lineæ ordinate circumscriptæ, ita se habet ut \square QK pars \square DV ad seipsum prout est pars fig.^æ ordinate circumscriptæ. Sunt itaque quædam magnitudines lineæ AN, NP, PW, WG Δ , &c., partes AGC, aliæque totidem numero \square^a QK, QR, Δ Γ , Γ Σ &c. componentes \square DV quarum binæ quæque eandem inter se rationem tenent; sunt enim utrobique omnes inter se æquales præter duas extremas quæ reliquarum sunt subduplæ. Referuntur autem dictæ lineæ singulæ ad alias lineas quæ constituunt lineam ordinatè circumscriptam. Itemque referuntur \square^a dicta iisdem proportionalibus ad alia \square^a quæ constituunt figuram ordinatè circumscriptam. Quare omnes simul lineæ AN, NP, PW, WG Δ , &c. hoc est linea AGC sese habebunt ad omnes AN, NO, OZ, Z Ξ &c. hoc est ad lineam quæ parabolæ ordinate circumscripta est, sicut omnia \square^a QK, QR, Δ Γ , Γ Σ &c. hoc est \square DV ad omnia simul QK, SR, Θ Γ , Γ Φ &c. hoc est ad figuram ordinatè descriptam circa portionem hyperboles^{*)}.

^{*)} Arch. 2 de Conoid.^{*)}.

⁵⁾ Il s'agit de la deuxième Proposition de l'ouvrage d'Archimède „De conoidibus et sphaeroidibus”. Voici cette proposition: „Si fuerint quotcumque numero sumptæ magnitudines, itemque totidem aliæ numero ponantur magnitudines, hoc pacto, ut quamcunque unaquaque prius sumptarum ad suam proximam habuerit proportionem, eandem unaquaque posterius sumptarum ad suam eodem ordine proximam seruet, quæcunque fuerint illæ proportionem, item prius sumptæ magnitudines ad quasdam alias, totidem numero magnitudines omnes, aut earum aliquas, quibuscumque proportionibus referantur: sumptæ quoque posterius magnitudines ad quasdam alias totidem, eodem ordine & eisdem proportionibus sint relatæ: erit tunc, ut magnitudines prius sumptæ omnes, habeant ad eas magnitudines omnes ad quas dicta ratione comparantur, eandem proportionem, quam magnitudines posterius sumptæ omnes habuerint, ad omnes illas magnitudines ad quas fuerint similiter comparatæ” (p. 61—62 de l'édition de Bâle; Heiberg, T. I. p. 290—291, où cette proposition porte le numéro 1).

Afin d'expliquer la portée de cette proposition, supposons qu'on ait une première suite de grandeurs a_1, a_2, \dots, a_n (les parties AN, NP, etc. de la ligne brisée AGC), une deuxième

Ratio autem \square^i DV ad dictam figuram circumscriptam minor est quam ejusdem \square^i DV ad spatium DKVFED, quoniam figura circumscripta major est spatio DKVFED¹⁾. Ergo et lineæ AGC ad lineam circa parabolam ordinatè descriptam, minor erit ratio quam \square^i DV ad spatium DKVFED. Quam autem rationem habet \square DV ad spatium dictum, eam positum fuit habere linea AGC ad lineam X. Ergo ratio lineæ AGC ad eam quæ ordinatè circa Parabolen descripta est minor erit quam ejusdem AGC ad X. Quamobrem ordinatè circumscripta major erit quam X. Eadem vero minor antea quam X ostensa est. quod fieri non potest. Itaque non est sicut \square DV ad spatium DKVFED ita linea AGC ad majorem aliquam quam sit parabola ABC.

Sed neque ad minorem. Nam si dicatur esse, ut \square DV ad spatium DKVFED ita linea AGC ad minorem aliquam quam sit parabola ABC. Ergo sicut linea AGC ad parab. ipsam ABC ita erit \square DV ad spatium quoddam majus spatio DKVFED. Est id spatium in quo ψ . Quoniam igitur spatium in quo ψ majus est spatio DKVFED potest circa spatium DKVFED describi figura ordinatè quæ sit minor spatio ψ ²⁾. Descripta itaque intelligatur. Et ex quot \square is composita est totidem partibus constans linea ordinatè circa parabolam describatur.

Ergo similiter ut prius ostenditur lineam AGC ad ordinate circumscriptam parabolæ eandem rationem habere, quam \square DV ad figuram circa spatium DKVFED ordinate circumscriptam. Ratio autem lineæ AGC ad ordinate circa parab. descriptam minor est quam ejusdem AGC ad ipsam parab. ABC. Ergo et ratio \square^i DV ad figuram ordinate descriptam circa spat. DKVFED minor erit quam lineæ AGC ad parab. ABC. Sicut autem linea AGC ad parab. ABC ita erat \square DV ad ψ spatium. Ergo \square^i DV minor erit ratio ad figuram ordinate circa spatium DKVFED descriptam, quam ad spatium ψ . Ideoque dicta figura spatio ψ major erit. Sed eadem minor quoque dicta fuit. Quod fieri nequit. Ergo neque major est ratio \square DV ad spat. resid. DKVFED quam lineæ AGC ad parab. ABC. At neque minorem esse demonstratum est. Ergo eadem erit. Quod erat demonstr.

b_1, b_2, \dots, b_n (les rectangles DΠ, QR, ΔΓ, etc.), une troisième c_1, c_2, \dots, c_n (les côtés AN, NO, etc. de la figure circonscrite à la parabole), une quatrième d_1, d_2, \dots, d_n (les rectangles DΠ, SR, ΘΓ, etc.) et qu'il existe entre les termes de ces suites les relations suivantes:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n;$$

$$a_1 : c_1 = b_1 : d_1; a_2 : c_2 = b_2 : d_2; a_3 : c_3 = b_3 : d_3; \dots; a_n : c_n = b_n : d_n;$$

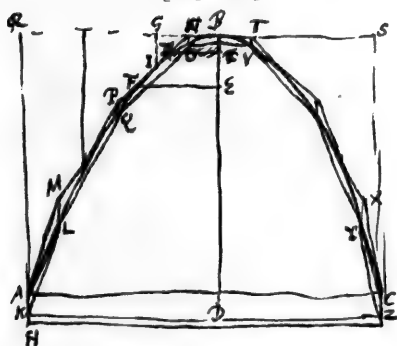
alors la proposition nous apprend qu'on a :

$$\sum_1^n a_p : \sum_1^n c_p = \sum_1^n b_p : \sum_1^n d_p.$$

[TROISIÈME PARTIE ¹⁾.]

[THEOREMA X.]

[Fig. 13.]



Data parabola ABC æqualiter ab axe BD divisa, possibile est ipsi lineam ordinatè circumscribere²⁾, ut circumductis utrisque circa mantentem parabolæ axem, fiat excessus quo superficies ex linea circumscripta genita superat conoidis parabolici ABC superficiem, minor spatio quovis proposito.

Fiat enim cylindrus HC eandem cum conoide ABC basin habens, cujus cylindri superficies sine basibus minor sit proposito spatio, hoc enim fieri posse perspicuum est. Sit autem dicti cylindri latus AH. Et sumatur in axe parabolæ a vertice B, intervallum BE quadruplum ipsius AH. Et applicetur ordinatim EF. Porro descripto circa parabolam \square° ARSC eandem cum ipsa basin altitudinemque habente, dividatur ipsius latus RS in partes æquales numero pares, ita ut singulæ ipsarum veluti BG, minores sint recta EF. Et ex punctis divisionum ductis lineis axi parallelis quæ parabolæ occurrant, circumscribatur per occurfus puncta linea inflexa ordinatè AMPNTXC. Dico hanc una cum parabola ABC circa BD circumductam, superficiem describere quæ conoidis ABC superficiem excedat minori quam propositum est spatio.

Ducantur enim a singulis lineæ circumscriptæ flexionum punctis rectæ axi parallelæ quæ parabolæ occurrant, ML, PQ, NO, TV, &c. et jungantur LQ, QO, OV, &c. quæ lineæ æquales et parallelæ erunt singulis circumscriptæ partibus MP, PN, NT, &c., ut supra dem. ³⁾. Sint autem et LK, YZ parallelæ ipsis MA, XC; quibus proinde et æquales erunt; fientque insuper AK, CZ, æquales ipsis ML, XY. Jungantur denique AL, CY, KZ, quarum quidem KZ parallela

¹⁾ Cette Troisième Partie contient la réduction, rédigée selon la mode des anciens, de la quadrature de la surface courbe du conoïde parabolique à la quadrature du cercle. Elle est empruntée à des feuilles détachées qui font suite à celles mentionnées dans la note 2 de la p. 248.

²⁾ Voir la „Definitio I”, p. 237.

erit AC, quoniam ML, XY inter se æquales sunt per [Theorema II ⁴)], denique et AK, CZ.

Itaque si circa axem BD omnia circumvolvi intelligantur, apparet superficiem à circumscripta ordinatè linea AMPNTXC genitam æqualem esse ei quæ fit ab inflexa KLQOVYZ, cum singulæ hujus lineæ partes cum singulis illius partibus et magnitudine et situ ad axem conveniant. Hac autem superficie ex KLQOVYZ major est superficies ab inflexa KALQOVYCZ, cum eisdem utraque in plano terminos habent, circumferentiam nimirum circuli quem describit in circumlationem punctum K ⁵). Ergo superficies ab inflexa KALQOVYCZ major quoque erit ea quæ fit ab ordinate circumscr.^a AMPNTXC. Illa vero superficies composita est ex superficie quæ fit ex AK latere cylindri AZ, et ex superficie genita ab inflexa ALQOVYC. Ergo hæ duæ superficies majores quoque erunt ea quæ fit ab ordinate circumscripta. Ideoque multo magis superficies à latere AK una cum superficie conoidis ABC, major erit ea quæ fit ab ordinatè circumscripta. Est enim superficies conoidis ABC major superficie genita ab inflexa ALQOVYC, quum ipsam comprehendat, eisdemque in plano habeat terminos. Minor igitur est excessus superficiei ex ordinate circumscripta genitæ supra conoidis superficiem, quam est superficies à latere cylindri AK. Hæc autem superficies proposito spatio adhuc minor est. Ergo fieri posse constat id quod asseruimus. Quod autem minor sit superficies à latere AK effecta spatio proposito sic ostendemus. AK æqualis est, uti jam ante dictum fuit, ipsi ML, hæc vero ipsi NO per [Theorema II ⁴)]. Est autem NO æqualis $\frac{1}{4}$ GI quum sint inter se NO, GI, sicut quadrata NB, GB. Sed GI minor est quam BE quoniam et BG minor, ex constr., quam EF. Itaque NO minor erit quam $\frac{1}{4}$ BE. Quare et AK minor erit quam $\frac{1}{4}$ BE, hoc est quam AH. Superficies autem quæ fit ex conversione AH circa axem AD ⁶), hoc est superficies cylindri HC absque basibus, minor erit spatio proposito. Ergo omnino quoque, superficies ex AK in circumversione effecta minor erit spatio proposito.

³) Voir la démonstration du Théorème II, p. 239.

⁴) Voir la p. 238.

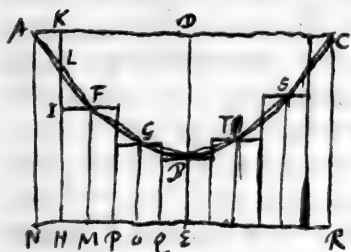
⁵) Voici le postulat d'Archimède qui fait suite à celui mentionné dans la note 5 de la p. 237 : „Similiter autem & superficierum eisdem terminos habentium, si in plano terminos habuerint, minimam esse planam. Aliarum vero superficierum, et eisdem terminos habentium, si in plano terminos habeant, eas esse inæquales: ubi autem ambæ in partes easdem cauæ fuerint, & uel altera tota contineatur ab altera, aut alteram earum ab altera superficie, & plana eisdem terminos cum illa habente: aut eius partem quidem comprehendi constet, partem vero communem habere, & comprehensam esse comprehendente minorem”. (Voir la p. 2 de l'édition de Bâle, ou la p. 11 du T. I de l'édition de Heiberg).

⁶) Lisez : BD.

ex AK et ex GM five HK. est autem solid. ex qu. FK in $3AH \propto$ solidis à duobus quæ fiunt ductis $\square^{\circ} AKH$ et qu. FH in $3AH$; nam qu. FK $\propto \square^{\circ} AKH$ una cum qu. FH³⁾. Differentia vero cuborum ex AK et HK æqualis est solido ex $\square^{\circ} AKH$ in $3AH$ una cum cubo ex AH⁴⁾. Ergo cylind. à $\square^{\circ} KC$ ad solidum à trapezio MGAK ut solida duo quæ fiunt ductis $\square^{\circ} AKH$ et qu. FH in $3AH$, ad solidum ex $\square^{\circ} AKH$ in $3AH$ una cum cubo ex AH. Sunt autem duo illa solida duobus hisce minora, quoniam minus est solidum ex qu. FH in $3AH$, hoc est solid.^m ex $3qu^{\circ} FH$ in AH, cubo ex AH⁵⁾. Igitur minor quoque erit cylindrus ex conversione $\square^{\circ} KC$, solido quod fit ex convers. trapezij MGAK. Communis auferatur cylindrus qui fit ex conv. $\square^{\circ} KG$. Ergo minus est solidum à $\square^{\circ} HC$ quam quod à $\triangle^{\circ} GHA$. Ideoque si utrumque horum seorsim auferatur ab eo solido quod fit conversione $\square^{\circ} HE$ majus esse liquet solidum residuum ex convers. \square° orum AB, CD, quam quod fit à trapezio AGDE. quod erat dem.

[THEOREMA XI.]

[Fig. 15.]



ex conversione spatij residui oritur.

Data portione hyperbolæ ABC cujus diam. sit basi ad rectos angulos. Si rectang. ei circumscribatur ad centrum terminatum AR, et figura ordinatè circa spatium residuum ABCRNA sicut supra præscriptum fuit⁶⁾, manente vero diam. DE omnia circumvertantur. Dico solidum ex conversione figuræ ordinatè circumscriptæ, majus esse solido quod

Jungantur enim puncta quæque bina quibus bases rectangulorum figuræ circumscr.^æ secant hyperbolam, rectis AF, FG, GB, BT, &c. Erit igitur linea quædam inflexa hoc modo intra hijp. portionem descripta. Jam vero si omnia circa diam. DE circumvolui intelligantur orietur solidum ex conversione spatij rectilinei à dicta inflexa et rectis AN, NR, RC comprehensi, quod solidum majus erit eo quod fit à spatio residuo ABCRNA, quum hoc illius partem esse appareat. Est autem solidum ex conversione utriusque $\square^{\circ} KN$, FH majus quam quod fit conversione trapezij AFMN, quoniam dicta \square° a sibi mutuo conjuncta bases habent æquales, et latera parallela axi DE⁷⁾. Similiter et solidum ex conversione utriusque $\square^{\circ} FP$, GP, majus est eo quod fit conversione trapezij FGOM. Et solidum ex conversione \square° utriusque GQ, BQ, majus eo quod fit a trapezio GBEO. Itaque totum simul solidum quod oritur ex conversione figuræ ordinatim ex \square° is

⁶⁾ Consultez le deuxième alinéa de la „Definitio II”, p. 246.

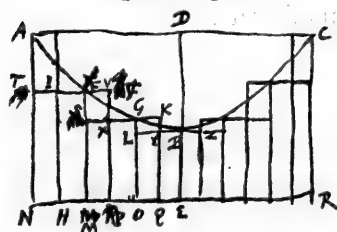
⁷⁾ Voir le „Lemma III”, qui précède.

circumscriptæ majus erit solido quod fit ex conversione figuræ ex omnibus dictis trapezijs compositæ. Sed hoc solidum majus esse dictum est, eo quod fit ex conversione spatij residui ABCRNA. Ergo omnino quoque solidum id quod ex figura ordinatè circumscripta efficitur, majus erit eo quod fit ex dicti residui spatij circumvolutione. quod erat ostend.

[THEOREMA XII.]

Iisdem positis ¹⁾, dico solidum ex conversione figuræ ordinatè circumscriptæ, excepto eo quod fit rectangulo extremo AH minus esse eo solido quod fit a spatio residuo ABCR.

[Fig. 16.]



Producantur enim reliquorum \square orum bafes VI, KX, ZY, quæ ab hyperbola bifariam dividuntur, et VI quidem occurrat ipsi AN in T. KX ipsi FM in S; ZY ipsi GO in L. Itaque existit figura quædam spatio residuo ABCRNA inscripta ex \square is æqualem latitudinem habentibus FN, GM, BO, &c. cujus proinde solidum ex conversione circa axem DE

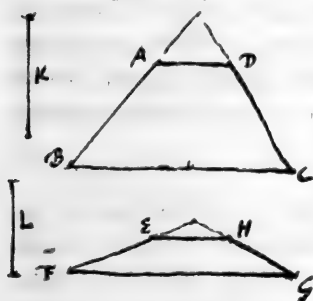
genitum, minus est eo quod fit à spatio residuo ABCRNA. Atqui dicto solido a \square is FN, GM, BO genito minus esse probatur, id quod fit à \square is VH, KP, BQ. hoc est solidum ex figura ordinatè circumscripta, excepto quod fit à \square ° AH. Nam solidum quod fit a \square VH minus est eo quod fit à \square ° FN, quum \square a quidem hæc inter se sint æqualia alterum vero altero minus distet ab axe DE. Et eadem ratione solidum quod fit à \square KP minus est eo quod à \square ° GM. Ac tandem illud quoque quod fit à \square ° BQ minus apparet esse eo quod à \square BO. Itaque solidum effectum à figura ordinatè circumscripta citra \square AH, cum fit minus solido quod fit à \square is FN, GM, BO multo minus erit eo quod à spatio residuo ABCRN efficitur. Quod erat dem.

Itaque solidum a tota figura ordinatè circa spatium residuum ABCRNA descripta minori excessu superat solidum ab ipso spatio residuo ortum, quam fit id solidum quod fit ab extremo rectangulo AH. Unde manifestum est, posse figuram ordinatè describi circa ABCRNA spatium, ita ut solidum à dicta figura genitum exuperet illud quod à spatio ABCRNA producitur, excessu minore quam fit solidum quodvis datum. Potest enim ex tot \square is figura circumscripta constitui, ut extremum \square AH quodque ab eo efficitur solidum sit quamlibet exiguum.

¹⁾ Consultez le théorème précédent, p. 257.

[LEMMA IV.]

[Fig. 17.]



Si conii recti duo æquales bases habentes BC, FG secentur planis AD, EH, basi ipsorum æquidistantibus, fuerintque et qui è sectionibus fiunt circuli [AD, EH] æquales. Eam rationem inter se tenebunt superficies frustorum inter bases et secantia plana interceptæ, quam earundem superficierum latera [AB, EF].

Esto enim superficiei conicæ cujus latus AB, æqualis circulus radio K descriptus. Superficiei vero cujus latus EF æqualis circulus à radio L.

Itaque quadratum ex K æquatur \square° sub AB et dimidijs BC, AD*, quadratum vero ex L æquatur \square° sub EF et dimidijs FG, EH. Est autem illud \square° ad hoc \square^m sicut AB ad EF, quia dimidia BC, AD æquales sunt dimidijs FG, EH. Ergo et quadratum ex K ad qu. ex EF ³⁾ erit sicut AB ad EF. Sicut autem qu. ex K ad qu. ex L ita est circulus à semidiametro K ad circulum à semidiametro L. Ergo et circulus ille ad hunc erit ut AB ad EF. Circulus autem à semid. K æqualis positus fuit superficiei conicæ cujus latus AB. Et circulus qui fit semid. EF ⁴⁾, æqualis superficiei conicæ cujus latus EF. Ergo et superficies illa ad hanc erit ut AB ad EF. Quod er. dem.

* Arch. 1. De Sphæra et Cylindro ³⁾.

[THEOREMA XIII.]

Iisdem positis ⁵⁾, si manente axe GBΩ [Fig. 18], parabola ABC simul cum Δ°AGC circumvolvatur, ita ex illa conoides

²⁾ Il s'agit de la Prop. 16 du Livre I de l'ouvrage mentionné: „Si conus æquicruris secetur superficie plana, quæ quidem superficies basi ipsius conii sit æquedistans: ea conii superficies, quæ à secante & à base concluditur, ei circulo æqualis esse probatur, cuius circuli semidiameter sit media secundum proportionem inter latus superficierum conicæ, eius scilicet quæ inter basim & secantem continetur, et inter lineam æqualem duabus semidiametris simul iunctis duorum circulorum, eorum scilicet qui in base & secante notantur” (p. 17 de l'édition de Bâle; Heiberg, I, p. 76—79).

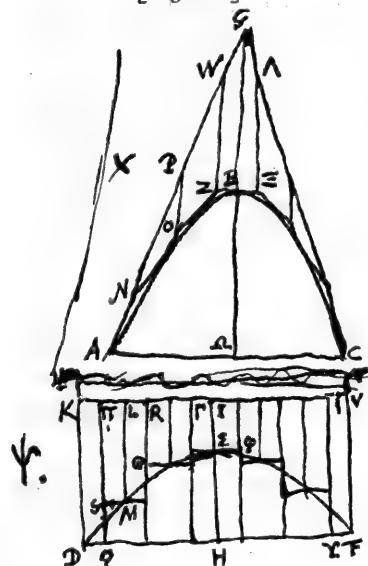
³⁾ Lisez: qu. ex L.

⁴⁾ Lisez: semid. L.

⁵⁾ Consultez le „Theorema VIII”, p. 249. En effet, à l'exception de la position inverse du rectangle KF, la présente figure et celle qui se rapporte au „Théorema VIII” se correspondent ligne par ligne et lettre par lettre. Il résulte donc de l'expression „Iisdem positis” que dans

parabolicum ex hoc vero conus oriatur. Et manente item axe IEH, circumvolvatur hyperbolæ portio DEF simul cum \square°

[Fig. 18.]



DV, ut ex illa conoides hyperbolicum, ex hoc fiat cylindrus. Dico quam rationem habet cylindrus DV ad partem sui residuam dempto conoide DEF, eandem habere superficiem convexam coni AGC ad superficiem convexam conoidis parabolici ABC.

Nam si hoc verum esse negetur, Ergo sicut cylindrus DV ad partem sui reliquam dempto conoide DEF, ita erit superficies conica AGC ad majorem vel ad minorem quam sit superficies convexa conoidis ABC.

Esto primum ad majorem, quæ sit circulus circa diametrum X. Quoniam igitur circulus circa X major ponitur superficie ABC conoidis, poterit per [Theorema X]¹⁾ circa parabolam ABC, linea inflexa ordinatè describi quæ simul cum parabola circumvoluta circa axem BQ, efficiat superficiem

minorem circulo circa X diametrum. Esto descripta itaque ejusmodi linea quæ sit ANOZEC. Et circa spatium residuum ab hyperbolæ portione DKVFED figura item ordinate describatur, totidem \square is constans quot partibus linea ANOZEC, eo modo quo in prop. præced.²⁾ Et omnia similiter constructa sint. Manentibus autem axibus GBQ, HEI cuncta converti intelligantur. Quoniam igitur linearum GW, WP, PN, NA³⁾ unaquæque ad sibi proximam eadem ratione refertur qua unaquæque harum IF, IR, II, IK ad sibi proximam. Etiam quadrata illarum inter se eandem rationem consequenter servabunt, quam harum inter se quadrata. Sicut autem quadrata inter se linearum GW, GP, GN, GA ita se habent superficies conicæ quarum hæ lineæ latera existunt, et sicut quadrata inter se rectarum IF, IR, II, IK ita se habent bases cylindrorum ac proinde ipsi quoque cylindri, qui sunt conversione \square orum FH, RH, PH, KH. Ergo illæ superficies conicæ, unaquæque ad sibi proximam eadem ratione referentur, qua cylindrorum istorum quisque

une rédaction antérieure et provisoire les Théorèmes VIII et XIII se suivaient immédiatement; puis les besoins de la démonstration ont nécessité l'intercalation d'autres théorèmes. Comparez encore à ce propos les notes 2 de la p. 260 et 6 de la p. 261.

¹⁾ Voir la p. 254.

²⁾ Ils'agit ici sans doute du „Theorema VIII”. Voir la note 5 de la p. 259.

³⁾ Lisez: GW, GP, GN, GA.

ad proxime sequentem. Ideoque et minima dictarum superficierum et excessus quibus unaquæ ipsarum a sequente superatur, consequenter eandem rationem inter se obtinebunt quam minimus dictorum cylindrorum et excessus quibus unusquisque ipsorum à sequente superatur. Sunt igitur magnitudines quædam superficies genitæ ex conversione linearum GW, WP, PN, NA, itemque aliæ magnitudines totidem numero, nimirum solida orta ex conversione \square orum $\Gamma H, \Gamma \Delta$ ⁴⁾, $\Delta \Pi, \Pi D$, quarum binæ quæque eandem inter se rationem servant. Singulæ autem dictarum superficierum ad alias quasdam superficies referuntur; videlicet superficies à latere GW ad circumulum à semidiametro BZ. et superficies à latere WP ad eam quæ fit à latere ZO. et quæ à latere PN ad eam quæ ab ON. Et quæ ab NA prout est pars superficiei coni AGC ad seipsam refertur prout est pars superficiei à linea ordinatè circumscripta genitæ. Et iisdem quoque proportionibus singula dictorum solidorum ad alia quædam solida referuntur. Est enim sicut superficies conica à latere GW ad circumulum à semid. BZ, hoc est sicut linea GW ad BZ *, hoc est sicut HI ad IE per ea quæ præced. prop.^e ostensa ⁶⁾; ita cylindrus ex conversione \square i HF ad cylindrum ex conversione \square i EF. Et sicut superficies conica à latere WP ad superficiem conicam à latere ZO, hoc est, ut linea WP ad ZO *, hoc est ut ΔR ⁴⁾ ad ΘR ita solidum à \square ° $\Delta \Gamma$ in conversione factum ad solidum à \square ° $\Theta \Gamma$. nam et hæc solida altitudinum suarum rationem sequi perspicuum est. Eademque ratione sicut conica superficies à latere PN in conversione effecta ad eam quæ fit à latere ON, ita solidum à \square ° $\Delta \Pi$ ad solidum à rectang. SR. Et sicut superficies conica à latere NA ad seipsam ita solidum à \square ° $D \Pi$ ad seipsum. Ergo sicut omnes simul superficies conicæ à lateribus GW, WP, PN, NA in conversione factæ, ad omnes factas à lateribus BZ, ZO, ON, NA, hoc est sicut tota superficies conica AGC ad superficiem totam à linea ordinatè circumscripta genitam, ita erunt omnia simul solida conversione \square orum $H \Gamma, \Gamma \Delta, \Delta \Pi, \Pi D$ producta, ad omnia simul solida ex conversione \square orum $E \Gamma, \Gamma \Theta, R S, \Pi D$ ⁸⁾, hoc est, ita cylindrus DV ad solidum ex conversione figuræ ordinate descriptæ circa

* 15 Arch. 1. de Sphæra *).

* ... hujus *).

⁴⁾ La lettre Δ manque dans la figure 18; mais on la retrouve dans la figure 11 du théorème VIII, p. 250. Elle doit être placée à droite du point Q.

⁵⁾ Voici cette proposition d'Archimède: „Cuiuslibet coni æquicruris superficies ad basim suam, eandem habet proportionem, quàm latus ipsius coni habet ad lineam eductam à centro basis coni ad ejusdem circumferentiam” (p. 17 de l'édition de Bâle, Heiberg I, p. 76—77).

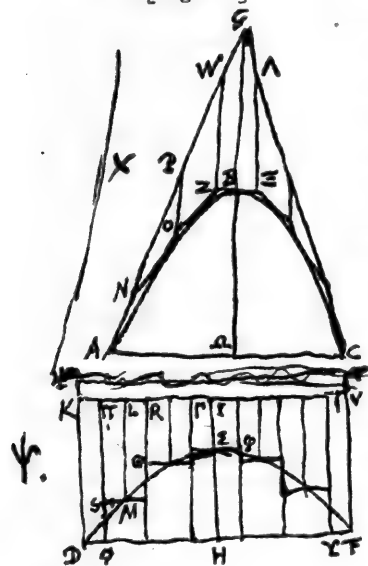
⁶⁾ Il s'agit toujours du „Theorema VIII”; voir la p. 251 où l'on lit: „sicut singulæ partes lineæ AGC, ad partes singulas lineæ ordinatè circumscriptæ, quæ inter easdem secum parallelas continentur, ita \square singula altitudinem DK habentia ad ea quæ easdem cum ipsis bases habent”; c'est-à-dire les rectangles $\Gamma E, \Gamma \Theta, R S, \Pi D$.

⁷⁾ Il s'agit du „Lemma IV”, p. 259.

⁸⁾ Il s'agit cette fois encore d'une application de la proposition d'Archimède mentionnée dans la note 5 de la p. 251. Ici les a sont les surfaces décrites par les lignes GW, WP, etc.; les b les solides décrits par les rectangles $\Gamma H, \Gamma \Delta$, etc.; les c les surfaces décrites par les lignes BZ, ZO, etc.; les d les solides décrits par les rectangles $E \Gamma, \Theta \Gamma$, etc.

spatium residuum DEFVKD. Ratio autem cylindri DV ad dictum solidum ex figura ordinatè circumscripta

[Fig. 18.]



genitum minor est ratione ejusdem cylindri DV ad partem sui quæ relinquitur dempto conoide DEF. quoniam solidum ex figura ordinatè circumscripta majus est dicta parte residua ¹⁾. Ergo et superficiei conicæ AGC ad superficiem à linea ANOZB ordinatè circa parabolam descripta, minor erit ratio quam cylindri DV ad partem sui residuam dempto conoide DEF. Huic autem eadem posita fuit ratio superficiei conicæ AGC ad circumulum circa X diametrum. Ergo superficiei conicæ AGC ad superficiem à linea ANOZB, minor erit ratio, quam ejusdem conicæ superficiei AGC ad circumulum circa X. Quare major erit superficies à linea ANOZB circumulo circa X. Eadem vero minor hoc circumulo superius dicta fuit. quod fieri non potest. Itaque non est sicut cylindrus DV ad partem sui quæ remanet dempto conoide DEF, ita superficies conica AGC ad majorem aliquam quam sit superficies ABC conoidis parabolici.

Sed neque ad minorem. Nam si dicatur esse ut cylindrus DV ad dictam partem residuam, ita superf. conica AGC ad minorem aliquam superficiem quam sit conoidis ABC, Ergo quoque sicut superf. conica AGC ad ipsam superf. conoidis ABC, ita erit cylindrus DV ad solidum quoddam majus dicta parte residua. Esto id solidum in quo ψ . Ergo quia solidum ψ majus est parte cylindri DV residua post ablatum conoides DEF, sive solido quod oritur ex conversione spatij DEFVKD; constat circa spatium DEFVKD figuram ordinatè ex \square is describi posse, quæ simul circumlata, solidum efficiat quod minus sit solido ψ ²⁾. Descripta itaque intelligatur ejusmodi figura; et ex quot \square is ipsa composita erit, ex totidem rectis constans linea ordinatè circa parabolam ABC itidem descripta sit. Similiter itaque ut prius, ostendemus superficiem conicam AGC ad superficiem genitam à linea ordinatè parabolæ circumscripta, eandem habere rationem quam cylindrus DV ad solidum ex figura ordinate circa spatium DEFVKD descripta. Est autem minor ratio superficiei conicæ AGC, ad superficiem, à linea ordinatè circumscripta, ortam, quam ejusdem superficiei conicæ AGC ad superficiem conoidis parabolici ABC ³⁾.

¹⁾ Voir le Théorème XI, p. 257.

²⁾ Voir le dernier alinéa du Théorème XII, p. 258.

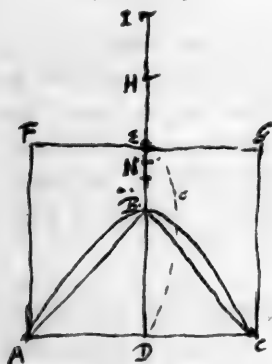
³⁾ Puisque, d'après le postulat d'Archimède mentionné dans la note 5 de la p. 255, la surface décrite par la figure rectiligne circonscrite à la parabole, excède celle du conoïde parabolique.

Ergo et ratio cylindri DV, ad solidum quod fit ex conversione figuræ ordinatæ circa spatium DEFVKD descriptæ, minor erit ea quam superficies conica AGC habet ad superficiem conoidis ABC. Huic autem rationi eadem posita fuit ratio cylindri DV ad solidum ψ . Ergo cylindrus DV ad solidum à dicta figura ordinatæ descripta genitum minorem habebit rationem quam cylindrus idem DV ad solidum ψ . Quare solidum à figura ordinate circumscripta majus erit solido ψ . Sed et minus antea dictum fuit. Quod esse nequit.

Ergo neque erit cylindrus DV ad partem sui residuam demto conoide DEF, ita superf. conica AGC ad minorem aliquam quam sit superf. conoidis parabolici ABC. Sed neque ad majorem, ut modo ostendimus. Ergo reliquum est, ut sicut cylindrus DV ad dictam sui partem reliquam ita sit superf. conica AGC ad superf. conoidis parabolici ABC. quod erat demonst.

[THEOREMA XIV.]

[Fig. 19.]



Est hyperbolæ portio ABC, cujus axis BD fit basi ad angulos rectos. latus autem transversum fit BH; centrum sectionis E. et describatur super eadem basi \square^m ad centrum terminatum FC. Et manente axe ED, dictum \square^m unâ cum portione ABC circumvertatur. Dico cylindrum FC ex conversione \square^i genitum, ad partem sui residuam, dempto conoide ABC, eam habere rationem quam linea tripla ED ad æqualem utrique simul et duplæ ED, et ei lineæ; quæ sese habeat ad EB sicut BH ad HD.

Producatur enim latus transversum BH ad I ut HI sit æqualis EH vel EB et sicut HD ad DI ita fit BD ad DN. Quoniam igitur conoides hyperb. ABC ad conum eandem basin et altitudinem cum ipso habentem, eam habet rationem quam ID ad DH *, hoc est quam ND ad DB. dictus autem conus ad cylindrum

* Archim. de Conoid. *).

4) Il s'agit de la Prop. 27: „Quælibet portio conoidalis obtusianguli” [conoïde hyperbolique] „abscisa plano super axem erecto, habet ad conum, qui eandem basim & axem cum portione teneat eundem, eam proportionem, quam habet utraque simul lineæ quæ sit æqualis axi portionis, et ea quæ sit tripla lineæ ad axem adiectæ, ad lineam his utrisque æqualem, axi portionis & lineæ duplæ, ad lineam axi adiectam” (p. 84 de l'édition de Bâle, Heiberg I, p. 416—417, où elle porte le numéro 25). La „linea axi adiecta” d'Archimède est représentée dans la fig. 19 par la ligne BE, c'est-à-dire par le demi-axe transverse de l'hyperbole ABC.

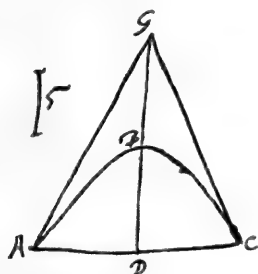
nato, intelligatur, manente axe HI, et portio et \square DV circumvolvi. Itaque cylindrus DV ex conversione \square^i ortus ad partem sui quæ remanet dempto hyperbolico conoide DEF eam habebit rationem quam tripla HI ad duplam HI junctam ei lineæ quæ sit ad EI sicut 2EI ad utramque simul HI, IE³⁾, sive permutando, quæ sit ad 2EI ut EI ad duas simul HI, IE. Est autem HI \propto AG, et EI \propto AΩ. Ergo dictus cylind. ad dictum residuum eam quoque habebit rationem, quam tripla AG habet ad 2AG una cum ea lineæ quæ sit ad 2AΩ hoc est ad AC, sicut AΩ ad utramque simul AΩ, AG, sive ut AC ad ambitum \triangle^i AGC. Hæc vero lineæ est s. Ergo cylindr. DV ad partem sui reliquam dempto conoide DEF, eam habet rationem quam 3AG ad 2AG una cum s lineæ. Sicut autem dictus cylindrus ad dictum residuum ita est superficies coni AGC sine basi ad superficiem conoidis parabolici ABC sine basi⁴⁾. Ergo et hæ superficies eam inter se rationem servant quæ est 3AG ad 2AG una cum s lineæ. Quod erat ostend.

Hinc manifestum est superficiem coni AGC ad superficiem conoidis ABC, utrâque sine basi sumpta, minorem semper rationem habere quam sesquialteram⁵⁾.

[THEOREMA XVI.]

Conoidis parabolici, cujus axis ad basin rectus sit, super-

[Fig. 21.]



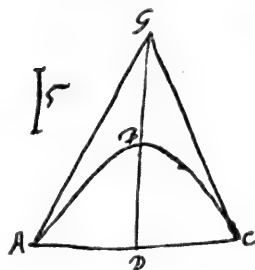
ficies convexa ad basin eam habet rationem quam inter se habent lineæ rectæ, quarum prior composita sit ex duobus lateribus trianguli isoscelis, basin habentis diametrum circuli qui conoidis basis est, altitudinem vero conoidis duplam, et ex ea lineæ quæ sit ad basin dicti trianguli sicut basis eadem ad totius dicti trianguli ambitum: altera vero lineæ dictæ baseos sit sesquialtera⁶⁾.

bolique DEF a été construit de manière qu'on a $2AG : AC = HI : IE$ (voir le „Theorema VIII” p. 249). Il est donc évident que le conoïde hyperbolique de la figure présente constitue un cas particulier de celui du Theorème XIII.

⁵⁾ C'est-à-dire plus petit que le rapport 3 : 2.

⁶⁾ Posant donc $GC = a$, $DC = r$ on trouve $2r^2 : (a + r)$ pour la ligne s qu'on doit ajouter à 2a, et, par suite, pour la surface du conoïde parabolique $2(a^2 + ar + r^2) \pi : 3(a + r)$. Introduisant plutôt, au lieu de a et r, la hauteur $BD = h$ du conoïde et le paramètre p de la parabole $y^2 = 2px$ on a $r = \sqrt{2ph}$; $a = \sqrt{2h(2h + p)}$; $s = 4ph : (\sqrt{2h(2h + p)} + \sqrt{2ph}) = p(\sqrt{2h(2h + p)} - \sqrt{2ph}) : h$, et l'on obtient pour la surface du conoïde la

[Fig. 21.]

15 Archim. I.
de Sphæra *).

Quia enim superficies conoidis ABC ad superficiem conici AGC eam ostensa est habere rationem quam dupla AG juncta lineæ s ad tripla AG ¹⁾: Est autem superficies conici AGC ad circumulum baseos AC, ut AG latus ad AD semidiametrum baseos*, hoc est ut tripla AG ad triplam AD, seu sesquialteram AC. Erit proinde ex æquo, superficies conoidis ABC ad circumulum baseos AC ut dupla AG juncta ipsi s ad sesquialteram AC quod erat dem.

[THEOREMA XVII.]

Iisdem positis³⁾, si fuerit latus AG [Fig. 21] ad baseos semidiametrum AD sicut numerus ad numerum; dico et superficiem conoidis convexam ABC ad basin suam fore ut numerus ad numerum⁴⁾.

Quia enim GA commensurabilis AD (6.10 Elem.)⁵⁾ erit et componendo utraque simul GA, AD commensurabilis AD (per 16.10 Eucl.)⁶⁾; sicut autem utraque GA et AD ad AD, hoc est sicut ambitus trianguli AGC ad AC ita est AC ad s . Ergo et s ipsi AC commens. erit (11.10)⁷⁾, ac proinde ipsis quoque AD et AG, ut et duplæ AG (12.10)⁸⁾. Quare componendo rursus erit dupla AG una cum s commensurabilis ipsi s (16.10)⁶⁾, ac proinde ipsi AD, uti et triplæ AD (12.10)⁸⁾. Sicut autem dupla AG una cum s ad triplam AD sive sesquialteram AC, ita est superficies conoidis convexa ABC ad circumulum baseos AC (per præc.). Ergo illa quoque superficies huic circulo commensurabilis est (11.10)⁷⁾ ac proinde ad ipsum rationem habebit quam numerus ad numerum (5.10)⁹⁾. Quod erat ostendendum.

formule $\frac{2}{3}\pi [(2h+p)\sqrt{p(2h+p)} - p^2]$, qu'on peut vérifier aisément par les méthodes modernes et qui est conforme à celle communiquée, en janvier 1658, par van Heuraet à van Schooten (voir la p. 131 du T. II), où l'on doit remplacer, afin d'y introduire nos notations, b par h et a , le „latus rectum” de la parabole, par $2p$. Consultez encore à ce propos le dernier alinéa de la p. 189 de l'Avertissement.

¹⁾ Voir le Théorème XV, qui précède.

²⁾ Il s'agit de la Prop. 15 du Livre I; voir la note 5 de la p. 261.

³⁾ Voir le Théorème XVI, qui précède.

⁴⁾ C'est le Théorème que Huygens a choisi pour le communiquer, avec les deux premiers des exemples qui suivent, à de Sluse (voir la lettre du 20 déc. 1657, p. 104 du T. II) et à van Schooten (lettre du 28 déc. 1657, p. 112—113 du T. II), afin de leur montrer qu'il avait trouvé la quadrature de la surface conoïde sans leur faire connaître le résultat précis qu'il avait obtenu et qu'il voulait réserver encore. On retrouve tous les trois exemples dans la lettre

Si fuerit AG dupla AD, erit superficiei conoidis convexæ ABC ad basin ea ratio quæ quatuordecim ad novem.

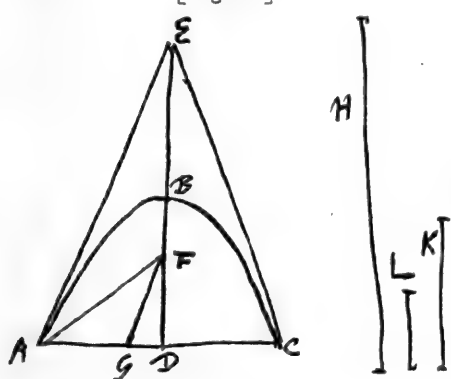
Si AG tripla AD, erit dicta superficierum ratio ut 13 ad 6.

Si AG quadrupla AD, erit superficierum ratio quæ 14 ad 5. quæ exempli gratia attulisse sufficiat.

[PROBLEMA I.]

Dato conoide parabolico, invenire circulum conoidis superficiei æqualem¹⁰⁾.

[Fig. 22].



Esto datum conoides parabolicum ABC, cujus axis BD: Et oporteat superficiei conoidis convexæ ABC æqualem circulum invenire. Secetur conoides plano per axem, unde existat parabola ABC, Et producat axis et fit ED dupla BD. Junctisque AE, EC, ducatur AF quæ bifariam dividat angulum EAD, occurratque axi in F, unde ducatur FG parall. EA. Deinde esto H linea æqualis utrique simul AE et GD. Trienti vero diametri baseos AC sit æqualis recta L. Et inter utramque H et L media

à Gregorius à St. Vincentio du 30 octobre 1659 (voir la p. 502 du T. II) et dans l'„Horologium Oscillatorium”, „Prop. IX” de la „Pars tertia”, p. 74 de l'édition originale.

⁵⁾ Il s'agit de la Prop. 6 du Livre 10 des Éléments d'Euclide, p. 215 de l'édition de 1607 de l'ouvrage de Clavius, cité dans la note 6 de la p. 477 du T. I, où l'on lit: „Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines”.

⁶⁾ „Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt” (Clavius, p. 235).

⁷⁾ Il s'agit de la Proposition: „Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis: & tertia quartæ incommensurabilis erit” (Clavius, p. 225). Cette proposition porte chez Clavius le numéro 10; mais, comme Clavius le fait remarquer à la p. 230, elle fut numérotée 11 dans des éditions qui précédaient la sienne.

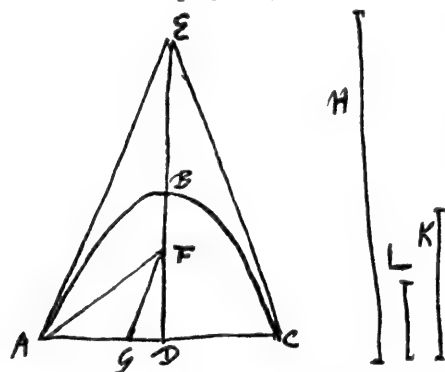
⁸⁾ „Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, inter se sunt commensurabiles” (Clavius, p. 230).

⁹⁾ „Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum” (Clavius, p. 214).

¹⁰⁾ On retrouve cette construction (avec les exemples mentionnés dans la note 4) à la p. 40 du Manuscrit N°. 13 dont il est question dans le dernier alinéa de la note 5 de la p. 235, et de même, sous une forme légèrement modifiée, dans l'„Horologium Oscillatorium”, après la „Prop. IX” de la „Pars tertia”, p. 73—74 de l'édition originale.

proport. fumatur K. dico circulum à semidiametro K æqualem esse superficiei conoidis convexæ ABC.

[Fig. 22.]



Quia enim bifariam dividitur angulus EAD à recta AF, Erit ut EA ad AD ita EF ad FD. Et compon.º ut utraque simul EA, AD ad AD ita ED ad DF. Ut autem ED ad DF ita est AD ad DG. Ergo ut utraque simul EA, AD ad AD ita erit AD ad DG. Et sumptis tam antecedentium quam consequentium duplis, sicut ambitus Δ^i AEC ad AC ita AC ad duplam DG ¹⁾. Quamobrem sicut dupla AE una cum dupla DG ad fesquialteram ipsius AC, vel sumptis utriusque dimidijs ut AE una cum DG, hoc est ut H, ad fesquialteram ipsius AD, ita erit superficies conoidis ABC ad circulum baseos AC ²⁾. Ratio autem quam habet H ad fesquialteram AD, componitur ex rationibus H ad AD, et AD ad fesquialteram AD; quarum hæc eadem est quæ rectæ L ad AD; nam cum L sit subtrippla AC erit eadem subfesquialtera AD. Igitur et ratio quam habet superficies conoidis ABC ad circulum baseos AC, eadem erit compositæ ex rationibus H ad AD et L ad AD, ac proinde eadem quæ \square^i ab H et L contenti hoc est quæ K ad quad. AD. Sicut autem quadr. ex K ad qu. AD, ita est circulus radio K descriptus ad circulum baseos cujus semid. DA. Ergo eadem erit ratio superficiei conoidis ABC ad circulum baseos AC, quæ circuli à K semid. ad eundem circulum AC. Ac proinde dicta conoidis superficies æqualis erit circulo cujus K est semidiameter. Quod erat dem.

¹⁾ La ligne DG est donc la moitié de la ligne s, dont il est question dans les trois théorèmes précédents.

²⁾ Par le „Theorema XVI”, p. 265.

³⁾ On ne retrouve ce problème ni dans la correspondance de Huygens, ni dans l’„Horologium oscillatorium”. Afin de le résoudre posons MK [Fig. 23] = x, KN = A, et soit s la ligne auxiliaire des Théorèmes XV (p. 264) et XVI (p. 265). On a alors d’après le Théorème XVI:

$$(2x + s) : 3A = B^2 : A^2, \text{ où } s = 2A^2 : (x + A).$$

De la première équation on déduit:

$$s = \frac{3B^2}{A} - 2x = 3C - 2x.$$

La substitution de cette valeur de s dans la seconde équation, amène l’équation quadratique:

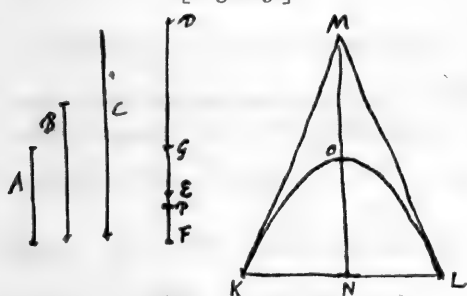
$$2x^2 - (3C - 2A)x + 2A^2 - 3AC = 0,$$

pour la racine positive de laquelle on trouve:

[PROBLEMA II.]

Datis circulis duobis inæqualibus, conoides parabolicum invenire cujus basis fit circulus minor, superficies vero convexa majori circulo æquetur³).

[Fig. 23.]



Sunto dati circuli à semidiamentris A et B. quorum A minor B major. Et oporteat facere quod proponitur. Sit duabus A, B tertia proportionalis [C]. Et sumatur $DE \propto \frac{3}{4}C$. cui adjungatur in directum $EF \propto \frac{1}{2}A$. Sitque $EG \propto EF$. Et excessui quo quadr. DF superat qu. A sit æquale qu. ex DP. Deinde triang. extruatur isosceles KML, basim habens KL \propto duplæ A, crura vero KM, ML singula \propto utrique simul GD, DP. Et ductâ ad mediam basim recta MN, dividatur ea bifariam in O, et parabola describatur verticem habens O punctum; axem ON, basim vero KL. Eaque manente axe ON circumverti intelligatur. Quod igitur basis conoidis inde effecti &c manifestum⁴). Dico autem convexam conoidis superficiem KOL \propto circulo à semid.B.

Quia enim quadratum ex A æquale est differentiæ qu.orum DF, DP, ac proinde æquale duplo $\square^{\circ}DPF + qu^{\circ}PF^*$, hoc est ei \square° quod sub PF et æquali utrifque FD, DP continetur: Erit proinde ut utraque simul FD, DP ad A ita A ad FP*. Est autem utraque simul FD, DP æqualis utrique simul MK, KN; quia

* 3.2⁵).*... 6⁶).

$$x = \frac{3}{4}C - \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}\sqrt{(3C - 2A)^2 + 24AC - 16A^2}$$

ou plutôt:

$$x = \frac{3}{4}C - \frac{1}{2}A + \sqrt{\left(\frac{3}{4}C + \frac{1}{2}A\right)^2 - A^2} \text{ (où } C = B^2 : A).$$

Or, on apercevra facilement que la construction, qui va suivre, ne fait que reproduire les opérations indiquées par cette expression algébrique.

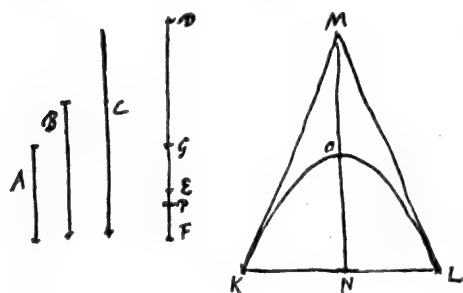
⁴) Cette phrase inachevée fut intercalée après coup.

⁵) Lisez: 4.2 et consultez la p. 300 du T. XI, où la quatrième proposition du second livre des Éléments d'Euclide est appliquée d'une manière tout à fait analogue. La proposition s'y trouve citée dans la note 14.

⁶) Il s'agit ici de la „Prop.” 17 du „Libr.” 6, où l'on lit „Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: Illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt” (Clavius p. 568).

$FG \propto NK$, et duæ simul GD, DP æquales KM . A vero ipsi KN æqualis est. Ergo, sicut utraque simul MK, KN ad KN ita est KN ad FP . ideoque ut

[Fig. 23.]



$MK + FP$ ad $\frac{3}{2}KN$ ita est superficies convexa conoidis KOL ad circulum baseos KL , uti ex superiori demonstratione perspicuum est ¹⁾. Porro quoniam $DE \propto \frac{3}{4}C$

erit dupla $DE \propto \frac{3}{2}C$. Sed dupla $DE \propto DG + DF$, quoniam æqualiter se excedant hæ tres DG, DE, DF . Itaque $DG + DF \propto \frac{3}{2}C$. Sed $DG + DF \propto MK +$

$+ PF$ quoniam ex confr. $DG + DP \propto MK$. Itaque $MK + FP \propto \frac{3}{2}C$. Unde eandem quoque rationem habebit $MK + FP$ ad $\frac{3}{2}KN$ quam $\frac{3}{2}C$ ad $\frac{3}{2}KN$, hoc est quam C ad KN five ad A . Quam autem habet C ad A eam habet circulus à semid. B ad circulum à semid. A , hoc est ad circulum baseos KL . Ergo ut $MK + FP$ ad $\frac{3}{2}KN$ ita erit circul. à semid. B ad circulum baseos KL . Atqui eandem quoque rationem habere ostendimus superficiem convexam conoidis ABC ad eundem baseos circulum KL . Ergo æquales inter se necesse est circulum à semid. B et dictam conoidis superficiem.

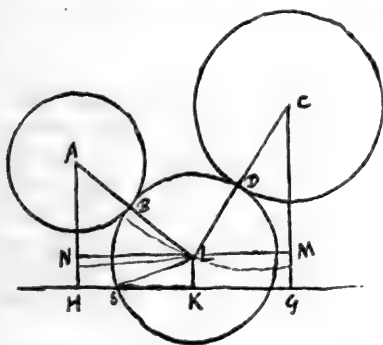
¹⁾ Lorsqu'on remplace les notations de la Fig. 21 (p. 266) par celles de la présente figure on trouve, en effet, que les deux surfaces sont, d'après le Théorème XVI, p. 265, dans le rapport de $[2MK + KL^2 : 2(MK + KN)]$ à $\frac{3}{2}KL$, ou bien de $2MK + 2FP$ à $3NK$, c'est-à-dire de $MK + FP$ à $\frac{3}{2}NK$.

VII²⁾.

1657.

Propositum à Pascalio. à Slufio missum ³⁾.

Datis positione duobus circulis A, C et recta HG, invenire circulum BDS qui datos circulos tangat et relinquat super data recta arcum capacem anguli dati.



$CD \propto a$; $AB \propto b$; $CG \propto c$; $AH \propto d$;
 $HG \propto e$; ratio data LB vel LS ad LK ut
 e ad f .

$LB \propto LD \propto x$.

$LK \propto \frac{fx}{e} \propto NH \propto MG$; $d - \frac{fx}{e} \propto AN$.

$$e \propto \sqrt{bb + 2bx + xx - dd + \frac{2fdx}{e} - \frac{ffxx}{ee}} +$$

$$+ \sqrt{aa + 2ax + xx - cc + \frac{2fcx}{e} - \frac{ffxx}{ee}}$$

$$ee - 2e \sqrt{bb + 2bx + xx - dd + \frac{2fdx}{e} - \frac{ffxx}{ee}} \propto aa + 2ax + xx - cc +$$

$$+ \frac{2cfx}{e} - \frac{ffxx}{ee}$$

²⁾ La Pièce est empruntée à la p. 35 du livret du frère Philips que nous avons mentionné dans la note 4, p. 217 du T. XII.

³⁾ Voir la Pièce N°. 418, p. 72 du T. II, qui accompagna la lettre de de Sluse à Huygens du 23 octobre 1657, p. 71 du T. II, et la réponse de Huygens du 2 novembre à la p. 80 du même Tome.

$$\begin{aligned}
 -2e\sqrt{} &\propto aa - cc + dd - bb - ee + 2ax - 2bx + \frac{2cfx}{e} - \frac{2dfx}{e} \\
 2e\sqrt{} &\propto -pp + qx \\
 &\text{fiet quadrata æquatio } ^1).
 \end{aligned}$$

¹⁾ Probablement Pascal avait en vue une solution plus géométrique. En effet, il écrivit à Fermat, le 29 juillet 1654: „De même j'ai résolu le problème. . . et celui-ci: *De trois cercles, trois points, trois lignes, [trois] quelconques étant donnés, trouver un cercle qui, touchant les cercles et les points, laisse sur les lignes un arc capable d'un angle donné.* J'ai résolu ces problèmes *plainement*, n'employant dans la construction que des cercles et des lignes droites; mais dans la démonstration, je me sers de lieux solides, de paraboles ou hyperboles: Je prétends néanmoins qu'attendu que la construction est plane, ma solution est plane et doit passer pour telle" (voir la p. 298 du T. II de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 3 du présent Tome).

Quant à la solution de de Sluse, à laquelle il fait allusion dans la lettre mentionnée dans la note 3 de la p. 271, elle se basait probablement sur une analyse analogue à celle de Huygens. On en trouve l'application à un cas particulier numérique dans une Pièce qui accompagne une lettre de de Sluse à Brunetti; voir les p. 241—247 du T. VII des „Œuvres de Blaise Pascal", citées dans la note 4 de la p. 196.

D'ailleurs le problème est un cas particulier de celui-ci: Décrire une circonférence qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés. Ce dernier problème est également plan. On en trouve une solution moderne par M. G. Tarry à la p. 290 du „Traité de géométrie par Rouché et de Comberousse", Paris, Gauthier-Villars, édition de 1891, première Partie. Fiedler en élabora une autre p. 169—172 de son ouvrage: „Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugel und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme", Leipzig, 1882. Steiner annonça, en 1826, dans son traité „Einige geometrische Betrachtungen", qu'il possédait une solution du problème qu'il n'a pas publiée (voir la p. 20 du T. I de l'ouvrage: „Jacob Steiner's gesammelte Werke" Berlin, G. Reimer, 1881).

²⁾ La Pièce est empruntée aux p. 7—14 du Manuscrit N°. 13. Nous l'avons divisée en para-

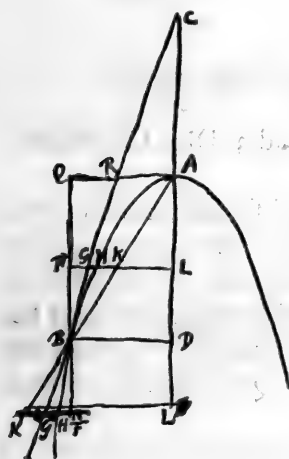
VIII^o.

1657.

1657. Nov.

Quadratura Parabolæ et similibus curvarum altioris gradus. Item ratio solidorum ex ipsis ad cylindros. Et centrorum gravitatis inventio in planis solidisque.

[Fig. 1.]



§ 1³).

AB est Parabola. CA \propto AD. Dico CB esse tangentem in B.

dem. DA [ad] AL [ut] BD [ad] LK⁴).

BD five FL [ad] LK [ut] qu.FL ad qu.LH.

sed FL ad LK major quam qu.FL ad qu.LG, quia FG \propto GK⁵). Est enim ut DC ad CA ita BD five QA ad AR, h. e. FK ad KG. Ergo qu.FL ad qu.LH major quam qu.FL ad qu.LG. Ergo LH minor quam LG. Ergo punctum G extra parabolam. Eadem ratione tota BGC.

graphes. Le texte du premier paragraphe et une partie de celui du second ont servi d'avant-projet pour la Pièce que nous reproduisons dans l'Appendice I, p. 283—287.

Ajoutons que les résultats obtenus dans cette Pièce et dans l'Appendice II (p. 288—293) sont mentionnés par Huygens à la dernière page de la „Pars terria” de son „Horologium oscillatorium” (p. 90 de l'édition originale).

³) Ce paragraphe contient la détermination de la tangente à la parabole ordinaire et aux paraboles d'autres degrés. Il a servi d'avant-projet à la première partie (jusqu'au „Theorema II”) de l'Appendice I, p. 283—285.

⁴) Cette proportion et les raisonnements qui suivent s'appliquent également aux deux ensembles de points F, G, H, K, L, dont les uns se trouvent au-dessus et les autres au-dessous de la ligne BD.

⁵) Posons FL = a, FG = GK = b. L'inégalité en question peut alors s'écrire pour la ligne supérieure FGHLK : $\frac{a}{a-2b} > \frac{a^2}{(a-b)^2}$, et pour l'autre ligne KGHFL : $\frac{a}{a+2b} > \frac{a^2}{(a+b)^2}$.

Dans les deux cas il est facile d'en vérifier l'exactitude.

proinde minor quam $\frac{1}{4}FK$ ⁴⁾, quare ratio FL ad LG minor ratione FL ad LV.

Est autem ratio FL ad LV, triplicata rationis FL ad LY. Ideoque ratio FL ad LV eadem quæ cubi FL ad cub. LY. Ratio vero FL ad LK est quadrupla rationis FL ad LY; ac proinde eadem quæ qq.ⁱFL ad qq.^mLY. Ergo quum ratio qq.ⁱFL ad qq.^mLY sit sesquitertia rationis quam habet cub. FL ad cub. LY. Erit quoque ratio FL ad LK sesquitertia rationis FL ad LV. sed ratione FL ad LV minor est ratio FL ad LG. Ergo ratio FL ad LK major quam sesquitertia rationis FL ad LG. quod erat prop.

Aliter. Ratio FL ad LK quadrupla est rationis FL ad LY. Ratio autem cubi FL ad cub. LK tripla est rationis FL ad LK. Ergo ratio cubi FL ad cub. LK erit tripla quadruple hoc est duodecupla rationis FL ad LY. Rursum ratio FL ad LV est tripla rationis FL ad LY. Ratio autem qq.ⁱFL ad qq.^mLV est quadrupla rationis FL ad LV. Ergo ratio qq.ⁱFL ad qq.^mLV est quadrupla triplæ, hoc est duodecupla rationis FL ad LY. Itaque eadem est ratio qq.ⁱFL ad qq.^mLV quæ cub. FL ad cub. LK, Sed ratione qq.ⁱFL ad qq.^mLV minor est ratio qq.ⁱFL ad qq.^mLG ⁵⁾. Ergo ratio qq.ⁱFL ad qq.^mLG minor quoque ratione cubi FL ad cub. LK.

Semper ut exponens potestatis quæ consideratur in ordinatim applicatis, quæ hic erat 4, ad exponentem potestatis quæ consideratur in abscissis ab axe, quæ hic erat 3, ita debet esse KF ad FG ⁶⁾ hoc est AQ ad QR, hoc est CB ad BR, ac

²⁾ Voir toujours les deux ensembles de points F, G, H, K, L. On a évidemment dans les deux cas: $\frac{FL}{LK} = \frac{BD}{LK} = \frac{AD}{AL} = \left(\frac{BD}{HL}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{FL}{HL}\right)^{\frac{4}{3}}$.

³⁾ Voir le „Lemma”, qui suit.

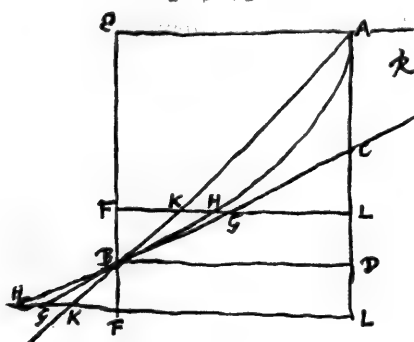
⁴⁾ La relation $KV < \frac{1}{4}KF$ n'est valable que pour l'ensemble qu'on trouve dans la figure principale au-dessus de la ligne BD; pour l'autre ensemble on a $KV > \frac{1}{4}KF$; ce qui n'empêche pas que la conclusion que Huygens fait suivre ne soit véritable dans les deux cas; voir la note 5.

⁵⁾ Puisqu'on a dans le premier des deux ensembles, qu'on trouve au-dessous de la figure principale: $KV > KG = \frac{1}{4}KF$, dans le second: $KV < KG$ et, par suite, dans tous les deux: $LG > LV$. Il est clair d'ailleurs que ces méthodes de démonstration géométrique peuvent s'appliquer également aux cas de la parabole propre et de la parabole cubique, qui précèdent.

⁶⁾ Voir les Fig. 1—4.

proinde ita CD ad DA, ut fiat CB tangens in B. Vel simplicius sic. Si ratio BD ad HL quadrupla æquatur triplæ rationi DA ad AL. debet esse CD ad DA ut 4 ad 3. Et sic de cæteris.

[Fig. 4.]



Sit AHB parabola cujus diameter AQ, contingens in vertice AD ¹⁾.

Considerentur autem BD, HL tanquam ordinatim applicatæ. Ergo quia BD ad HL proportio dupla est proportionis DA ad LA. hoc est quia sicut BD¹ ad HL¹ ita DA² ad LA², debeat esse CD ad DA ut 1 ad 2, ut fiat BC contingens in B.

Hoc autem modo curvas disponi ad quadraturam non est necesse, sed ad invenendum solidum ex conversione circa tangentem

in vertice. unde centrum gravitatis innotescit ²⁾.

§ 2 ³⁾.

AD [Fig. 5] est tangens in A. Dico trilineum BHAD esse ad spatium BHAQ ut dimidia DB ad BQ ⁴⁾.

Si enim non. Ergo trilineum BHAD, vel ad spatium majus vel minus ipso BHAQ erit ut dimidia DB ad BQ.

Esto primum ad majus, quod sit X spatium. Potest ergo figura circumscribi ex □^{is} quæ sit minor spatio X ⁵⁾. factum sit igitur. Ergo trilineum BHAD

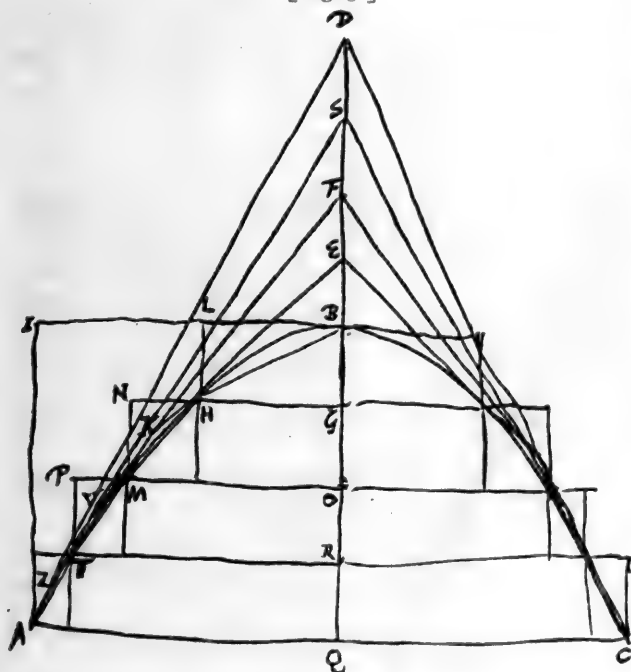
¹⁾ Dans ce qui suit la règle générale que Huygens vient de trouver est vérifiée dans le cas de la parabole ordinaire, la tangente au sommet étant considérée cette fois comme l'axe des abscisses.

²⁾ Cette annotation fut ajoutée à une date postérieure à la rédaction de la présente Pièce. On verra, en effet, que les quadratures qui vont suivre sont fondées bien certainement sur la propriété de la tangente que Huygens vient de déduire.

³⁾ Quadrature des paraboles de divers degrés et cubature de leurs solides de révolution.

⁴⁾ La figure représente une courbe parabolique quelconque $y^a = kx^b$ (où B est l'origine et BQ l'axe des x), pourvu seulement qu'on ait $a > b$.

[Fig. 5.]



ad omnia \square circumscripta majorem habebit rationem quam ad spatium X, hoc est quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Et du-

cantur tangentes ex H, M, T. Ergo hæ dividunt BD in partes æquales, et totidem quot sunt in BQ ⁶⁾. Et singulæ partes BD ad singulas ipsius BQ eandem habent rationem quam DB ad BQ. Triangulum itaque

BHE est ad \square LG ut $\frac{1}{2}$ EB

ad BG hoc est ut $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Quare trilineum BHE ad \square LG minorem rationem habebit quam $\frac{1}{2}$ DB ad

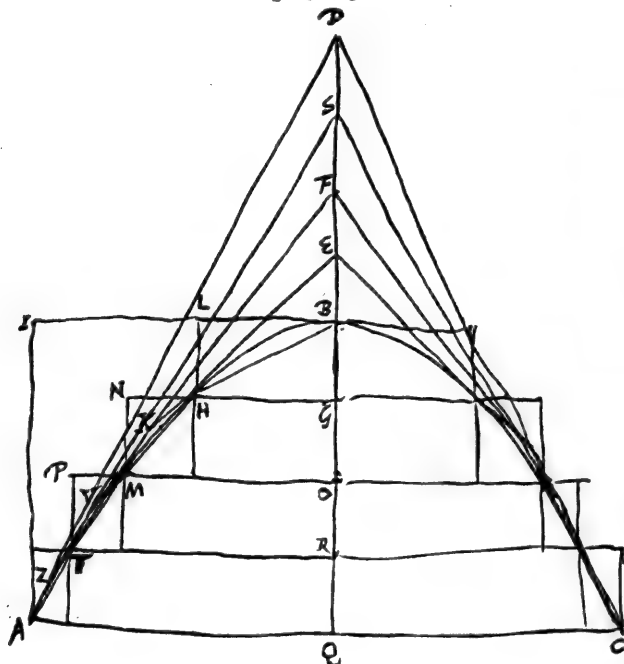
BQ. Similiter rectilineum spatium EHMF quum sit minus triangulo basin FE habenti et altitudinem OM, minorem habebit rationem ad \square NO quam $\frac{1}{2}$ FE ad GO, hoc est quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ; similiterque continget de cæteris rectilineis.

Ergo omnia simul cum trilineo BHE ad omnia simul \square circumscripta minorem habebunt rationem quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ. Quare figura BHAD quæ illis omnibus minor est, ad omnia \square circumscripta multo minorem habebit rationem quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Sed et majorem habere ostensum fuit. Quod fieri non potest. Ergo &c.

⁵⁾ Comparez le „Theorema I” des „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro”, p. 289 du T. XI. Évidemment la méthode de démonstration employée au lieu cité s’applique également à la présente figure.

⁶⁾ Puisqu’il résulte des propriétés de la tangente, déduites dans le paragraphe précédent, que les segments BE, BF, etc. sont proportionnels aux segments BG, BO, etc.

[Fig. 5.]



Jam si fieri potest sit spatium X minus spatium BHAQ ¹⁾ ad quod spatium X eam rationem habeat spatium BHAD quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ.

Ergo potest inscribi figura ex \square is quæ sit major spatium X. Sit factum igitur. Ergo spatium BHAD ad omnia inscripta \square minorem habebit rationem quam ad X, hoc est quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ.

Ducantur rursus tangentes &c.

Habet igitur $\triangle EKF$ ad $\square HO$ majorem rationem quam $\frac{1}{2}$ FE ad GO, hoc est

quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ. Simi-

liter majorem habebit $\triangle FVS$ ad $\square MR$. Et $\triangle SZD$ ad $\square TQ$. Ergo omnia simul \triangle ad omnia simul inscripta \square majorem habebunt rationem quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ. dictis autem triangulis majus est spatium BHAD. Ergo hoc ad omnia inscripta \square a multo majorem habebit rationem quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Sed minorem habere antea ostensum fuit. Quod absurdum est. Ergo &c.

¹⁾ Ici Huygens annota en marge „hoc primum”. Évidemment cette indication se rapporte à la rédaction définitive du Traité que Huygens se proposait d'écrire sur ces matières. Toutefois l'indication n'a pas été suivie dans la nouvelle rédaction que nous reproduisons dans l'Appendice I; voir la p. 286 de cet Appendice.

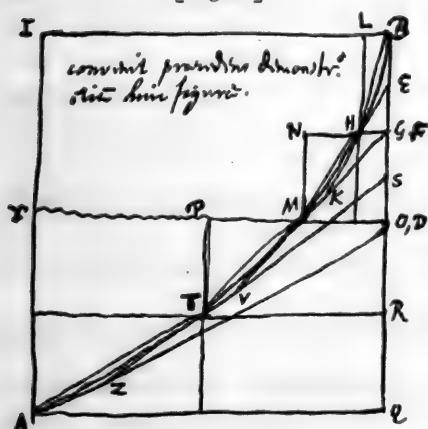
²⁾ La figure représente le cas où $a < b$ dans l'équation $y^a = kx^b$ de la courbe paraboloidé; comparez la note 4 de la p. 276.

³⁾ Puisqu'il y a évidemment entre le solide décrit par le triline élémentaire DATS [Fig. 5] et le cylindre décrit par le rectangle AR le rapport de $\frac{1}{3}$ DS à RQ.

⁴⁾ Il s'agit des courbes représentées par l'équation $y^ax^b = k$, a et b entiers et positifs.

⁵⁾ On trouvera ces recherches dans l'Appendice II, p. 288—293.

[Fig. 6.]

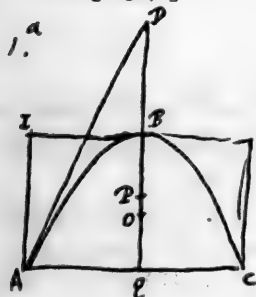


convenit præcedens demonstr.^o etiam huic figuræ [Fig. 6] ¹⁾.

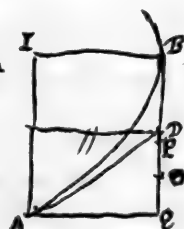
Haud absimili modo ostendemus solidum ex conversione spatij DBA [Fig. 5] circa axem DB ad solidum ex conversione spatij BAQ esse ut $\frac{1}{3}$ DB ad BQ ²⁾.

defunt hic quæ de hyperboloidum ⁴⁾ infinitarum genere, spatijque, inter ipsas et asymptotos interjectis, inveni; quæ simili atque hæc ratione demonstrantur ⁵⁾.

[Fig. 7.]



[Fig. 8.]



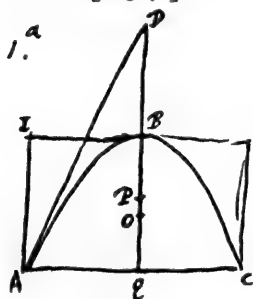
Si modo curva BA sit ejusmodi, ut, ductâ tangente ad punctum quodvis ipsius ut A, eadem sit semper ratio DB ad BQ, quadratura spatij BAQ, et solidi ex conversione circa axem BQ ratio ad cylindrum inveniri poterit.

Sit $DQ \propto a$, $BQ \propto b$ ⁶⁾. Quia igitur trilineum DBA ad spatium BAQ ut $\frac{1}{2}DB \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \right)$ ad $BQ(b)$, vel in 2^{da} [fig.] $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ ad b . Ergo componendo (vel in 2^{da} fig. invertendo et per conversionem rationis, et rursus invertendo) $\triangle DAQ$ ad spat. BAQ ut $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ [ad] b . Sed $\square IQ$ ad $\triangle DAQ$ ut b ad $\frac{1}{2}a$.

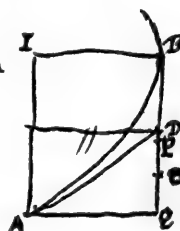
⁶⁾ Il s'agit donc toujours des courbes $y^a = kx^b$, appelées *paraboloïdes* par Huygens dans les cas où a et b sont des nombres entiers et positifs.

Ergo ex æquo in perturbata ¹⁾, erit $\square IQ$ ad spat. BAQ ut $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$
 [ad] $\frac{1}{2}a$, hoc est ut $a + b$ ad a . 1.^a Regula.

[Fig. 7.]



[Fig. 8.]



Rurfus quia solidum ex tril.DBA
 ad solid. ex BAQ ut $\frac{1}{3}DB \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b \right)$

ad BQ (b), vel in 2^{da} $\frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a$ [ad] b

Erit componendo (vel in 2^{da} fig. inver-
 tendo et per convers. rationis, et rur-
 fus invertendo) conus ex DAQ ad

solid. ex BAQ ut $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ ad b . Sed

cylindrus ex IQ est ad conum ex DAQ ut BQ ad $\frac{1}{3}DQ$ hoc est ut b ad $\frac{1}{3}a$. Ergo
 ex æquo in perturb. ¹⁾ Erit cylindrus ex IQ ad solidum ex BAQ ut
 $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ ad $\frac{1}{3}a$ hoc est ut $a + 2b$ ad a . 2.^a Regula.

Conversio fieri intelligitur circa axem BQ.

In lineis autem Paraboloidibus, semper est DQ commensurabilis BQ. Itaque in
 his pro a sumenda est exponens potestatis quæ consideratur in ordinatim applicatis.
 Pro b exponens potestatis quæ consideratur in abscissis ad verticem.

Ex. gratia in curva superiori ²⁾ ubi ordinatim applicatarum ratio quadrupla
 æqualis ponebatur rationi triplicatæ abscissarum ad verticem, erit $a \propto 4$. $b \propto 3$.
 Itaque si BA fuerit curva ejusmodi; erit ratio $\square IQ$ ad spatium BAQ ut $a + b$
 ad a , hoc est ut 7 ad 4.

Cylindrus vero ex IQ ad solidum ex BAQ in conversione, ut $a + 2b$ ad a , hoc
 est ut 5 ad 2. In prima nimirum figura. At in 2^{da}, ubi tangens in vertice pro axe
 est. Erit DQ five $a \propto 3$. BQ five $b \propto 4$. Unde $\square IQ$ ad spatium BAQ ut $a + b$
 ad a , hoc est ut 7 ad 3. ut necesse erat ³⁾.

Cylindrus vero ex IQ ad solidum ex BAQ ut $a + 2b$ ad a , hoc est ut 11 ad 3.

¹⁾ On peut consulter sur cette expression la note 22 de la p. 304 du T. XI.

²⁾ Voir la p. 274.

³⁾ Voir la première phrase du deuxième alinéa de la p. 281.

⁴⁾ Détermination des centres de gravité des paraboles de divers degrés et de leurs solides de révolution.

⁵⁾ On n'en trouve rien dans ce qui suit. La relation est, d'ailleurs, une conséquence immédiate du théorème de Guldin, à propos duquel Huygens écrivit à de Sluze, le 3 septembre 1657:

Itaque per conv. rationis cylind. ex IQ ad solid. ex BAI, ut $a + 2b$ [ad] $2b$. hoc est ut 11 ad 8.

Notandum quod si in 1^a et 2^a figura [Fig. 7 et 8] eadem fuerit linea curva quamquam diverso positu: quod a et b invicem quantitatem permutent. Sicut in proposito exemplo, in prima fig. fuerat $a \propto 4$. $b \propto 3$. In secunda vero fig. fit $a \propto 3$. $b \propto 4$. Unde cum cylindrus ex IQ ad sol. ex BAI, fit ut $a + 2b$ [ad] $2b$ dicemus proinde in 1^a fig. cylindrum ex IQ (conversione facta circa BI) ad sol. ex BAQ esse ut $b + 2a$ ad $2a$ hoc est proposito exemplo ut 11 ad 8. 3.^a Regula.

§ 3⁴).

Centrum gravitatis plani ABC ex his sic nunc inquiremus. Sit O centrum grav. plani ABC. P vero centr. gr. \square IC, divisâ BQ bifariam in P. Sit $BO \propto x$. BP autem est $\propto \frac{1}{2}b$.

Ratio cylindri ex IQ circa axem BI, ad solidum ex ABQ, vel cylindri ex IC ad solidum ex ABC, componitur ex ratione \square IC ad spatium ABC, et ex ratione BP ad BO: ut postea ostendemus⁵).

Itaque ratio $b + 2a$ ad $2a$ ⁶) æqualis composita ex rationibus $\frac{a+b}{\frac{1}{2}b}$ [ad] a ⁷) [ad] x

Ergo $b + 2a$ [ad] $2a$ ut $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb$ [ad] ax .

$BO \propto \frac{ab + bb}{b + 2a} \propto x$. subtrahatur x à BQ $\propto b \propto \frac{bb + 2ab}{b + 2a}$ fit OQ $\propto \frac{ab}{b + 2a}$.

„ad gravitatis vero centrum indagandum, theorema quoddam quod apud Guldinum reperi *ἀναπόδεικτον*”, [c'est-à-dire: sans preuve] „sed tamen verissimum” (p. 51 du T. II). Peut-être Huygens avait-il l'intention de faire suivre une démonstration de ce théorème.

Ajoutons encore que, sous la date du 14 déc. 1653, on rencontre dans le Manuscrit K (p. 35) l'annotation suivante: „Theorema Guldini ipsius p. 147. Quantitas rotanda in viam rotationis ducta producit potestatem rotundam uno gradu altiore potestate sive quantitate rotata. Hujus demonstrationem nullam habet sed inductione probat tantummodo, ostendens sua cum aliorum inventis convenire. Verum est utique quod proponit, et non difficile demonstratu. Lemma addit hunc habens sensum. Quod Potestas Rotunda quævis ad aliam ejusdem generis, compositam habeat rationem, ex ratione potestatum rotandarum et ratione radiorum rotationis. quod ex theoremate consequitur. Radius autem rotationis est recta ex centro grav.^b potestatis rotandæ ad axem rotationis perpendicularis. Via item rotationis est circumferentia à dicto gravitatis centro in conversione descripta”. Comparez le „Liber secundus” de l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 153 du T. I; mais remarquons que les „Libri secundus, tertius et quartus” parurent en 1640 et 1641, et non pas en 1650 et 1651 comme la note citée le donne.

⁶) Voir la „3^a Regula”.

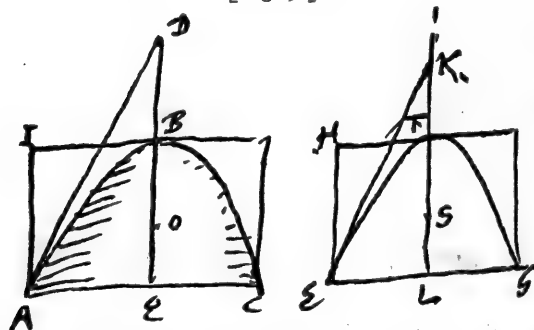
⁷) Voir la „1.^a Regula”, p. 280.

Ergo BO ad OQ ut $a + b$ ad a , hoc est ut \square IC ad spat. ABC. 4.^a Regula.

Hinc rursus invenimus rationem cylindri ex conversione \square IC circa axem AC, ad solidum ex spatio ABC circa eundem axem. Hæc enim ratio componitur denuo ex ratione \square IC ad spatium ABC et ex ratione QP ad QO. hoc est ex ratione $a + b$ [ad] a et QP $\left(\frac{1}{2}b\right)$ [ad] QO $\left(\frac{ab}{b+2a}\right)$ five $\frac{1}{2}b + a$ [ad] a , quæ composita ratio erit eadem quæ $aa + \frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}bb$ ad aa , hoc est $a + \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}\frac{bb}{a}$ ad a . 5.^a Regula. hoc est, in curva superiori ¹⁾ 77 ad 32, in parabola vero 15 ad 8.

Porro ad centrum gravitatis inveniendum in solido ABC. Invenienda est primum curva ejusmodi, in qua ordinatim applicatæ sese habeant sicut quadrata

[Fig. 9.]



ordinatim applicatarum in curva ABC ²⁾.

DQ $\propto a$, BQ $\propto b$; item KL $\propto a$,
LF $\propto n$.

Esto inventa sitque curva EFG. igitur necesse est \square HG ad spatium EFG eandem habere rationem quam cylindrus IC ad solidum ABC. hoc est quam $a + 2b$ ad a ³⁾. Sed \square HG ad spatium EFG eam quoque habet rationem quam $a + n$ ad a (per reg. 1.) ⁴⁾, quandoquidem hujus generis curva est EFG. Igitur quia $a + n$ ad a ut $a + 2b$ ad a . Erit $n \propto 2b$. Unde curva EFG jam notæ est proprietatis. plani autem EFG centrum gr.^s eadem proportionem secare necesse est axem FL, qua centrum gr. solidi ABC axem BQ. Sed FS est ad SL ut $a + n$ ad a , hoc est ut $a + 2b$ ad a . Ergo et BO ad OQ ut $a + 2b$ ad a . Regula 6.^{ta}. Unde constat esse BO ad OQ ut cylindrus IC ad sol. ABC.

¹⁾ C'est-à-dire pour laquelle $a = 4$, $b = 3$; voir la deuxième courbe de la p. 274.

²⁾ La méthode que Huygens va suivre apprend donc à réduire la détermination du centre de gravité du solide de révolution, décrit par un segment de la courbe $y = f(x)$ autour de l'axe des abscisses, à la détermination du centre de gravité du segment correspondant de la courbe $y = [f(x)]^2$.

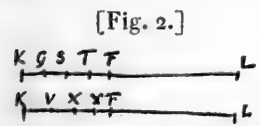
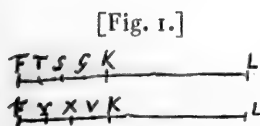
³⁾ Voir la „2.^a Regula”, p. 280.

⁴⁾ Voir la p. 280.

APPENDICE I À LA PIÈCE N^o. VIII ⁵⁾.

[1657].

LEMMA ⁶⁾.



Si differentia linearum FL, KL quæ est KF dividatur in partes quotcunque æquales punctis T, S, G; Ratio FL ad LT rationis FL ad LT sæpius multiplex erit quam linea FK lineæ FT ⁷⁾. Eademque ratio FL ad LK rationis FL ad LS sæpius multiplex quam linea FK lineæ FS. Et rationis FL ad LG, quam linea FK lineæ FG ⁸⁾.

Sint enim inter FL, KL mediæ proportionales YL, XL, VL; totidem nempe quot sunt puncta lineam FK dividantia. Ergo etiam continue proportionales

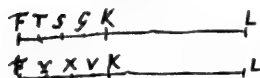
⁵⁾ Dans cet Appendice, que nous avons emprunté à deux feuilles détachées, on retrouve, dans une rédaction plus achevée, une partie des matières traitées dans la Pièce N^o. VIII.

⁶⁾ Comparez le „Lemma” de la p. 274.

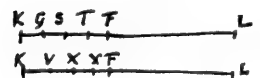
⁷⁾ Soit n le nombre des divisions du segment FK, on a alors, comme Huygens le démontrera, dans les deux cas représentés respectivement par les Fig. 1 et 2, $\frac{FL}{LK} > \left(\frac{FL}{LT}\right)^n$. Afin que les raisonnements qui suivent, et les conclusions que Huygens en tire dans le „Theorema” qui suit, soient justes, on doit donc donner à la phrase précédente une interprétation conforme à cette relation. Toutefois, dans le cas de la Fig. 2, où $LK > FL$, cette phrase semble plutôt mener à la relation: $\frac{FL}{LK} < \left(\frac{FL}{LT}\right)^n$, puisqu'elle exige que dans la relation $\frac{FL}{LK} = \left(\frac{FL}{LT}\right)^n$, n soit plus grand que n . Nous croyons, en effet, que la phrase a été mal choisie et qu'elle est le résultat d'une inadvertance.

⁸⁾ Soit, plus généralement, P le point terminal de la $p^{\text{ième}}$ des n divisions du segment FK, on aura alors $\frac{FL}{LK} > \left(\frac{FL}{LP}\right)^p$, c'est-à-dire, posant $FL = a$, $FT = b$, dans le cas de la Fig. 1: $\left(\frac{a}{a-nb}\right)^p > \left(\frac{a}{a-pb}\right)^n$ ($a > nb$) et dans l'autre cas $\left(\frac{a}{a+nb}\right)^p > \left(\frac{a}{a+pb}\right)^n$.

[Fig. 1.]



[Fig. 2.]



erunt, differentiae FY, YX, XV, VK. patetque proinde ratione FL ad LT minorem fore quam FL ad LY ¹⁾. Atqui ratio FL ad LK toties multipla est rationis FL ad LY quoties linea FK multipla est FT. Ergo eadem ratio FL ad LK rationis FL ad LT sepius multipla erit quam linea FK lineæ FT ²⁾.

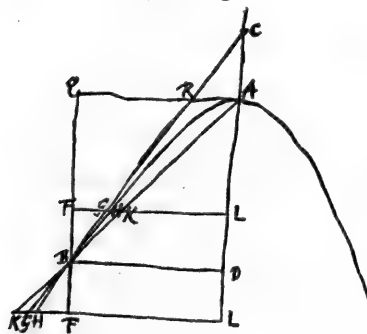
Similiter cum ratio FL ad LS minor sit ratione FL ad LX. ratio autem FL ad LK toties multipla sit rationis FL ad LX quoties linea FK lineæ FX. Erit ratio FL ad LK rationis FL ad LS sepius multipla quam linea FK lineæ FS.

Similiterque ostendetur rationem FL ad LK sepius multiplicem esse rationis FL ad LG quam linea FK lineæ FG.

THEOREMA [I.]

Si a puncto in paraboloidē recta ad axem ordinatim applicetur et accipiat in axe, à puncto ubi applicata ei occurrit, recta verticem versus; quæ ad partem axis interceptam inter applicatam et verticem sese habeat ut exponens potestatis quæ in ea paraboloidē consideratur in ordinatim applicatis ad exponentem potestatis quæ consideratur in abscissis ad verticem; Recta quæ ducitur a terminò lineæ in axe acceptæ ad punctum in paraboloidē ab initio sumtum, paraboloidem in puncto illo continget.

[Fig. 3.]



Sit paraboloidis AB, cujus axis AD, vertex A. Sitque ejus naturæ ut quadratoquadrata ordinatim applicatarum BD, HL, sint inter se ut cubi abscissarum ad verticem DA, LA ³⁾.

Dico si sumatur in axe DC quæ sit ad DA ut 4 ad 3 (quoniam nempe hi sunt exponentes qu. qu. et cubi) et ducatur recta CB, eam tangere paraboloidem in B. Sumto enim in recta CB puncto quolibet alio G, ostendemus id cadere extra paraboloidem AB.

Sit GL ⁴⁾ rectæ BD parallela, et occurrat axi in

¹⁾ Puisque, évidemment, dans le cas de la première figure $FY > FT$ et dans celui de la seconde $FY < FT$; par conséquent, pour les deux figures, $LT > LY$.

²⁾ Lisez $\frac{FL}{LK} > \left(\frac{FL}{LT}\right)^n$.

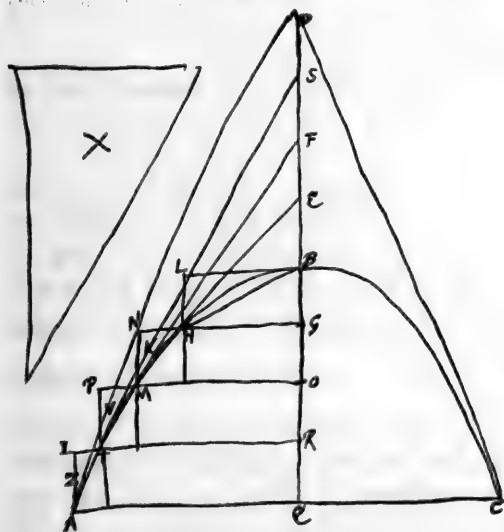
³⁾ Huygens va donc choisir un cas particulier mais on verra facilement que la méthode de

L, rectæ vero BF axi parallelæ in F, et paraboloidi in H. Ei vero quæ conjungit puncta A B, in K. Et compleatur rectang. ADBQ, cujus latus AQ secet recta CB in R.

Est ergo ut CD ad DA ita CB ad BR et AQ ad QR et KF ad FG, nimirum ut 4 ad 3. Ac proinde ratio FL ad LK sæpius multipla rationis FL ad LG quam FK multipla est FG ⁵⁾. Id est, ratio FL ad LK major quam sesquitertia rationis FL ad LG. Atqui ratio FL sive BD ad LK sive DA ad AL est sesquitertia rationis BD seu FL ad LH. Ergo ratio FL ad LG minor quam FL ad LH. Ideoque LG major quam LH. Unde patet totam lineam CB, præter punctum B, cadere extra paraboloidem. quod erat dem.

THEOREMA [II].

[Fig. 4.] 6



Paraboloidis cujufvis portio ad triangulum eandem cum ipfa bafin habentem, latera vero rectas quæ portionem ad terminos bafis contingunt, eam habet rationem quam portionis axis ad dimidiam compofitæ ex eodem axe et axe dicti trianguli.

Sit Paraboloidis portio recta ABC, cujus axis vel axi perpendicularis recta BQ⁷⁾; vertex B; basis AC; tangentes vero in terminis basis rectæ

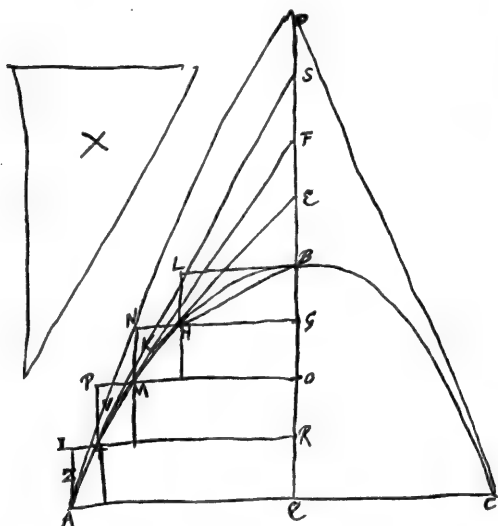
démonstration s'applique également au cas plus général de l'énoncé du théorème, pourvu seulement que les ordonnées soient élevées à une plus haute puissance que les abscisses; voir pour un exemple du cas contraire, où les raisonnements ont besoin de quelques modifications faciles à apporter, la Fig. 4 de la p. 276.

4) Voir les *deux* droites GL indiquées dans la figure. Les raisonnements qui suivent s'appliquent également à toutes les deux.

⁵) Consultez la note 7 de la p. 283.

6) À propos de cette figure Huygens annota en marge : „Il faut retrancher la moitié BC”. Probablement Huygens a-t-il aperçu que dans le cas où a est impair la partie BC n'appartient pas à la courbe $y^a = kx^b$ ($y = MO$, $x = BO$).

7) Au lieu de cette phrase on lisait primitivement: „cujus axis BQ”. Probablement Huygens a-t-il remarqué plus tard que dans le cas où a est impair et b pair, la ligne BL est le véritable axe de la courbe. Toutefois il n'a pas apporté dans la suite les changements que cette constatation aurait dû entraîner.

[Fig. 4.]⁶⁾

AD, CD, convenientes cum axe in D.

Dico portionem ABQ esse ad triang. ADQ, ut BQ ad semissem lineæ æqualis duabus DQ, QB¹⁾.

Hoc autem patebit si ostenderimus trilineum BHAD, curvâ BA et rectis AD, DB comprehensum, esse ad semiportionem BAQ, ut $\frac{1}{2}$ BD ad BQ²⁾.

Erit enim, componendo, triangulum DAQ ad semiportionem ABQ ut $\frac{1}{2}$ DB

una cum BQ five ut $\frac{1}{2}$ DQ cum $\frac{1}{2}$ BQ ad BQ. et convertendo.

Quod si igitur trilineum BAD ad semiport. ABQ non est ut $\frac{1}{2}$ DB ad BQ,

Ergo hanc rationem habebit ad spatium quod vel majus erit vel minus semiportione ABQ. Habeat primò ad majus, quod dicitur X³⁾. Itaque cum spatium X sit majus quam BAQ, poterit huic figura circumscribi ordinatim ex rectangulis æque altis ut sunt IQ, PR, &c. quæ sit minor spatio X. Factum id intelligatur; itaque trilineum BAD ad omnia ista rectangula majorem rationem

habebit quam ad spatium X, hoc est, quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Ducantur tangentes paraboloidem ad puncta T, M, H, in quibus latera dictorum rectangulorum ipsam secant, nimirum rectæ TS, MF, HE; Ergo hæ dividunt BD in partes æquales inter se, ac totidem numero quod sunt in axe BQ latera dictorum rectangulorum. Et singulæ partes ipsius BD ad singulas axis BQ eandem habent rationem quam DB ad BQ. Triangulum itaque BHE est ad rectang. LG ut $\frac{1}{2}$ EB ad BG, hoc est, ut

$\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Quare trilineum BHE ad idem rectang. LG minorem rationem habebit quam $\frac{1}{2}$ DB ad BG⁴⁾. Similiter spatium EHMF, quum sit minus triangulo basin FE habenti et altitudinem MO, minorem rationem habebit ad rectang. NO quam

¹⁾ Comparez les dernières lignes de la p. 279.

²⁾ Comparez le § 2, p. 276.

³⁾ Voir la note 1 de la p. 278. Dans ce qui va suivre la rédaction plus primitive des pp. 277 et 278, est suivie de très près, à l'exception du dernier alinéa, où la rédaction est un peu plus complète dans la présente Pièce.

$\frac{1}{2}$ FE ad GO, five quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Idemque verum est de ratione spatiorum cæterorum FMTS, STAD, ad rectang.^a PR, IQ. Ergo omnia prædicta spatia unà cum trilineo BHE, hoc est trilineum totum BAD ad omnia simul rectang.^a circumscripta minorem rationem habebit quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Sed et majorem habere dictum fuit, quod est absurdum. Ergo trilineum BAD ad semipor. BAQ non habet majorem rationem quam $\frac{1}{2}$ BD ad DQ ⁴⁾.

Jam si fieri potest habeat minorem, sitque proinde spatium aliquod X minus semiportione BAQ, ad quod se habeat trilineum BAD ut $\frac{1}{2}$ BD ad DQ ⁵⁾. Cum igitur spatium X sit minus semiportione BAQ, poterit ei inscribi figura ordinatim ex rectangulis æque altis quæ sit major spatio X. Sit igitur factum, ac sunt ea rectangula HO, MR, TQ. Ergo trilineum BAD ad hæc rectang.^a minorem rationem habebit quam ad spatium X, hoc est minorem quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ.

Ducantur rursus tangentes curvam ad puncta quibus anguli inscriptorum orum ipsi occurrunt, quæ sint HE, MF, TS, quæ itaque dividunt rectam DB in partes æquales, et totidem numero quot sunt in axe BQ, et singulæ partes DB ad singulas BQ eandem habent rationem quam DB ad BQ. Singulæ vero tangentes productæ occurrant sibi proximis in punctis K, V, Z. Itaque triang. EKF ad HO majorem habet rationem quam $\frac{1}{2}$ FE ad GO, hoc est quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ. Ac similiter majorem habebit triang. FVS ad MR, et triang. SZD ad TQ. Ergo omnia simul triang. dicta ad omnia inscripta rectang.^a majorem habebunt rationem quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ. Dictis autem triangulis majus est trilineum BAD, ergo hoc ad figuram ex inscriptis majorem utique rationem habebit quam $\frac{1}{2}$ DB ad BQ. Sed et minorem habere dictum fuit, quod est absurdum. Ergo nec minorem rationem habet trilineum BAD ad semiportionem BAQ quam $\frac{1}{2}$ BD ad BQ, nec majorem. quare eandem habeat necesse est, quod erat dem.^m ⁵⁾.

⁴⁾ Lisez: BQ.

⁵⁾ On trouve encore sur la même feuille une figure entièrement analogue à la Fig. 6 de la p. 279, avec la remarque: „Convenit præcedens demonstratio etiam huic figuræ. Ostendimus autem utrobique simili ratione solidum ex conversione spatij trilinei DBA circa axem DB ad solidum ex conversione spatij BAQ circa BQ esse ut $\frac{1}{3}$ DB ad BQ” (voir la note 3 de la p. 278). Enfin on y lit une annotation au crayon: „Addenda quadratura Hyperboloidum” (voir l'Appendice II qui suit).

APPENDICE II À LA PIÈCE N^o. VIII¹⁾.

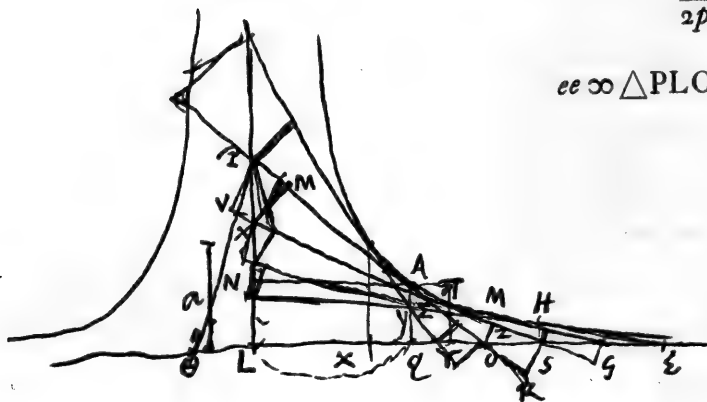
[1657].

§ 1²⁾.

$x^p y^q \propto ap + q \propto a^s$. fit $p + q \propto s$. p major q . $QO \propto \frac{q}{p}x$ ex regula tang. ³⁾.

$$\left. \begin{aligned} QO \left(\frac{qx}{p} \right) [\text{ad}] QA (y) [\text{ut}] OL \left(\frac{sx}{p} \right) [\text{ad}] LP \left(\frac{sy}{q} \right) \\ \frac{1}{2} OL \left(\frac{1}{2} \frac{sx}{p} \right) \end{aligned} \right\} m.$$

[Fig. 1.]



$$\frac{ssxy}{2pq} \propto \Delta PLO.$$

$$ee \propto \Delta PLO \left(\frac{ssxy}{2pq} \right); y \propto \frac{2pqee}{ssx};$$

$$a^s \propto \left(\frac{2pqee}{ssx} \right)^q x^p;$$

$$x^{p-q} \propto \frac{(ss)^q a^s}{(2pqee)^q};$$

$$x \propto \sqrt[p-q]{\frac{(ss)^q a^s}{(2pqee)^q}}.$$

¹⁾ Cet Appendice, que nous empruntons à la même feuille où se trouve la première partie de l'Appendice I, contient les recherches de Huygens sur la quadrature des hyperboles de divers degrés. Nous l'avons divisé en paragraphes.

²⁾ Ce paragraphe se rapporte au cas général d'une hyperbole de degré quelconque. Probablement Huygens y veut démontrer que l'aire du triangle LPO s'approche indéfiniment de zéro lorsque le point de contact A s'éloigne indéfiniment vers le côté droit; c'est-à-dire il se

§ 2 ⁴⁾

$$xxy \propto a^3; \frac{xy}{2xy} \propto \frac{1}{2} x[\infty] QO$$

PLE ad AEO ut 4 ad 1 ⁵⁾

PLO ad AOE ut 3 ad 1 seu 9 ad 3

sed PLO ad AQO ut 9 ad 1

PLO ad AQE ut 9 ad 4 ⁶⁾

sed PLO ad LA ut 9 ad 4 ⁷⁾

Ergo LA \propto AQE ⁸⁾.

Dico PLE esse ad AOE ut 4 ad 1. hoc est PLO ad AOE ut 3 ad 1. hoc est sumta $L\Theta \propto \frac{1}{3} LO$, dico esse ΘPO ad ΘPL ut PLE ad AOE.

propose de faire voir qu'on peut donner une telle valeur à $LQ = x$, que l'aire de ce triangle prend une valeur *ee* aussi petite qu'on le veut. C'est du moins ce qui résulte immédiatement de la dernière formule de ce paragraphe.

- ³⁾ Il peut s'agir ici d'une application de la règle du Theorema I de la p. 284 au cas analogue des hyperboles de divers degrés, auquel cas le point L de la présente figure remplace le point A de la figure 3 de la p. 284; toutefois il résulte de la première ligne du § 2 qui suit que Huygens était déjà en possession de la „Regula” qu'il communiqua à de Witt dans sa lettre du 25 février 1663; voir la p. 315 du T. IV. Il s'agit donc plutôt d'une application de cette dernière „Regula”.
- ⁴⁾ Dans ce paragraphe Huygens esquisse une méthode qui conduit à la quadrature des hyperboles de divers degrés. Il se borne à cet effet à la considération du cas $p = 2, q = 1$.
- ⁵⁾ Puisque les triangles élémentaires (comme $P\mathcal{E}X$) qui composent l'aire de la figure mixtiligne PAHNP sont à ceux (comme $\mathcal{E}OS$) qui constituent l'aire de la figure OAHEO comme 4 à 1 (PA étant égal à 2AO), Huygens en a pu conclure que ces figures elles-mêmes sont dans ce même rapport. Passant ensuite à la limite en supposant que le point H s'éloigne à l'infini il en déduit que PLEAP (où E représente cette fois un point à l'infini) est à OAEO comme 4 à 1, et que, par suite, PLEAP—OAEO (c'est-à-dire PLO) est à OAEO comme 3 à 1.
- ⁶⁾ Puisque AQE est la somme de AOE et AQO.
- ⁷⁾ Voir l'expression obtenue au § 1 pour ΔPLO , dans laquelle on a ici $s = 3, p = 2, q = 1$.
- ⁸⁾ La méthode est applicable au cas général, auquel cas Huygens aurait pu écrire :

PLE ad AOE ut p^2 ad q^2

PLO ad AOE ut $p^2 - q^2$ ad q^2 seu s^2 ad $\frac{sq^2}{p-q}$

sed PLO ad AQO ut s^2 ad q^2

PLO ad AQE ut s^2 ad $\frac{2pq^2}{p-q}$

sed PLO ad LA ut s^2 ad $2pq$

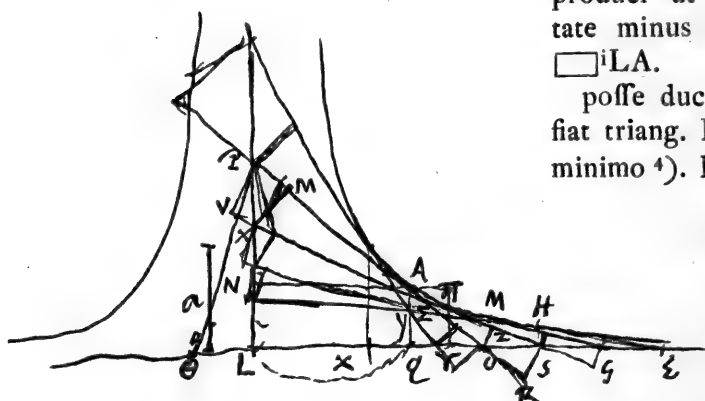
Ergo LA ad AQE ut $p - q$ ad q ;

résultat identique à celui qu'on obtient par l'analyse moderne.

Toutefois la méthode suivie par Huygens présuppose que l'aire AQEA (E à l'infini) pos-

§ 3 ¹⁾.PAHN' [ad] AHEO [ut] 4 [ad] 1 ²⁾.

[Fig. 1.]



dem. dum posse AEQ ³⁾ eoufque
produci ut qualibet data quanti-
tate minus deficiat a magnitudine
□ⁱLA.

posse duci tangentem NHE, ut
fiat triang. NEL dato quovis spatio
minimo ⁴⁾. Intelligatur quasi in infi-
nitum spatia æqualia
OS, SG, GE &c. pro-
gredientur et tangen-
tes a singulis punctis.

△PΣV majus quam
4ΣOZ. sed △MΣXmi-
nus quam 4ΣSR.

Omnia trilinea ut AΣT ⁵⁾ possunt fieri minora dato quovis spatio. nam minora
quam AoT ⁶⁾. quæ omnia minora quam □AY ⁷⁾.

supp. $xy \propto a^3$.

dem. dum xy æquale dato quolibet minimo ⁸⁾.

$$xy \propto ee \text{ minimum datum. } y \propto \frac{ee}{x}; eex \propto a^3; x \propto \frac{a^3}{ee}$$

$$x^{10}y^9 \propto a^{19}; xy \propto ee; y \propto \frac{ee}{x}; \frac{e^{18}}{x^9} \propto y^9 \text{ duc in } x^{10}; xe^{18} \propto a^{19} \propto x^{10}y^9; x \propto \frac{a^{19}}{e^{18}}.$$

sède une valeur finie; comme on le voit facilement en l'appliquant au cas $p < q$. Huygens paraît s'en être aperçu, car dans les deux paragraphes qui suivent, où il prépare une démonstration archimédienne, il s'occupe surtout de montrer la valeur finie des aires qui devaient entrer dans cette démonstration qu'il ne semble jamais avoir achevée.

¹⁾ Consultez sur la portée de ce paragraphe le dernier alinéa de la note précédente.

²⁾ Voir la première phrase de la note 5 de la p. 289.

³⁾ Il s'agit de la figure mixtiligne AHEQA.

⁴⁾ Voir le § 1, p. 288.

⁵⁾ T est le point de contact de la tangente VTS.

⁶⁾ Voir la très petite lettre o à l'angle supérieur du côté droit du rectangle AQYo.

⁷⁾ Voir la lettre Y, entre Q et O, qui indique un point de la droite LE.

dico ubicunque sumatur P, spatium EHQP esse minus tertiâ parte trianguli AHN.

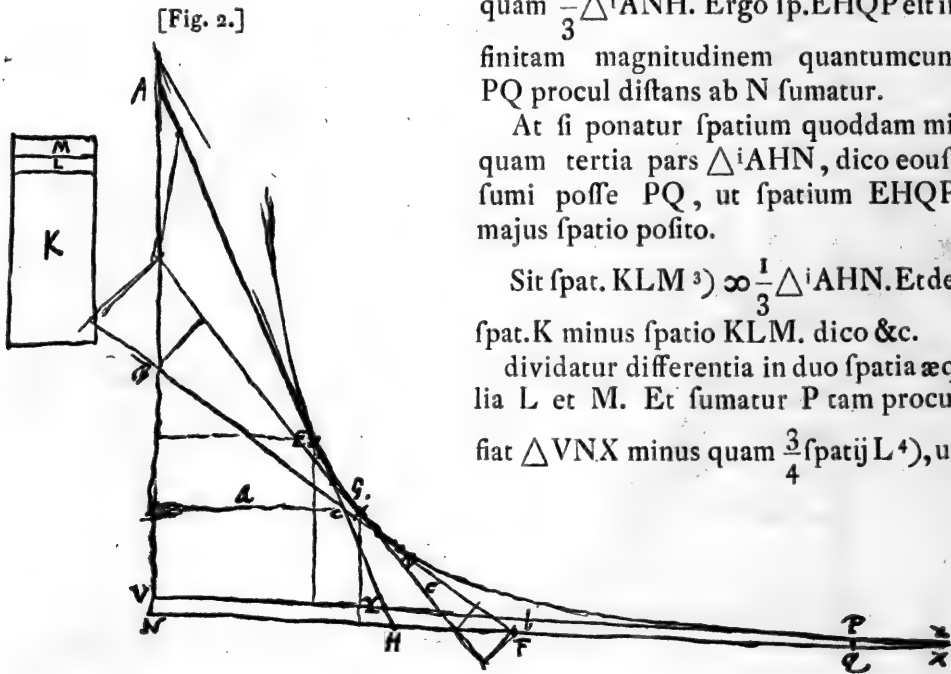
Sit VPX tangens, nempe ut XQ sit subdupla ad QN ¹⁾. Jam spatium EYP æquatur $\frac{1}{3}\triangle AVY - \frac{4}{3}\triangle VNX$ ²⁾. Sed spat. YHQP est minus quam $\frac{4}{3}\triangle VNX$ ²⁾. cum sit pars hujus trianguli. Ergo EYP est minus quam $\frac{1}{3}\triangle AVY - \triangle YHQP$. Ergo EYP + YHQP, hoc est EHQP minus est quam $\frac{1}{3}\triangle AVY$. Ergo omnino EHQP minus

quam $\frac{1}{3}\triangle ANH$. Ergo sp. EHQP est intra finitam magnitudinem quantumcunque PQ procul distans ab N sumatur.

At si ponatur spatium quoddam minus quam tertia pars $\triangle ANH$, dico eousque sumi posse PQ, ut spatium EHQP sit majus spatio posito.

Sit spat. KLM ³⁾ $\propto \frac{1}{3}\triangle ANH$. Et detur spat. K minus spatio KLM. dico &c.

dividatur differentia in duo spatia æqualia L et M. Et sumatur P tam procul ut fiat $\triangle VNX$ minus quam $\frac{3}{4}$ (spatij L ⁴⁾), unde



triligne EYP peut être considérée comme trouvée. Or, puisque la méthode suivie peut être appliquée sans aucune difficulté au cas général, il en est de même pour ce cas.

En effet, on trouve facilement dans ce dernier cas :

$$\text{tril. EYP} = \frac{q^2}{p^2 - q^2} \triangle AVY - \frac{p^2}{p^2 - q^2} \triangle YHX = \frac{(p+q) \{q^2(y_1 - y_2)^2 x_1 x_2 - p^2(x_1 - x_2)^2 y_1 y_2\}}{2pq(p-q)(x_2 y_1 - y_2 x_1)}$$

où x_1, y_1 et x_2, y_2 représentent respectivement les coordonnées des points E et P.

¹⁾ Comparez la première ligne du § 2, p. 289.

²⁾ Lisez : YHX.

³⁾ Lisez : K + L + M et voyez la figure à gauche de la figure principale.

$\frac{4}{3} \triangle VNX$ minus erit spatium L. Ergo cum $EYP + \frac{4}{3} \triangle VNX$ ⁵⁾ æquatur $\frac{1}{3} \triangle AYV$,
 Erit $EYP +$ spatium L majus quam $\frac{1}{3} \triangle AYV$. Est autem spatium $VYHN$, omnino
 minus spatium L vel M, quippe pars $\triangle VNX$. Ergo $EYP + L + M$ majus quam
 $\frac{1}{3} \triangle AYV + VYHN$, eoque omnino majus quam $\frac{1}{3} \triangle AYV + \frac{1}{3} \triangle VYHN$ hoc est quam
 $\frac{1}{3} \triangle ANH$. Sed spat. $K + L + M$ æquatur $\frac{1}{3} \triangle ANH$. Ergo EYP majus est spatium
 K. quod erat demonstr.^m ⁶⁾.

⁴⁾ Comparez le § 1, p. 288 et la note 2 de cette p. 288.

⁵⁾ Lisez : YHX ; mais puisque $YHX < VNX$, la conclusion qui suit n'en est pas moins valable.

⁶⁾ On peut donc conclure que l'aire $EHPQ$ s'approche indéfiniment, lorsque le point P s'éloigne vers la droite, de la valeur $\frac{1}{3} \triangle ANH$ (ou, dans le cas général, de la valeur $\frac{q^2}{p^2 - q^2} \triangle ANH$); valeur qu'elle ne surpasse jamais. Or $\triangle ANH = \frac{(p+q)^2}{2pq} \square EN$ (d'après le § 1, p. 288), par suite, la limite de l'aire $EHPQ$ est égale à $\frac{(p+q)q}{2p(p-q)} \square EN$. En ajoutant à cette limite l'aire $\frac{q}{2p} \square EN$ du triangle EKH , qu'on obtient en abaissant du point E une perpendiculaire BK sur NQ , on retrouve donc facilement le résultat formulé dans la note 8 de la p. 289.

IX.

[1657—1658.]

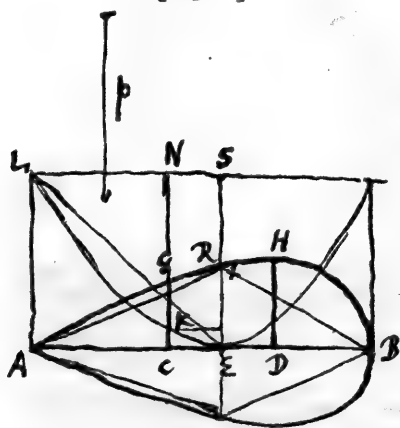
[*Recherches de 1657 et 1658 sur quelques lignes courbes.*]

§ 1¹⁾.

[1657].

Linea AGHB ejus naturæ ut GC sit ad HD, sicut solid. ex quadrato AC in rectam CB, ad solidum ex quadr. AD in DB²⁾.

[Fig. 1.]



$$GC \propto c; HD \propto d; AB \propto a; AE \propto \frac{1}{2}a$$

$$ED \propto CE \propto b$$

$$AC \propto \frac{1}{2}a - b$$

$$\text{qu.}^m AC \propto \frac{1}{4}aa - ab + bb \left. \vphantom{\frac{1}{4}aa - ab + bb} \right\} m.$$

$$CB \propto \frac{1}{2}a + b$$

$$\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}aab + \frac{1}{2}abb$$

$$+ \frac{1}{4}aab - abb + b^3$$

$$\text{fol. AC.}^q \text{ CB } \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb + b^3$$

¹⁾ Ce paragraphe est emprunté aux pp. 2—5 et 62 du livret du frère Philips, que nous avons mentionné dans la note 4, p. 217 du T. XII. Huygens s'y occupe, à propos d'une lettre de de Sluse du 14 août 1657 (voir la p. 47 du T. II), de la quadrature, du centre de gravité,

$$\left. \begin{array}{l} \text{q.}^m \text{AD} \frac{1}{4} aa + ab + bb \\ \text{DB} \frac{1}{2} a - b \end{array} \right\} m.$$

$$\frac{\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}aab + \frac{1}{2}abb}{-\frac{1}{4}aab - abb - b^3}$$

$$\text{AD}^2 \cdot \text{BD} \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb - b^3$$

Jam si GC ductum in $\square ap$, hoc est cap , fit $\propto AC^2$ in CB et HD in $\square ap$, hoc est dap , $\propto AD^2$ in DB: Erit ut c ad d ita

$$\frac{\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb + b^3}{\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb - b^3} [\text{ad}] \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb - b^3$$

$$\frac{\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{4}aab - \frac{1}{2}abb - b^3}{\frac{1}{4}a^3 - abb \propto cap + dap}$$

$$\frac{\frac{1}{4}aa - bb}{p} \propto c + d$$

de la tangente au contour et de la forme générale de la boucle incluse entre les courbes $apy = \pm x^2(a-x)$. On peut consulter sur les questions traitées dans ce paragraphe et sur les solutions que Hudde et van Heuraet en ont données les pp. 47, 52, 58, 62, 73-75, 80, 91, 94-101, 111, 112, 114, 115 et 116 du T. II.

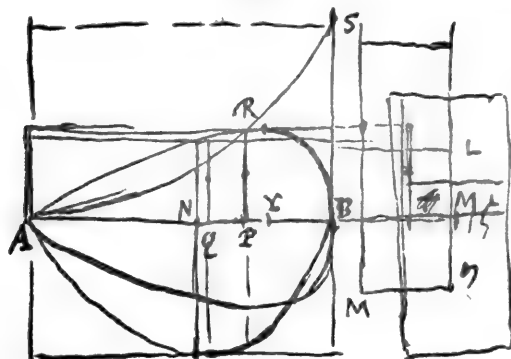
2) Dans ce qui suit il s'agit de la quadrature de la boucle en question. Voici, en notations modernes,

la méthode suivie par Huygens: Soit $AE = EB = \frac{1}{2}a$, $CE = ED = b$. Si l'on considère séparément les parties de la moitié supérieure de la boucle à gauche et à droite de la ligne SE, il est évident que l'aire de cette moitié est égale à $\int_0^{\frac{1}{2}a} \left[f\left(\frac{1}{2}a-b\right) + f\left(\frac{1}{2}a+b\right) \right] db$, où $f(x) =$

$$= \frac{x^2(a-x)}{ap}. \text{ Or, puisque } f\left(\frac{1}{2}a-b\right) + f\left(\frac{1}{2}a+b\right) = \frac{\frac{1}{4}aa - bb}{p}, \text{ la quadrature en question}$$

se réduit à la quadrature bien connue de la demi-parabole SELS, où $ES = \frac{a^2}{4p}$, $LS = \frac{1}{2}a$.

[Fig. 2.]



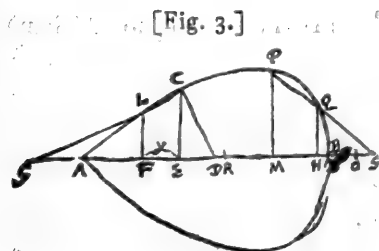
$$\frac{8}{15} [\text{ad}] \frac{2}{3} [\text{id est}] 4 [\text{ad}] 5 \text{ ita BY} [\text{ad}]$$

$$\text{BM} \propto \text{BN}$$

$$\text{BY} [\text{ad}] \text{BA ut } 2 \text{ ad } 5$$

$$\text{Y centr. grav. } ^3)$$

Inventio tangentis.



$$\text{AB} \propto a; \text{AE} \propto b; \text{EF} \propto y; \text{GE} \propto x.$$

$$\text{AF} b - y; \text{BF} a - b + y.$$

$$q. \text{AF.BF} (abb - 2aby - b^3 + 3bby)^4 [\text{ad}]$$

$$q. \text{AE.EB} (abb - b^3) [\text{ut GF}] (x - y) [\text{ad}] \text{GE } x$$

$$abbx - 2abxy - b^3x + 3bbxy \propto abbx -$$

$$- abby - b^3x + b^3y$$

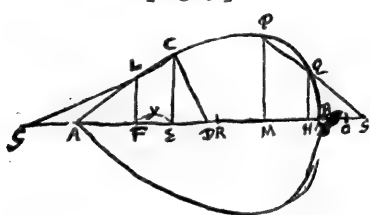
$$3bbx - 2abx \propto b^3 - abb$$

$$x \propto \frac{b^3 - abb}{3bb - 2ab} \propto \frac{\frac{1}{2}ba - \frac{1}{2}bb}{a - \frac{3}{2}b}$$

résultat a été obtenu. En effet, l'inspection de la figure ferait supposer que les deux rectangles à droite, qui semblent faire équilibre avec la boucle si l'on considère le plan de la figure comme mobile autour de l'axe BS, y ont joué un certain rôle; mais dans sa lettre à de Sluse Huygens dit expressément (voir la p. 51 du T. II) qu'il s'est servi du théorème de Guldin, auquel cas il a dû déterminer le volume du solide de révolution formé par la boucle tournant autour de l'axe SB. Or, nous n'avons trouvé cette cubature nulle part dans les manuscrits de Huygens.

⁴⁾ Nous supprimons quelques calculs. Comme on le voit, Huygens néglige ici, et dans la suite, les termes qui contiennent y^2 et y^3 . En effet, avec cette simplification, il applique la méthode de Fermat décrite à la p. 20 du T. XI.

[Fig. 3.]



$$\text{Sit } ER \propto \frac{1}{2}AE \propto \frac{1}{2}b \text{ et ut } BR \left(a - \frac{3}{2}b\right) [\text{ad}]$$

$$RE \left(\frac{1}{2}b\right) \text{ ita fit } BE (a - b) [\text{ad}] EG$$

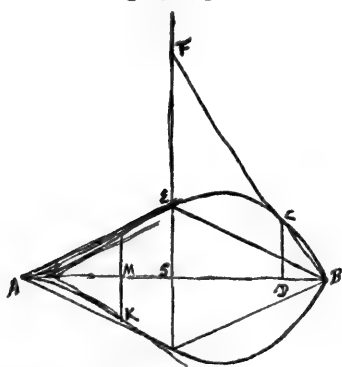
$$\frac{\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bb^1)}{a - \frac{3}{2}b}$$

$$\begin{aligned} AM &\propto b; MH \propto y; MS \propto x; AB \propto a; AH \propto b + y; BH \propto a - b - y \\ q.mAH.BH (abb + 2aby - b^3 - 3bby)^2 [\text{ad}] &q.mAM.MB (abb - b^3) [\text{ut}] \\ SH (x - y) \text{ ad } SM(x) & \\ 3bb - 2abx &\propto abb - b^3 \end{aligned}$$

$$x \propto \frac{ab - bb}{3b - 2a}$$

$$\text{Sit } MO \propto \frac{1}{2}AM. BO \left(\frac{3}{2}b - a\right) [\text{ad}] OM \left(\frac{1}{2}b\right) [\text{ut}] BM (a - b) [\text{ad}] MS(x)$$

[Fig. 4.]



$$x \propto \frac{ab - bb}{2a - 3b} \propto b$$

$$ab - bb \propto 2ab - 3bb$$

$$2bb \propto ab; b \propto \frac{1}{2}a \text{ non delendum}^3)$$

$$BD \propto y^4); SE \propto p; SF \propto x$$

$$[AS^2.SB] \frac{1}{8}a^3 [\text{ad } AD^2.DB] aay - 2ayy + y^3$$

$$[\text{ut}] ES p [\text{ad } CD] \frac{aapy}{\frac{1}{8}a^3}^5)$$

¹⁾ La construction est identique à celle indiquée par Huygens dans sa lettre à de Sluse; voir la p. 50 du T. II.

²⁾ Comparez la note 4 de la p. 297.

³⁾ Par ce petit calcul, qu'il avait biffé par mégarde, Huygens détermine la situation du point de contact E de la tangente qui passe par le sommet A de la boucle. Si nous nous rapportons à la Fig. 3, il est évident qu'on doit avoir dans ce cas $GE = AE$, c'est-à-dire $x = b$.

$$BS \left(\frac{1}{2}a \right) [\text{ad}] \quad SF(x) [\text{ut}] \quad BD(y) [\text{ad}] \quad CD \left(\frac{8py}{a} \right).$$

$$xy \propto 4py; \quad x \propto 4p \text{ quand } [o] \text{ fc. BF tangit in B } ^6).$$

$$[BG \propto] ^7) \quad a - b + \frac{ab - bb}{2a - 3b} [\propto] \quad \frac{2bb - 4ab + 2aa}{2a - 3b} \propto$$

$$\propto \frac{2bb + 4by - 4ab - 4ay + 2aa}{2a - 3b - 3y}$$

$$- 6bb + 12aby - 6aay \propto 8aby - 8aay - 12bby + 12aby$$

$$bb \propto \frac{4}{3}ab - \frac{1}{3}aa$$

$$b \propto \frac{1}{3}a \propto \text{AM } ^6). \quad K \text{ punctum flexus contrarij}$$

$$AD [\text{Fig. 5}] \propto 3a ^8), \quad AB \propto a, \quad CL \propto d, \quad BE \propto BF \propto b. \quad [BA \propto BC.] ^9)$$

⁴) Dans ce qui va suivre Huygens se propose de déterminer la tangente au sommet B de la boucle.

⁵) C'est-à-dire en négligeant les termes contenant y^2 et y^3 ; comparez la note 4 de la p. 297.

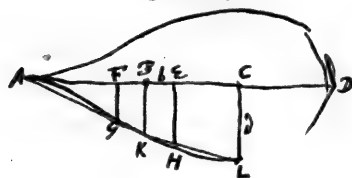
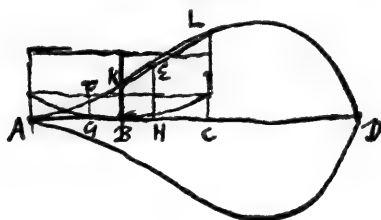
⁶) Comparez toujours la p. 50 du T. II.

⁷) Huygens va s'occuper de la détermination du point d'inflexion qui existe évidemment entre les points A et E. À cet effet il calcule la distance BG (voir le point G au côté gauche de la Fig. 3) qui doit être un minimum dans le cas où C coïncide avec le point d'inflexion. Or, afin de trouver la valeur de $AM = b$ (Fig. 4), qui correspond au minimum de l'expression $\frac{2bb - 4ab + 2aa}{2a - 3b}$, il emploie la méthode de Fermat décrite à la p. 19 du T. XI, avec la modification qu'il y avait apportée, sur laquelle on peut consulter le § 5 de la p. 48 du Tome cité; c'est-à-dire il pose $f(b) = f(b + y)$, en omettant dans l'équation qui en résulte les termes de valeur finie, qui se détruisent mutuellement, et de même les termes qui contiennent y^2 et y^3 .

⁸) Dans ce qui suit Huygens donne la quadrature du segment AGKHLCA, où la courbe ne diffère pas essentiellement de celle de la Fig. 1. En effet, la proportion qui va suivre montre que la courbe AGKHLD satisfait à la définition formulée dans les premières lignes du § 1 (p. 294). Afin d'identifier entièrement les deux courbes, il suffit de représenter la ligne AB de la Fig. 1 par $3a$, au lieu de a , et de supposer $d = 4a^2 : 3p$.

⁹) Le point K est donc le point d'inflexion de la courbe, puisqu'on a $AB = \frac{1}{3}AD$. De même, le point L est le point de la plus grande largeur de la boucle, puisque $AC = \frac{2}{3}AD$.

[Fig. 5.]

[Fig. 6.] ²⁾

ACq. CD ($4a^3$) [ad] AEq. ED ($2a^3 + 3aab - b^3$)
[ut] CL (d) [ad] EH

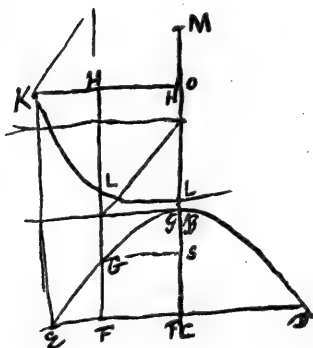
$4a^3$ [ad AFq. FD] ($2a^3 - 3aab + b^3$) [ut]
 d [ad] FG

Ergo $8a^3$ [ad] $4a^3$ [ut] $2d$ [ad] d . Ergo FG +
+ EG ¹⁾ $\propto d$. Ergo portio AGHLCA $\propto \triangle ACL$.

§ 2 ³⁾.

EBD [Fig. 7] est hyperbola æqualium
laterum, axis BC, BO arbitraria. OK paral-
lela et æqualis EC. Curva KLL ejus naturæ
ut qu. HL fit æquale \square^o HGF. Slufius con-
templandam proposuit ⁴⁾.

[Fig. 7.]



BC $\propto a$; BO $\propto b$; $c \propto l$. tr. ⁵⁾; HO, CF $\propto x$;
GF $\propto y$

MS ($c + a - y$) [ad] SG (x) [ut] SG (x) [ad]

SB ⁶⁾ $\left(\frac{xx}{c + a - y} \right) \propto a - y$

$\frac{1}{2}c + a - \sqrt{\frac{1}{4}cc + xx} \propto y$ ⁷⁾

[HG \propto] $b + a - \frac{1}{2}c - a + \sqrt{\frac{1}{4}cc + xx}$

[GF \propto] $a + \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + xx}$

$ab - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}cc - xx + a \sqrt{\cdot} - b \sqrt{\cdot} + c \sqrt{\cdot}$ [\propto] \square HGF

si $a + c \propto b$ ⁸⁾ erit \square HGF [\propto] $aa + ac - xx$ ⁹⁾.

¹⁾ Lisez : EH.

²⁾ Par cette figure Huygens indique la manière dont il pourrait déterminer l'aire d'un segment, comme AFELCA, limité par la courbe, une ordonnée quelconque LC et l'axe AC. En effet, en supposant GB = BH, il est facile de constater que la somme de FG et de EH est égale au double de KB diminué d'une quantité proportionnelle au carré de BH. Par suite le double de l'aire en question est égal au rectangle qui a pour côtés la ligne AC et le double de KB, dimi-

AG $\propto n$ est data. $x^3 + 3xyy + 3yyx + y^3$ cub.AB

$x^3 - 3xxy + 3yyx - y^3$ cub.BC \propto AF

$2x^3 + 6yyx \propto nxx - nyy$ folid.AB, BC, AG.

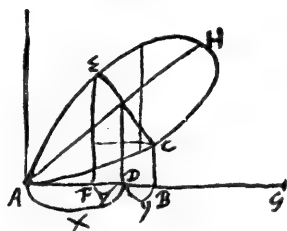
$$yy \propto \frac{nxx - 2x^3}{6x + n} \propto \frac{nxx + 2nzz - 2x^3 - 6xxz}{6x + 6z + n}; x \propto x + z$$

[Fig. 8.]

$$6nxxz - 12x^3z \propto 12nxxz - 36x^3z + 2nmzx - 6nxxz$$

$$12xx \propto nm$$

$$x \propto \sqrt{\frac{1}{12}nm} \propto \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}nm^2}$$



$$\frac{nxx - 2x^3}{6x + n} \propto \frac{2nxx - 6xxz}{6z}$$

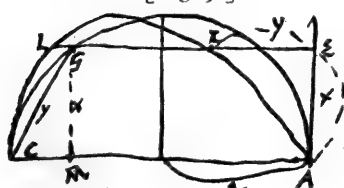
$$6nxxz - 12x^3z \propto 12nxxz - 36x^3z + 2nmzx - 6nxxz$$

$$- 6xx \propto -18xx + nm$$

$$12xx \propto nm$$

§ 4⁴).

[Fig. 9.]



$$2a [\text{ad}] y [\text{ut}] y [\text{ad}] \frac{yy}{2a} \text{CM}$$

$$\frac{xx [\text{MG}^2]}{4aa}$$

$$[\text{CM}^2 + \text{MG}^2 \propto] \frac{y^4}{4aa} + xx \propto yy [\text{CG}^2 \propto \text{IE}^2]$$

$$y^4 \propto 4aayy - 4aaxx$$

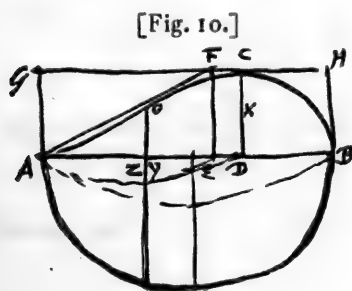
¹) Dès ce moment il ne s'agit plus que de déterminer la valeur de x qui correspond à la valeur maxima de la fraction $\frac{nx^2 - 2x^3}{6x + n}$. A cet effet Huygens applique la méthode que nous avons mentionnée dans la note 7 de la p. 299.

²) Le résultat s'accorde avec celui obtenu par Hudde, qui trouve $\sqrt{\frac{1}{6}nm}$ pour la distance du point A au point où l'axe AH de la boucle est coupé par la droite EC. Ajoutons que Descartes et Fermat se sont occupés en 1638 du même problème; mais leur correspondance sur ce sujet avec Mersenne n'était encore accessible ni à Hudde ni à Huygens, puisque la lettre

§ 5³).

1658.

Curva ACB ejus naturæ ut posita $AB \propto a$. $AD \propto y$. $DC \propto x$, fiat $ay^3 - y^4 \propto aaxx$, $\frac{y^3 - y^4}{a - aa} \propto xx$. Hanc Slusius dicebat ad circumscriptum $\square BG$ sicut



circulus ad quadratum circumscriptum⁶). Quod falsum esse docebimus.

Sit AB partium 10. AE five GF 6 et ducatur AF. Ergo trapezium AFHB ad $\square BG$ ut 7 ad 10 quæ multo minor est ratio quam circuli ad circumscr. quadratum⁷). Atqui trapezio AFHB adhuc minus ostendemus esse spatium à curva AOCB comprehensum⁸). Ergo hujus spatij ad $\square BG$ multo minor erit ratio quam circuli ad circumscr. quadratum.

qui contient la solution de Descartes (voir les p. 313—317 du T. II de l'édition d'Adam et Tannery des „Œuvres de Descartes”), ne parut qu'en 1667 dans le troisième volume de l'édition de Clerselier des „Lettres de Descartes”; tandis que la solution de Fermat, où une faute de calcul s'est glissée, ne fut publiée qu'en 1894, pp. 169—171 et 174—175 du T. II de l'édition de Tannery et Henry des „Œuvres de Fermat”.

³) Consultez sur cette nouvelle modification de la méthode de Fermat la note 3 de la p. 76 du T. XII.

⁴) Dédution de l'équation de la „parabola virtualis” de Gregorius à St. Vincentio, dont on trouve la description à la p. 842 de l'„Opus Geometricum” cité dans la note 6 de la p. 53 du T. I. C'était de Sluse qui avait dirigé l'attention de Huygens sur cette courbe dans sa lettre du 4 septembre 1657, p. 52 du T. II. Le 12 octobre Huygens lui répondit (p. 67 du T. II) qu'il n'avait pu deviner ce que de Sluse avait trouvé de remarquable à propos de cette courbe; après quoi de Sluse l'avertit (p. 70 du T. II) qu'il en avait découvert la quadrature, et que l'aire de la demi-boucle CLIA est égale aux deux troisièmes du rectangle circonscrit (ce qui est exact). Enfin, dans sa lettre du 7 décembre 1657 (p. 94 du T. II), Huygens complimenta de Sluse sur ce résultat et promit d'essayer s'il pourrait y arriver à son tour. Ajoutons que nous n'avons rien trouvé sur cette quadrature dans les Manuscrits de Huygens.

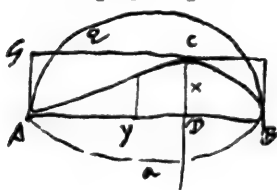
⁵) Dans ce paragraphe, emprunté à une feuille détachée, Huygens s'occupe à propos de sa correspondance avec de Sluse de la quadrature de la boucle formée par la courbe $a^2x^2 = ay^3 - y^4$.

⁶) Voir, à la p. 135 du T. II, la lettre du 19 février 1658 de de Sluse à Huygens. On peut encore consulter sur cette question les pp. 122, 124, 132, 134, 140, 144 et 149—150 du T. II et surtout les p. 150—151 et 154 de ce Tome, où l'on trouve expliquée la véritable pensée de de Sluse qu'il avait mal exprimée dans sa lettre du 19 février.

⁷) Puisqu'on a $\pi : 4 = 7 : 8,91\dots$

⁸) Comparez la note 3 de la p. 304.

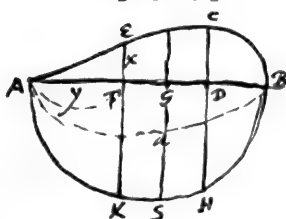
[Fig. 12.]



$ay^3 - y^4 \propto aaxx$ Hujus curvæ spatium ad $\square BG$
 $y\sqrt{ay - yy} \propto ax$ est ut solidum præcedens ad cylin-
 drum. (quod et Slusium puto vo-
 luisse)⁵). Ergo et spatium hoc erit ad $\square BG$ ut circulus
 ad circumscr. quadratum quod falsum est.

Sed descripto super AB semicirculo [Fig. 13]:
 invenio hunc duplum esse spatij ACBA⁶).

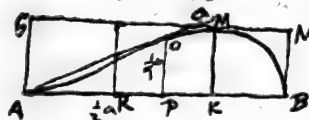
[Fig. 13.]



Est enim AFq. ad FEq. ut yy ad xx sive $\frac{y^3}{a} - \frac{y^4}{aa}$
 hoc est ut aa ad ay - yy, ductis omnibus in aa: hoc
 est ut qu. AB ad qu. FK. Ergo AF ad FE ut AB ad
 FK. Sit BD \propto AF. Ergo eadem ratione AD ad DC
 ut AB ad DH seu FK. Quare componendo erit AF +
 + AD ad FE + DC ut AB ad FK. Sed est AF +
 + AD \propto AB, quia AF \propto DB.

Ergo, AB ad FE + DC ut AB ad FK. Quamob-
 rem erit FE + DC \propto FK. Unde colligo spatium totum AECB esse \propto qua-
 dranti GSKA.

[Fig. 14.]



Si⁷) AP \propto PB fit PO $\propto \frac{1}{4}AB$. Et AOQ tan-
 gens in O⁸). GQ $\propto 2GA$. AK $\propto \frac{3}{4}AB$; KM \propto
 $\propto \sqrt{\frac{27}{256}} [AB]$.

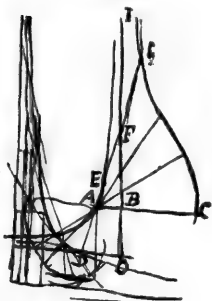
Ergo qu. GR $\propto \triangle GAQ$. Ergo $\square BG$ ad trapez. AQNB sive $\square RN$ ut AB
 ad BR hoc est ut 1 ad $1 - \sqrt{\frac{27}{256}}$ quam proportionem dico majorem quam qua-
 drati ad circ. inscriptum. est enim major quam 1 ad $1 - \frac{5}{16}$ hoc est quam 16 ad 11,
 quæ major quam 15 ad 11⁹).

⁷) Dans ce qui suit Huygens cherche pour l'aire AOMBA une limite supérieure plus rappro-
 chée que celle qu'il avait trouvée à l'aide de la Fig. 10. À cet effet il se sert de la tangente
 menée du point A à la courbe AOMB.

⁸) On trouve, en effet, que la tangente en O passe par le point A.

⁹) On retrouve ce calcul dans la lettre à de Sluse du 12 mars 1658 (p. 149—150 du T. II) où
 Huygens ajoute: „Atqui circulus ad circumscriptum quadratum majorem habet quam 11 ad
 15, ac ferè eam quam 11 ad 14”.

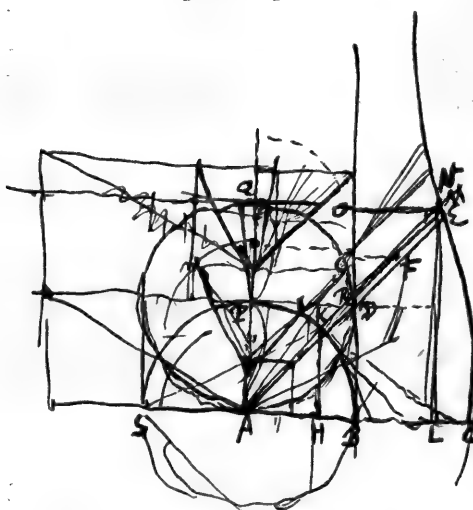
[Fig. 15.]

§6¹⁾.

Omnis conchoidis spatium infinitæ est magnitudinis. Ostenditur per asymptotos hyperbolæ²⁾.

Sphæræ et spiræ³⁾.

[Fig. 16.]



$\square DE$ ⁴⁾ [ad] $\triangle AK$ ut $2DB$ [ad] KH ⁵⁾ h. e. ut $2BA$ [ad] HA vel EO . h. e. ut BA ad FG ⁶⁾.

$\square DE$ in $FG \propto \triangle AK$ in AB .

omnia $\square^a DE$ in FG hoc est solida ex conversione \square orum $DE \propto$ solido quod fit circa axem AB à quadrante ABP suspenso secundum centrum gravitatis suæ in P ⁷⁾. Unde duplo utriusque sumto, fit solidum à tota conchoïde præter sphæram in ipso contentam quæ fit à $\triangle isRMN$ æquale semispiræ, quæ fit conversione semicirculi ADQ circa axem AB . Ergo totum omnino solidum conchoidis infinitum æquale sphæræ BS et dimidiæ spiræ à semicirculo BPS ⁸⁾.

¹⁾ Ce paragraphe, emprunté à une feuille détachée et à la p. 39 du Manuscrit A, traite de la quadrature de la conchoïde et de la cubature du solide de révolution autour de son asymptote.

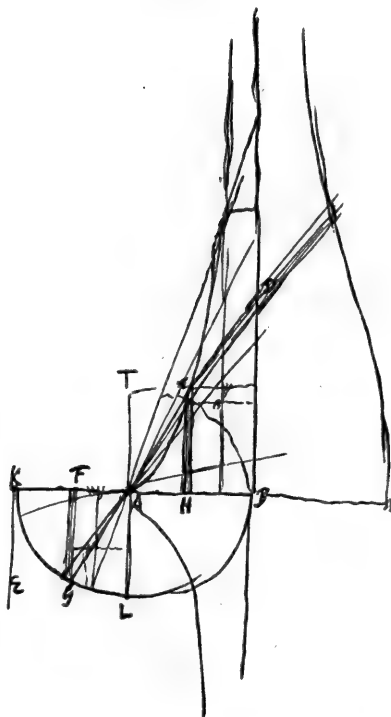
²⁾ Voir la figure à côté où nous avons ajouté quelques lettres, celle de Huygens n'en ayant point. Soit donc A le pôle de la conchoïde, AC son axe, I le point à l'infini de l'asymptote BF ; évidemment on peut placer la seconde asymptote OD de l'hyperbole en sorte que $AD = EF < FG = BC$. Mais alors, si l'on fait tourner le rayon vecteur AG autour du pôle, tous les éléments qui constituent l'aire hyperbolique EIF sont plus petits que les éléments

[Fig. 18.]



Si A polus conchoidis et CV ad VA ut $\frac{3}{4}$ circumfer.^a CYX ad CV ¹⁾ fiet solidum conchoidis duplum sphaerae CX inscriptae.

[Fig. 19.]



AC est altera Conchoides in qua semper $CD \propto AB$. CH ad HA ut GF ad FA, seu HB. nam $FA \propto HB$ quia $AG \propto CD$. unde quoque $HA \propto FK$. Ergo $\square CH$ in $HB \propto \square FG$ in FK , fiunt enim ejusdem latitudinis hæc rectangula ²⁾. Ergo solidum infinitum conchoidis circa BD æquale solido quod fit a quadrante ALK circa axem KE. sive BAL circa BD.

Vel si Conchois ad alteram partem quoque describatur, erit totum solidum æquale ei quod fit a semicirculo LBT circa axem BD ³⁾. Hoc autem sphaerae integræ additum æquatur annulo dimidio, qui fit a semicirculo BLK circa axem BD.

AC [Fig. 20] ⁴⁾ conchoides. D polus. EF regula.

B punctum in Conchoide. BDH linea. $DH \propto EA$. HK parall. DA.

BG est curva ejusmodi ut semper $MG \propto DN$.

Eam dico esse hyperbolam per punctum B

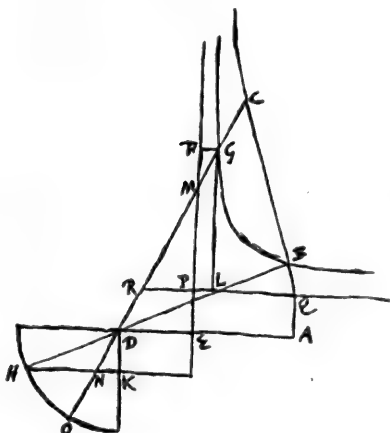
¹⁾ On a donc, $l : a = \frac{3}{4}l\pi : l$; c'est-à-dire $a = \frac{4}{3\pi}l$.

²⁾ Parce que, en effet, lorsque les points F et H se déplacent, on a à chaque instant $KF = AH$.

³⁾ Puisque la distance du centre de gravité du demi-cercle LBT à l'axe BD est égale à $\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)l$

(où $l = AB$), on a donc pour le volume en question $\left(\pi - \frac{4}{3}\right)\pi l^3$.

[Fig. 20.]



descriptam ad asymptotos PF, PQ. sumptâ
videlicet EP \propto DK, et ductâ PQ parall. DA.

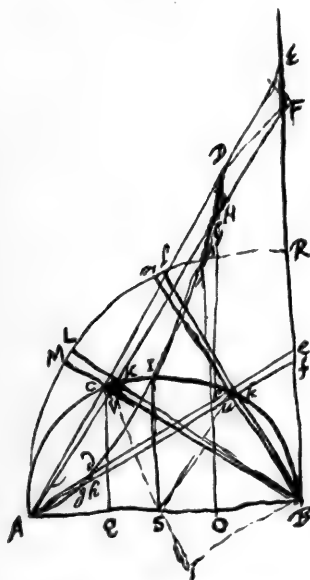
Hanc hyperbolam apparet à B versus G totam cadere intra conchoidem. Sed Hyperbolam inter et afymptoton infinitæ magnitudinis spatium interjicitur. Ergo et Conchoidis spatium infinitum erit.

Quod BG fit hyperb. hinc constat. Quia
 $MG \propto DN$ vel DR , erit $RG \propto MD$; et
 $GL \propto ME$. Item $MF \propto DK$. Sed ut MF
(h.e.DK) ad FG , ita GL (five ME) ad ED .
Ergo $\square DK, DE \propto \square FG, GL$. idque sem-
per. ergo BG est hijperb.

§ 7⁵).

18 Mart. 1658.

[Fig. 21.]



AIGD est Ciffoides. Ergo $AC \propto DE$; $AK \propto GF$;
 $Ac \propto de$. &c.

trapezij DEFH eadem est altitudo ac \triangle^{li} CVA \circ) unde illud trap. ad hoc \triangle^{m} ut EF + DH ad CV. hoc est ut EB + DO ad CQ, hoc est ut BA + AO ad AQ; five ut AB + BQ ad QA. hoc est ut qu. AB + qu. BC ad qu. CA. hoc est ut \triangle^{BML} + \triangle^{BCK}

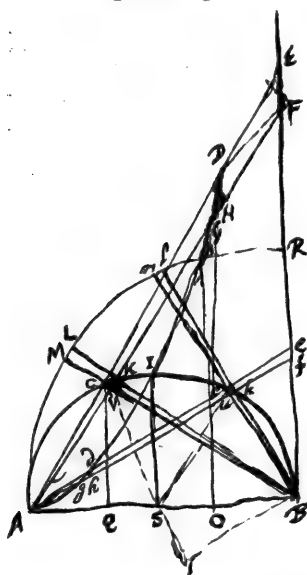
4) Ce nouvel arrangement de la démonstration indiquée par la Fig. 15 (p. 306) doit dater de l'un des derniers mois de l'année 1658, comme cela résulte de la place qu'il occupe (p. 39 du Manuscrit A). Il nous semble probable qu'il fut rédigé à l'occasion de la correspondance de Huygens avec Wallis. Ce qu'on lit dans la lettre à Wallis du 6 septembre 1658 (p. 212 du T. II): „non videris animadvertisse spatium infinitum conchoidis etiam magnitudine infinitum esse quod ego aliquando me demonstrasse memini”, doit se rapporter à la remarque qui accompagne la Fig. 15;

mais Huygens aura alors senti le besoin de vérifier la justesse de cette remarque et d'en rédiger une démonstration formelle.

⁵⁾ Ce paragraphe, emprunté à quelques feuilles détachées, traite de la quadrature de la cissoïde.

6) Le point V est situé sur la droite CQ, par suite la hauteur du triangle ACV est AQ, qui est égale à OB, hauteur du trapèze, puisque $AC = DE$.

[Fig. 21.]



ad $\triangle ACK$, five CVA. Ergo hinc sequitur $\triangle BML + \triangle BCK$ æquari trapez.° DEFH. Et hoc semper: unde colligo spatium infinitum à curva AIH et rectis AB, BE comprehensum æquari quadranti BAMR + semicirculo AIB hoc est triplo semicirculo AIB.

Item partem quamlibet abscissam recta ex Aeducta, velut AIDEBA æqualem esse sectori BMR + segmento BkC. hoc est triplo segmento CkB + duplo $\triangle CBS$ ¹⁾ hoc est \triangle ° cujus basis $\propto 3$ arcus CB—CQ, altitudo radius SB. arcus autem BkC semper duplus est MR²⁾. unde data arcus BkC longitudine, dabitur quadratura dictæ partis AIDEBA.

Dato quadrato vel circulo æquali spatio ABCX [Fig. 22] dabitur quadratura circuli.

Potest circulus inveniri qui unà cum spatio ABCX æquatur quadrato dato.

ABCED \propto semicirc. APCMD + n^3)

commune auferatur ABCMD

CMDE \propto ABCP + AFCP (n)

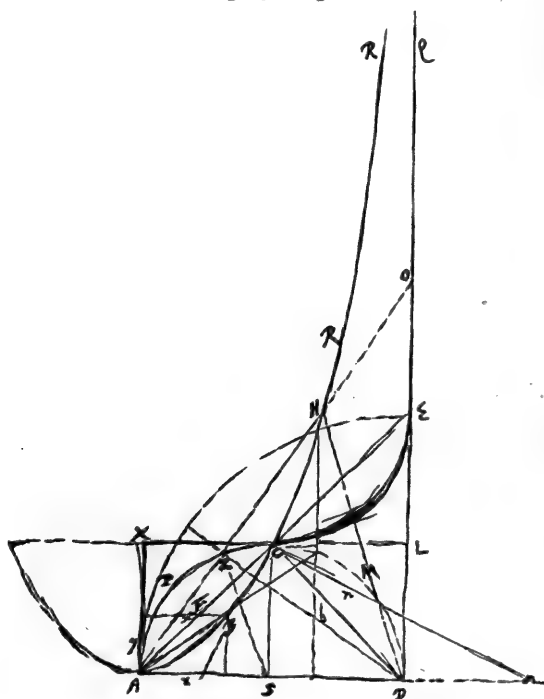
CMDE + n hoc est qu. AC \propto \propto ABCP + $2n$

auferatur utrinque $2n$

APCB \propto 2APCX. add. utrique APCX

ABCX \propto 3APCX

semicirc. ACD + spatio ABCPA æquatur \square AXLD¹⁾ circumscripto. five quadrato circulo AD. inscripto.



sera représenté par $2m + 2n$ et l'espace AIDEBA par $2m + 3n$.

¹⁾ Écrivons m pour l'aire du triangle CSB = CSA et n pour celle du segment CkB, alors le secteur MBR dont l'aire est le double de celle du secteur CSBkC

Spatium infinitum ABCRRQD est triplum semicirculi ACD.
Semper spatium ABCHD est triplum segmenti DZM. nam $\triangle DHO \propto \propto DZA \propto 2DZS$ ⁵⁾.

[Fig. 23.]



Ostendendum ⁶⁾ est spatium AVLEFBA [Fig. 23] æquari sectori BNT + segmento CXB.

Primo spatium minus dicatur, sitque excess. Ω . Erit figura inscripta EHLab&c. multo minor. trapezium EFGH æquale ostenditur $\triangle^{lis} BCM + BNO$ ⁷⁾. Ejusmodi igitur figura inscribatur, ut fiant omnia simul frustra qualia CPM et NRO minora excessu Ω quo spatium AVLEFBA superari dicitur à sectore BNT + segmento CXB (hoc fieri posse ostendatur).

Sed hæc frustra omnia trapezijs addita, æquantur sectori BNT + segm. CXB. Ergo trapezia una cum priori excessu Ω majora erunt sectore BNT + segm. CXB. Unde trapezia majora ipso spatio cui inscripta sunt quod absurdum.

Si spatium majus esse dicatur, erit figura circumscripta FKLdb&c. multo major. Jam trapezium KG æquale ostenditur $\triangle^{lis} BPQ + BRS$.

²⁾ C'est-à-dire en degrés, leurs longitudes étant égales.

³⁾ Puisqu'on a ici, les segments APC et CMD étant égaux, $APCMD = 2m + 2n$.

⁴⁾ Puisque $APCBA = 2APCXA$. On a donc $\square AXLD = \text{semicirc. APCMD} + \frac{2}{3}ABCXA$, d'où il s'ensuit que si l'on saurait carrer l'espace ABCX, ou bien construire un cercle égal à cet espace, on aurait trouvé la quadrature du cercle.

⁵⁾ On a trouvé $ABCHODA = 2m + 3n$; mais $DHO = AZD = 2m$; par suite, $ABCHD = 3n = 3 \text{ segm. DZM}$.

⁶⁾ Dans ce qui suit Huygens prépare une démonstration plus archimédienne du résultat qu'il vient d'obtenir. Ajoutons qu'on trouve encore sur une des feuilles dont nous empruntons le présent paragraphe une autre rédaction plus détaillée d'une démonstration de ce genre, qui est également restée inachevée. Nous croyons pouvoir la supprimer, d'autant plus que l'on rencontre encore deux autres rédactions complètes d'une telle démonstration, envoyées respectivement à Wallis et à de Sluse, aux pp. 170—173 et 178—180 du T. II. Il est vrai que dans la rédaction que nous supprimons la figure est composée d'une autre manière que nos Fig. 21 et 22; mais on retrouve cette composition dans la lettre envoyée à de Sluse, p. 178 du T. II.

⁷⁾ Comparez le deuxième alinéa du § 7, p. 309.

ablato utrinque $2\Box ANB$, erit \Box [lat.]r, DF æquale qu.° AN + qu.° NB. Rursum quoniam ostensum est, l. r. ad $2MQ$ hoc est $2PO$ ut MQ ad QS , hoc est ut EP ad PL sive OD ; erit \Box sub l. r. et OD æquale $2\Box OPE$. Sed \Box [l.] r., $OD + \Box^\circ$ [l.]r., OF æquatur \Box [l.]r., DF ; ergo etiam $2\Box OPE + \Box$ [l.]r., OF sive qu.° OE æquabitur \Box [l.]r., DF . Sed $2\Box OPE + qu. OE$ æquatur etiam — per 7.1. Elem. 5) — duobus qu.° EP , et OP . Ergo patet \Box [l.]r., DF æquari qu.° EP et OP . atqui \Box° eidem [l.]r., DF etiam æqualia ostensa sunt qu.° BN et NA . Ergo duo qu.° EP et OP æqualia duobus BN et NA . sed qu.° NA æquale qu.° OP . Ergo reliquum etiam qu.° BN æquale qu.° EP . ac proinde BN ipsi EP etiam longitudine æqualis erit, Et, quoniam similia sunt $\triangle^a BLN$, ELP , et latera æqualibus angulis opposita BN , EP habent æqualia etiam reliqua latera æqualibus opposita angulis æqualia habebunt, nimirum BL ipsi LE . Eadem ratione ostend. etiam VR ipsi RX æqualis. Jam porro ducatur VT ipsi AB æquidistans. Quia ergo ostensum fuit \Box [l.]r., DF æquale qu.° AN et NB , sed idem \Box [l.]r., DF etiam æquale \Box° [l.]r., QF et [l.]r., QD quorum \Box [l.]r., QF qu.° QM hic qu.° AN æquale est, patet etiam reliquum \Box [l.]r., QD seu [l.]r., LM æquari reliquo qu.° NB . Similiter ostenditur qu.° VT æquale \Box [l.]r., RM . Erit itaque qu.° VT ad qu.° BN ut \Box [l.]r., RM ad \Box [l.]r., LM , hoc est ut RM ad LM . Sed ut qu.° VT ad qu.° BN ita qu.° VR ad qu.° BL . Ergo &c.

5) Lisez „7.2. Elem.”, puisqu’il s’agit de la Prop. 7 du Livre 2 des „Elementa” d’Euclide. Voici cette proposition: „Si recta linea secetur vtrunque; Quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.” (Clavius, p. 181).

X¹⁾.

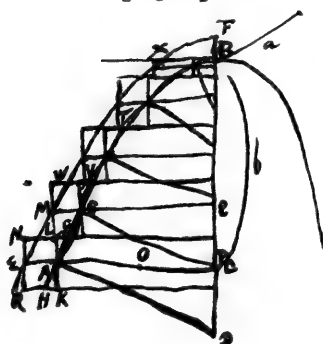
1658.

[Réduction de la quadrature de la surface du conoïde elliptique allongé à la quadrature du cercle, et réduction de celle des surfaces du conoïde elliptique aplati et du conoïde hyperbolique à la quadrature de l'hyperbole.]

[PREMIÈRE PARTIE ²⁾].

§ 1 ³⁾.

[Fig. 1.]



BA est parab. lat. rect. a .

Superficies ex tangentibus HG, GV &c. ad circum-
lum ex CA semidiam. sunt ut omnia \square sub AC,
HG; SQ, GV; &c. ad \square ACO, five $\frac{1}{2}$ qu.AC.

CE est ∞ AD quæ occurrit in A ad angulos rectos.
Et ut AD five EC ad AC ita HG ad LK five NR.
Ergo \square EC, NR ∞ \square AC, HG. Ergo ut omnia
 \square CE, NR. MQ, WL, &c. hoc est ut parabolæ
frustum EXBC (sunt enim puncta E, M, &c. ad
parabolam cujus lat. rect. item a . sed vertex in F,

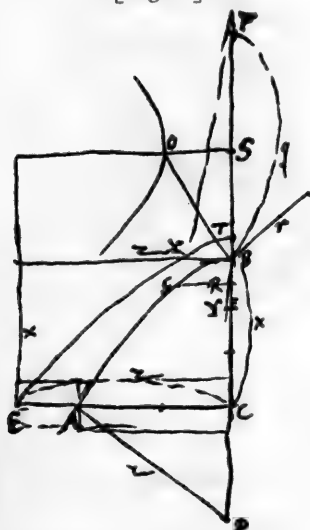
sumpta BF $\propto \frac{1}{4}a^4$) ad \square ACO, ita superficies conoidis BAC ad circum-
lumeos CA. Ergo ut $(4b + a) \sqrt{4ab + aa} - aa$ ad $6ab$ ⁵⁾.

¹⁾ La Pièce, que nous avons divisée en quatre Parties et en paragraphes, a été empruntée aux p. 103—113 du Manuscrit A et à quelques feuilles détachées.

²⁾ On trouve cette Première Partie presque en entier (voir les notes 4 de la p. 320 et 8 de la p. 323) sur une feuille détachée de quatre pages dont la troisième contient la date du 3 février 1658. Il nous semble probable que toutes les découvertes exposées sur ces pages furent faites pendant cette journée.

³⁾ Ce paragraphe contient l'exposition d'une nouvelle méthode pour la quadrature des surfaces

[Fig. 2.]

§ 2⁶).

In Hyperbola.

Superficies conoidis hyperbolici BA ad circulum basis
 fuæ, ut spatium EXBC ad $\frac{1}{2}$ qu. AC⁷).

[latus rectum $\propto r$; latus transversum BF $\propto q$; BS \propto
 $\frac{1}{2}$ BF; BC $\propto x$; AD \propto EC $\propto z$.]

$$CD \propto \frac{1}{2}r + \frac{rx}{q} \text{ } ^8)$$

de révolution et son application au conoïde parabolique dont la surface courbe avait été déterminée auparavant par Huygens; voir la Pièce N^o. VI, p. 234—270 du présent Tome.

- 4) Les calculs qui ont mené à cette conclusion nous sont inconnus; voir pour une démonstration en règle le „Theorema I” de la Quatrième Partie, p. 338—339.
- 5) C’est, dans les mêmes notations, la formule communiquée, en janvier 1658, par van Heuraet à Huygens par l’intermédiaire de van Schooten; voir la p. 131 du T. II. Comme nous l’avons vu dans la note 6 de la p. 265, elle ne peut être déduite du résultat obtenu par Huygens en 1657 qu’à l’aide de quelques réductions relativement compliquées. Sans doute Huygens doit avoir été frappé par cette circonstance, et il en aura conclu que van Heuraet devait posséder une méthode différente de la sienne. Par conséquent il se sera mis à rechercher cette méthode.

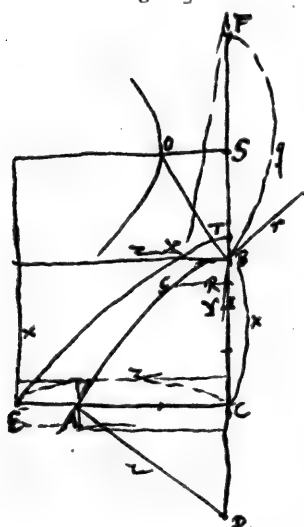
Quant au résultat obtenu cette fois, il est évident qu’il conduit facilement à la formule de van Heuraet. Posant BC = b , on a CE = $\sqrt{a(b + \frac{1}{4}a)}$. Par suite, on trouve pour l’aire parabolique FEC: $\frac{2}{3}(b + \frac{1}{4}a)\sqrt{a(b + \frac{1}{4}a)}$, laquelle, diminuée de l’aire BXF = $\frac{1}{12}a^2$, donne pour le rapport indiqué:

$$\left\{ \frac{2}{3}(b + \frac{1}{4}a)\sqrt{a(b + \frac{1}{4}a)} - \frac{1}{12}a^2 \right\} : \frac{1}{2}ab.$$

- 6) Application de la nouvelle méthode à la quadrature du conoïde hyperbolique.
- 7) Ce résultat est une conséquence immédiate de la méthode indiquée au § 1. Il ne s’agit donc plus que de déterminer la nature de la courbe XE.
- 8) Consultez la p. 217 de l’édition de 1649 (ou la p. 245 des éditions de 1659 et de 1683) de la „Geometria” de Descartes, publiée par van Schooten (voir l’ouvrage cité dans la note 1 de la p. 218 de notre T. I). Van Schooten y déduit dans ses „Commentarii” l’expression $x + \frac{rx}{q} + \frac{1}{2}r$ pour la longueur de la ligne BD. Ajoutons que Descartes avait donné dans le texte de sa „Géométrie” la formule correspondante pour le cas de l’ellipse; comparez la note 8 de la p. 317.

$$q[\text{ad}] r[\text{ut}] \square \text{FCB}(qx + xx)[\text{ad}] \left. \begin{array}{l} \frac{r qx + rxx}{q} \text{qu. CA} \\ \frac{1}{4}rr + \frac{rrx}{q} + \frac{rrxx}{qq} \text{qu. CD} \end{array} \right\} a[\text{dde}]$$

Fig. 2.]



$$\frac{1}{4}rr + \frac{rrx}{q} + rx + \frac{rrxx}{qq} + \frac{rxx}{q} \propto zz^1)$$

$$z \text{ major quam } \frac{1}{2}r$$

$$xx \propto \frac{qqzz - \frac{1}{4}qqrr}{qr + rr} - qx$$

$$x \propto -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3r + qqzz}{qr + rr}} \text{ ex Cartesij regula } ^2)$$

T vertex hyperb. TE. ST fumenda $\propto m$ hoc est

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3}{q+r}}. \text{ Ergo fit } BY \propto \frac{1}{2}r, \text{ et SR media prop. inter SY, SB. Et ut RS ad BS ita fit BS ad TS } ^3).$$

$$p[\text{ad}] m^4) [\text{hoc est}] qq[\text{ad}] qr + rr[\text{ut}] 2m[\text{h. e.}] \left(\sqrt{\frac{q^3}{q+r}} \right) [\text{ad}]$$

$\sqrt{rr + \frac{r^3}{q}}$ latus rect. hyperb. TE. Ergo media prop. inter hoc et l. transv. erit $2SO \propto \sqrt{rq} \propto \text{diam. conjugatæ hyperb. TE. Ergo cum hyperbolæ TE, BA habeant eandem diam. conjug.}^m \text{ habebunt latera recta reciproce rationem laterum transverforum } ^5).$

$$\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}qr} \propto \text{SR } ^6); R \text{ est focus hyperb. BA, } OB \propto \text{SR. } RG \propto \frac{1}{2}r.$$

¹⁾ La courbe XE est donc une hyperbole, dont Huygens va chercher les dimensions et la situation par rapport à l'hyperbole BA.

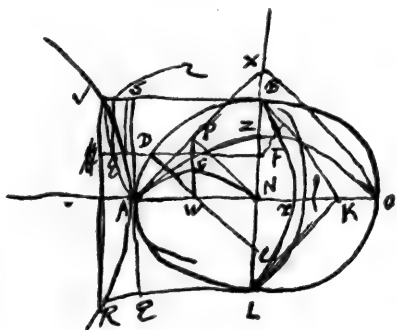
²⁾ Voir les règles pour la résolution des équations quadratiques, formulées par Descartes dans sa „Géométrie”, p. 375 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes.

³⁾ Construction pour trouver le sommet de l'hyperbole TE. On a, en effet, $SY = \frac{1}{2}(q+r)$;

$$SB = \frac{1}{2}q; \text{ donc } RS = \sqrt{\frac{1}{4}q(q+r)}, \text{ et par suite : } \sqrt{\frac{1}{4}q(q+r)} : \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}q : \text{TS}$$

$$\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3}{q+r}} \right).$$

[Fig. 3.]

§ 3⁷⁾.

[latus rect. $\propto r$; latus tranfv. $BL \propto q$; $BF \propto x$;
 $DC \propto EF \propto z$.]

$$\frac{1}{2}r - \frac{rx}{q} \text{ FC } ^8)$$

$$\text{qu. FC } \frac{1}{4}rr - \frac{rrx}{q} + \frac{rxx}{qq} \left\{ \propto zz \right.$$

$$q[\text{ad}]r[\text{ut}]qx - xx[\text{ad}] \text{qu. FDrx} - \frac{rxx}{q}$$

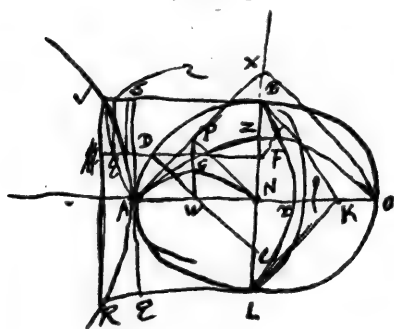
$$xx \propto \frac{qqzz - \frac{1}{4}qqrr + qrrx - qqr x^9)}{rr - qr}$$

- 4) La signification de la lettre p nous est restée énigmatique jusqu'à l'instant où nous avons retrouvé cette notation dans la „Géométrie” de Descartes (voir les p. 399—405 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery). Au lieu cité l'équation générale du second degré est réduite dans le cas de l'hyperbole à la forme $y = \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$, où les x sont mesurées sur l'axe imaginaire lorsqu'on a $4mp > 00$. Si l'on compare cette équation à celle de la forme $CA = y = \sqrt{rx + \frac{r}{q}xx}$, où r représente le „latus rectum” et q le „latus transversum” et où les x sont mesurées sur l'axe réel, on trouve facilement $\frac{p}{m} = \frac{q}{r} = \frac{\text{latus transversum}}{\text{latus rectum}}$. En appliquant ces considérations à l'hyperbole TXE dont le „latus transversum” est égal à $2ST = 2m$ (où m a une signification entièrement différente de celle qu'elle a dans la fraction $\frac{p}{m}$), on aura donc, comme dans le texte:

$$\frac{p}{m} = \frac{qq}{qr + rr} = \frac{2m}{\text{latus rectum}} = \frac{\sqrt{\frac{q^3}{q+r}}}{\sqrt{rr + \frac{r^3}{q}}}$$

- 5) On retrouve ces résultats, avec une modification légère quant à la détermination du sommet T, dans l'„Horologium oscillatorium, Pars Tertia” après la Prop. IX (p. 75 de l'édition originale) sous l'en-tête: „Conoidis hyperbolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire”.
 6) Comparez la note 3.
 7) Application de la nouvelle méthode à la quadrature du sphéroïde aplati.
 8) Comparez la note 8 de la p. 315. Le cas de l'ellipse est traité à la p. 52 de l'édition de 1649 de la „Geometria” (p. 46 de celles de 1659 et 1683). Dans l'édition des „Œuvres de Descartes” d'Adam et Tannery on le trouve à la p. 419 du T. VI.
 9) Équation de l'hyperbole VEAR.

(Fig. 3.)



$$xx \propto \frac{qqzz - \frac{1}{4}qqrr}{rr - qr} + qx$$

$$x \propto \frac{1}{2}q \sqrt{\frac{-\frac{1}{4}q^3r + qqzz}{rr - qr}}$$

$$m [ad] p^2) [hoc est] rr - qr [ad] qq [ut]$$

$$\text{lat. transv. } \sqrt{qr} [ad] \frac{qq\sqrt{qr}}{rr - qr} \text{ lat. rectum}$$

hyperb.

$$\text{Ergo diam. conjugata } \sqrt{\frac{q^3}{r - q}}.$$

AE est hyperb. centrum ejus N. vertex A.

Superficies sphæroidis dimidij ABO est ad circ. AO ut spatium RAVBL ad qu. AN⁴).

$$\text{Sit } AP + PN \propto BV \propto \frac{1}{2} \text{ lat. rect. } ^5) \text{ AGN parab. ut GW fit } \propto \frac{1}{2} PW ^6).$$

Erit ut linea parabolica AGN ad $\frac{1}{4}$ lateris recti ellipsis ita superficies spheroidis

¹) Par ce signe Huygens indique qu'on doit employer, selon les circonstances, le signe + ou le signe —.

²) Comparez la note 4 de la p. 317. L'emploi de la lettre p s'explique ici d'une manière analogue.

³) Puisque, d'après une règle alors bien connue, ce diamètre est moyen proportionnel entre les deux „latera”.

⁴) D'après la méthode générale exposée au § 1, p. 314. La quadrature de la surface sphéroïdale est donc déjà réduite à celle de l'hyperbole. Or, Huygens entrevoit le moyen de la réduire de même d'une manière simple et élégante à la rectification de la parabole.

⁵) On trouve, en effet, en posant $x = 0$ dans l'expression pour zz (p. 317), $BV = \frac{1}{2}r$, où r représente le „latus rectum” de l'ellipse ABOL par rapport à l'axe BL.

⁶) De cette manière la parabole AGN et l'hyperbole VEAR sont dans la relation indiquée dans l'énoncé du „Theorema VIII” de la p. 249 puisqu'on a $\frac{AP + PN}{AN} = \frac{BV}{AN}$. On peut donc appliquer ce théorème; mais aussi le „Theorema IX” (p. 253). Or, d'après ce dernier théorème, on a :

$$\text{par. AGN : AN} = \text{aire RAVBL : AN} \times \text{BL},$$

d'où il résulte, puisqu'on peut remplacer AN par une quantité quelconque pourvu qu'on le fasse à la fois dans le deuxième et dans le quatrième terme de la proportion :

$$\text{par. AGN : } \frac{1}{4}r = \text{aire RAVBL : } \frac{1}{4}qr = \text{aire RAVBL : AN}^2 = \text{surf. ABO : cercle AO}.$$

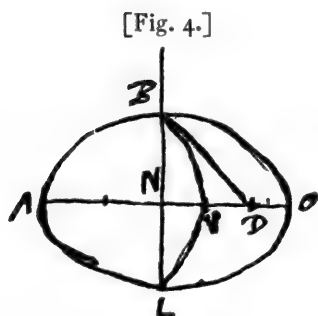
dis dimidij ABO ad circulum AO. Vel sumpta parabola dupla, ut sint AX, XO singulæ $\propto \frac{1}{2}$ latus rectum, erit curva AZO ad $\frac{1}{4}$ lat. rect. sicut tota spheroidis superficies ad dictum circulum AO.

Applicato spacio RAVBL ad lineam BL $\propto q$ fit longitudo parabolæ AGN. applicato vero quadr.° AN ad lin. BL, fit $\frac{1}{4}r$ 7).

$$NO \propto BK \left(\sqrt{\frac{1}{4}rq} \right) [\text{ad}] BN \left(\frac{1}{2}q \right) [\text{ut}] XA \left(\frac{1}{2}r \right) [\text{ad}] AN \left(\sqrt{\frac{1}{4}rq} \right)$$

hinc video mutari posse constructionem ut pro $\triangle^{\circ}AXO$ sumatur BKL. et pro $\frac{1}{4}$ lat. recti sumatur $\frac{1}{4}AO$ 8).

CONSTRUCTIO.



Sphæroidis lati axis est BL, sectio per axem ellipfis ABOL cujus diam. maxima AO. BD \propto NO, sive D est focus.

NV $\propto \frac{1}{2}$ ND. BVL est parab. axis VN. Sicut linea parabolica ad $\frac{1}{4}AO$ ita superf. sphæroidis ad circulum OA.

Circulus cujus semidiam. est media proport. inter OA et curvam BVL, æqualis est superficiei sphæroidis 9).

7) C'est-à-dire: $\frac{\text{aire RAVBL}}{BL} = \text{long. par. AGN}; \frac{AN^2}{BL} = \frac{1}{4}r$.

8) Voir la „Constructio” qui suit, où cette modification est apportée.

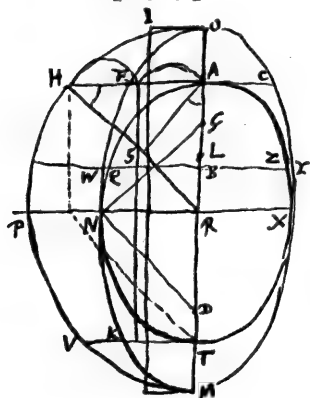
9) Ce résultat fut communiqué à de Sluse dans une lettre du 26 février 1658 (voir la p. 141 du T. II); on le retrouve aussi à la p. 39 du Manuscrit N°. 13 (mentionné dans la note 5 de la p. 235) et de même dans l'„Horologium oscillatorium” (p. 75 de l'édition originale) après la „Prop. IX” de la „Pars tertia” sous l'en-tête: „Sphæroidis lati sive compressi superficiei circulum æqualem invenire”.

§ 4 ¹⁾.

3 Febr. 1658.

AT $\propto q$. lat. rect. Ellipsis A[N]T[X] $\propto r$. [AB $\propto x$; BW ²⁾ $\propto z$]. Superficies QAZ partis sphæroidis, ad circulum QZ, ut spatium WFACY ad qu. QB ³⁾.

[Fig. 5.]



$$\frac{1}{4} \frac{qqrr - qqzz}{qr - rr} + qx \propto xx^4)$$

$$\frac{1}{2} q \propto^5) \sqrt{\frac{1}{4} \frac{q^3 r - qqzz}{qr - rr}} \propto x$$

$$m [\text{ad}] p [\text{id est}] qr - rr [\text{ad}] qq [\text{ut}] \sqrt{qr} [\text{ad}] \frac{qq \sqrt{qr}}{qr - rr} \text{ l. rect. } ^6).$$

$$\text{Ergo dupla RO} \propto \sqrt{\frac{q^3}{q - r}} ^7).$$

$$\text{AL} ^8) \propto \frac{1}{2} r. \text{ RG media inter RL, RA, ergo RG} \propto \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{4} qr}. \text{ Ut RG}$$

$$\text{ad RA ita hæc ad RO, ergo RO} \propto \sqrt{\frac{1}{4} \frac{q^3}{q - r}} \propto \text{RH} \propto \text{RP}.$$

¹⁾ Application de la nouvelle méthode à la quadrature du sphéroïde allongé.

²⁾ BW représente la longueur de la normale au point Q, comptée de ce point jusqu'à l'intersection avec l'axe AT.

³⁾ Consultez la méthode exposée au § 1, p. 314.

⁴⁾ Cette équation et les trois lignes qui la suivent ont été copiées d'une autre feuille détachée; comparez la note 2 de la p. 314. La déduction de l'équation se trouve sur la même feuille, mais nous l'avons supprimée parce qu'elle est entièrement analogue à la déduction de l'équation correspondante du § 3, p. 318.

⁵⁾ Voir la note 1 de la p. 318.

⁶⁾ Cette proportion s'explique d'une manière analogue à celle que nous avons exposée dans la note 4 de la p. 317. Comparons, à cet effet, la forme générale $y = m - \frac{n}{x} +$

$$\text{f. } \left\{ \begin{array}{l} \text{q.RH } \frac{\frac{1}{4}q^3}{q-r} \\ \text{q.RA } \frac{\frac{1}{4}qq}{q-r} \end{array} \right.$$

$$\text{AH } \sqrt{\frac{\frac{1}{4}qqr}{q-r}}$$

quia qu. RH ad qu. AH ut q ad r , ideo RH ad HA ut q ad \sqrt{rq} , hoc est ut RA ad RN. Sit ND ∞ RT, et RH parall. DN. Est autem D focus⁹⁾.

Superficies sphæroidis dimidij NAX ad circulum NX ut spatium AFNK^t ad qu. NR¹⁰⁾.

$$\text{fiatur AFNK^t [ad] AHPVT, [ideft] NR } \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{4}qr}{q-r}} \right) [\text{ad}] \text{RP } \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3}{q-r}} \right) [\text{ita}]$$

+ $\sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$, de l'équation de l'ellipse, obtenue par Descartes (p. 399 du T. VI

de l'édition d'Adam et Tannery), aux formes $y = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3r - qqxx}{qr - rr}}$ et $y =$

$= \sqrt{r'x - \frac{r'}{q}xx}$, dans lesquelles l'équation de l'ellipse NOKMN peut être écrite si l'on prend NX pour axe des x et R ou N pour origine, et si l'on représente par r' le „latus rectum” par rapport à l'axe NX et par q' la longueur de cet axe. On trouve alors :

$$\frac{m}{p} = \frac{qr - rr}{qq} = \frac{q'}{r'},$$

où $q' = \text{NX}$, le petit axe de l'ellipse NAXTN, est égal à \sqrt{qr} , d'après une formule bien connue.

7) D'après la même formule, mentionnée dans la note précédente, on a $\text{MO} = 2\text{RO} = \sqrt{q'r'} =$

$$= \sqrt{\sqrt{qr} \times \frac{qq\sqrt{qr}}{qr - rr}} = \sqrt{\frac{q^3}{q - r}}.$$

8) Dans les trois lignes qui suivent il s'agit de trouver une construction pour RO qui, avec NR, détermine l'ellipse NOXMN dont il s'agit de carrer la partie AFNK^t, afin d'en déduire la quadrature de la surface du sphéroïde en question.

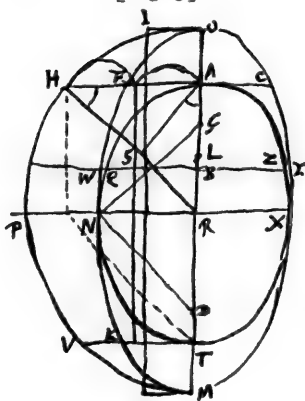
9) Simplification de la construction de $\text{RO} = \text{RH}$. Il suffit donc de déterminer le foyer D de l'ellipse NAXTN et de tirer ensuite les droites RH et AH qui sont parallèles respectivement à DN et à RN.

10) Comparez le premier alinéa du présent paragraphe.

qu. NR $\left(\frac{1}{4}qr\right)$ [ad] aliud spatium $\sqrt{\frac{1}{4}qr} \sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^3}{q-r}}$, h[oc] est $q \sqrt{\frac{\frac{1}{16}qqr}{q-r}}$ ¹⁾.

hoc applica ad OM $\propto \sqrt{\frac{q^3}{q-r}}$ fit $\frac{1}{4}\sqrt{rq} \propto OI \propto \frac{1}{2}RN$.

[Fig. 5].



itaque jam superfic. sphæroidis dimidij NAX ad circulum NX ut spatium AHPVT ad \square IM. fit AS perpend. in RH. Itaque spatium AHPVT æquatur \square sub RP et HP ²⁾ + AS, quarum AS æqualis supra ostensa est ipsi RN ³⁾. Ergo dicta superf. ad dictum circulum ut \square sub PR et HP + NR ad \square IM, hoc est \square sub RO, five RP, et RN. Unde abjecta communi altitudine PR, erit dicta superficiei ad circulum ratio ea quæ HP + NR ad NR. Et duplicatis antecedentibus erit tota sphæroidis superf. ad circulum NX ut HPV + NX ad NR.

Ergo constructio est hæc [Fig. 6]. Sphæroidis oblongi axis est AT. sectio per axem Ellipsis ANT_X, minor axis NX. ND \propto RT five D est focus Ellipseos.

¹⁾ On a donc surf. NAX : cercle NX = esp. AHPVT : $q \sqrt{\frac{\frac{1}{16}qqr}{q-r}}$. Or, écrivant le dernier terme

sous la forme $\sqrt{\frac{q^3}{q-r}} \times \frac{1}{4}\sqrt{rq}$, on aperçoit que ce terme peut être représenté par un

rectangle dont les côtés sont égaux à MO et $\frac{1}{2}NR$, c'est-à-dire par le rectangle IM.

²⁾ Il s'agit de l'arc HP.

³⁾ On rencontre, en effet, dans un coin de la feuille dont nous empruntons cette partie du texte le petit calcul qui suit:

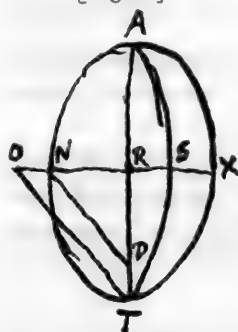
$$\text{„}q.mRH\left(\frac{\frac{1}{4}q^3}{q-r}\right) [\text{ad}] q.AH\left(\frac{\frac{1}{4}qqr}{q-r}\right) [\text{ut}] q.RA\left(\frac{\frac{1}{4}qq}{4}\right) [\text{ad} q.AS];$$

$$AS \sqrt{\frac{\frac{1}{4}rq}{4}} \text{”}$$

⁴⁾ Cette TO remplace la ligne RH de la Fig. 5 à laquelle elle est égale; voir les lignes ponctuées de cette dernière figure.

⁵⁾ C'est sous cette dernière forme que Huygens a donné sa quadrature de la surface du sphéroïde allongé à la p. 39 du Manuscrit N^o. 13, sur lequel on peut consulter la note 5 de la p. 235, et de même dans l'„Horologium oscillatorium” sous l'en-tête „Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire” (p. 74 de l'édition originale).

[Fig. 6.]



TO parallela DN ⁴⁾. TSA est arcus circuli descriptus centro O radio OT. Sicut TSA + NX ad RX, ita superficies sphæroidis NAXT ad circulum NX.

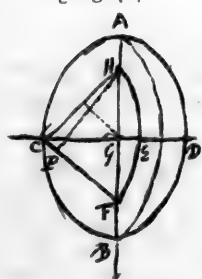
Vel, sit D focus. superque AT arcus AST semidiametro tertia proport.ⁱ duabus RD, RT.

Vel potius, sit TO tertia prop. duabus RD, RT.

Circulus cujus semidiam. media est proport. inter RN et lineam æqualem AST + NX, æquatur superf.^{ei} sphæroidis ⁵⁾.

Sphæroidis sectio per axem est ellipsis [NAXT] ⁶⁾ ejusmodi ut latus transv. [AT] sit sesquitertium lateris recti. Dico superficiem conoidis ad circulum per centrum cujus diam. [NX] esse ut triens peripheriæ circuli una cum sua subtensa ad ejusdem subtensæ semissim ⁷⁾.

[Fig. 7].



H ⁸⁾, F sunt foci. five CH ∞ GA. FEH circumf. centro C. Semisuperf. sphæroidis ad maximum circulum CD ut sector CFEH cum $\triangle CFH$ ad $\triangle CFH$ ⁹⁾. vel ut arcus HEF cum perpendiculari HP ad HP.

Ergo si axis sphæroidis oblongi ad diametrum eam habeat rat.^m quam radius circuli ad perpend. quæ ex centro in latus cadit alicujus polygoni ordinati circulo inscripti, Erit dimidia sphæroidis superf. ad maximum in eo circulum sicut circulus una cum illo polygono inscripto ad ipsum polygonum.

⁶⁾ Afin de ne pas multiplier inutilement le nombre des figures nous avons adapté les notations qui suivent à celles de la Fig. 6.

⁷⁾ Dans ce cas, où $q = \frac{4}{3}r$, l'angle DNR égale $\frac{1}{6}\pi$. Or, si cet angle est représenté par α , on a dans le cas général (d'après le premier alinéa de cette page):

$$\text{surf. sphéroïde : cercle NX} = \left(\sqrt{\frac{q^3}{q-r}} \alpha + \sqrt{qr} \right) : \frac{1}{2} \sqrt{qr},$$

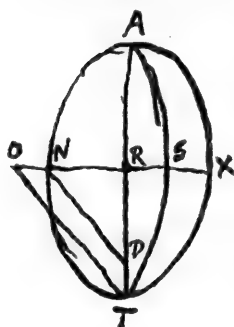
et cette proportion se réduit au cas particulier en question à celle-ci:

$$\text{surf. sphéroïde : cercle NX} = \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) : \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

⁸⁾ Les cinq alinéa's qui suivent ont été empruntés à une autre feuille détachée; comparez la note 2 de la p. 314.

⁹⁾ Ce résultat fut communiqué à de Sluse dans la lettre de Huygens du 26 février 1658 (p. 141 du T. II).

[Fig. 6.]



Si [AST] ¹⁾ sextans peripheriæ erit $\frac{1}{2}$ superficies sphæroidis ad circulum maximum [NX], ut circulus cum inscripto sibi hexagono ad ipsum hexagonum. atqui ita porro, si peripheria [AST] metiatur circumferentiam.

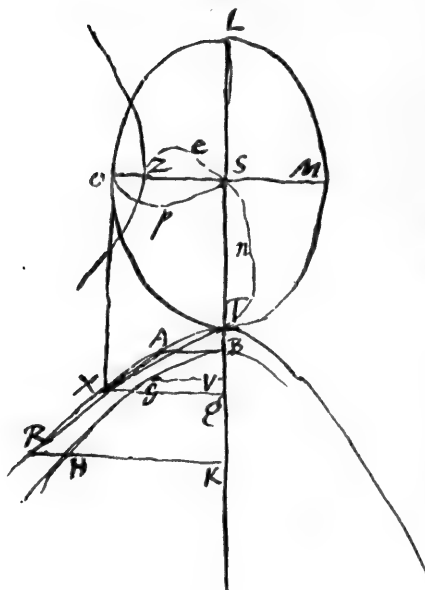
Ut autem fiat commensurabilis debet [TA] ad [NX] eam habere rationem quam radius circuli ad perpendicularem quæ ex centro cadit in latus polygoni alicujus inscripti. quia videlicet [AT] ad [NX] ut [TR] sive [ND] ad [NR], hoc est [OT] ad [OR].

Sive [AST] peripheria non fit commens. circumferentiæ; erit semifuperficies sphæroidis ad circulum [NX] ut sector [OAST] cum \triangle [OAT] ad \triangle [OAT].

[DEUXIÈME PARTIE] ²⁾.

§ 1.

[Fig. 8.]



Dato sphæroide quovis lato seu compresso, potest inveniri conoides hyperbolicum, vel dato hyperbolico potest inveniri sphæroides, et utriusque simul superficiiei inveniri circulus æqualis ³⁾. Huc pertinent quæ hac et proxima pagina continentur ⁴⁾.

SO, ST, OX debent esse proportionales sive $OX \propto \frac{1}{2} l. rect.$ ⁵⁾ TX est hyperbola cujus centr. S vertex T ⁶⁾. Ergo data est. datumque ideo hyperbolæ lat. rectum et diam. conjugata ⁷⁾.

Invenienda autem est alia BG, quæ idem habeat centrum S et eandem diam.^m conjuga-

¹⁾ Voir la note 6 de la p. 323.

²⁾ Cette partie se rapporte à une nouvelle découverte, faite avant le 15 février 1658 (date de la

tam cum hyp. TX. utque, posito V foco hyp. BG, sint proportionales ST, SB, SV.

His enim factis, serviet hyperb. TX, tam superficiei sphæroidis dimid. LOT dimetiendæ quam superficiei conoidis hyperbolici BG⁸⁾.

Oportet autem ad hoc, ducta BA tangente, ducere ex A rectam AR quæ abscindat portionem AXR \propto XAT. quod fieri posse docetur pag. sequenti⁹⁾.

Eo autem facto, erit superf. ex BGH hyperb. ad circulum TL ut spat. RXABK ad $\frac{1}{2}$ qu. ST¹⁰⁾. Superf. autem dimidij sphæroidis TOL ad circulum TL ut spatium TAXOS ad $\frac{1}{2}$ qu. ST¹¹⁾. Ergo utraque simul dictarum superfic.^m ad utrumque simul spatium RXABK, TAXOS, hoc est ad duo trapezia RABK, XTSO, ut circulus TL ad $\frac{1}{2}$ qu. ST. Et permutando. quare duarum superfic.^m ad circ. TL data erit ratio.

lettre à de Sluse citée dans la note qui suit). Elle est empruntée à une feuille détachée de quatre pages. Huygens y établit une relation entre les quadratures des surfaces du sphéroïde aplati et du conoïde hyperbolique. Consultez à ce propos les p. 192—195 de l'Avertissement.

³⁾ Comparez la lettre à de Sluse du 15 février 1658 (p. 134 du T. II) où ce théorème est mentionné par Huygens. On le retrouve de même à la p. 76 de l'édition originale du „Horologium oscillatorium”.

⁴⁾ Nous avons reproduit ces considérations dans ce § 1 de la deuxième Partie.

⁵⁾ D'après la règle mentionnée dans la note 3 de la p. 318; le „latus rectum” dont il est question est celui de l'ellipse TOLM par rapport à l'axe OM.

⁶⁾ Remarquons que cette hyperbole est identique avec l'hyperbole VAR de la Fig. 3 de la p. 318 de la quadrature de laquelle Huygens fait dépendre celle de la surface du sphéroïde en question.

En effet, en posant $x = 0$ dans l'équation de cette dernière hyperbole, on trouve $z = \frac{1}{2}r = VB$, d'où il suit que la ligne VB de la Fig. 3 est identique avec la ligne OX de la présente figure.

⁷⁾ En représentant OM (identique avec BL de la Fig. 3 de la p. 318) par q et par r le „latus rectum” de l'ellipse OLMTO par rapport à l'axe OM, on trouve pour ces données, d'après

les calculs de la p. 318, les expressions $\frac{qq \sqrt{qr}}{rr - qr}$ et $\sqrt{\frac{q^3}{r - q}}$.

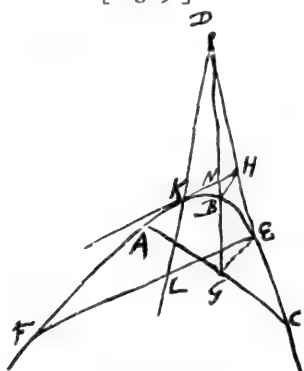
⁸⁾ Comparez le § 2 de la Première Partie (p. 315—316), où l'on doit remarquer que le point R de la Fig. 2 de la p. 316, foyer de l'hyperbole BGA, est identique avec le foyer V de l'hyperbole BGH de la présente figure.

⁹⁾ Consultez le „Problema I”, p. 327 qui suit.

¹⁰⁾ Comparez la proportion au début du § 2 de la Première Partie, p. 315, et remarquez qu'on peut remplacer le deuxième et le quatrième terme respectivement par un cercle quelconque et par la moitié du carré sur son rayon.

¹¹⁾ Comparez le § 3 de la Première Partie, à la p. 318.

[Fig. 9.]



[PROBLEMA I.]

ABC est portio hyperb. centr. D. diam. BG. E est punctum in hyperb. datum. Oportet ducere EF, quæ abscindat portionem EKF \propto ABC.

Constr. ut DB ad BG ita sit DH ad HE. Et sit tangens HK⁶⁾, et EF parall. HK.

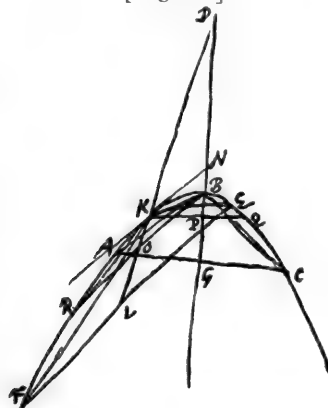
Ducta enim DKL, erit DK ad KL ut DH ad HE, hoc est, ut DB ad BG. Ergo portio FKE \propto ABC ut hic demonstrabitur⁷⁾.

Jungatur KB [Fig. 10]. Et sit BR parall. KN. KQ paral. AC. Ergo quia NK est tangens, erunt proportionales DN, DB, DP, ut in hac pag. supra ostenditur⁸⁾.

Ergo DK ad DO ut DB ad DP. Ergo $\triangle KBO \propto \triangle KBP$ ⁹⁾. Ergo et portio KBQ \propto portioni BKR. Nam hæc consequi. ostendi potest¹⁰⁾.

Sed $\triangle FKE$ ad $\triangle RKB$ ut $\triangle ABC$ ad $\triangle KBQ$ quia DL similiter divisa in K, O, ac DG in B et P¹¹⁾. Ergo $\triangle FKE \propto \triangle ABC$. Ergo et portio FKE \propto portioni ABC¹²⁾.

[Fig. 10.]



$$\frac{2b'}{a'} \sin \theta \int \frac{ka'}{\sqrt{x^2 - a'^2}} dx, \text{ ou bien (en substituant } x = \lambda a'), 2a'b' \sin \theta \int \frac{k}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda.$$

Or, puisque $a'b' \sin \theta$ est invariant pour une hyperbole donnée, il est évident que l'aire du segment d'une telle hyperbole ne dépend que du rapport $k = \frac{KL}{KD}$, et, puisque ce rapport a par construction la même valeur pour les deux segments, il s'ensuit que leurs aires sont égales.

Consultez encore sur cette propriété de l'hyperbole la note 1 de la p. 194 de l'Avertissement.

⁸⁾ Voir le calcul (p. 328—329) à la fin du présent paragraphe.

⁹⁾ Puisque, en conséquence de la proportion précédente, la droite OP qui réunit les sommets de ces triangles est parallèle à leur base commune KB.

¹⁰⁾ Cette démonstration nous manque, mais il est évident que la conclusion est légitime. En effet, les diamètres KO et BP divisent chacun des segments BKR et KBQ en deux parties égales. Or, en ajoutant aux triangles égaux OKB et PKB le segment KB on voit que les parties OKB et PKB sont égales entre elles.

¹¹⁾ Puisqu'on a dans ce cas $\frac{\triangle FKE}{\triangle RKB} = \frac{KL}{KO} \times \frac{LE}{OB} = \frac{KL}{KO} \times \frac{\sqrt{DL^2 - DK^2}}{\sqrt{DO^2 - DK^2}} = \frac{BG}{BP} \times \frac{\sqrt{DG^2 - DB^2}}{\sqrt{DP^2 - DB^2}} = \frac{BG}{BP} \times \frac{GC}{PQ} = \frac{\triangle ABC}{\triangle KBQ}$.

¹²⁾ Ce raisonnement manque de précision, mais probablement Huygens s'est assuré de l'exacti-

[PROBLEMA II.]

[Fig. 11.]

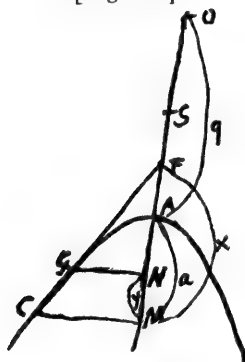


AB est hyperb. D centrum. C punctum datum non extra asymptotos ¹⁾. CB du-cenda tangens.

Confr.° DCA lin. recta. DC, DA, DF propor-tionales. AG tangens, FB parall. AG. CB est tangens quæsitæ.

Quia enim FB ordin. appl. ad AF ²⁾, suntque proportionales DF, DA, DC. Erit CB tangens ³⁾.

[Fig. 12.]



[S centrum; OA $\propto 2AS \propto q$; AM $\propto a$; NM $\propto y$; FM $\propto x$

$q + a$ OM ⁴⁾ $q + a - y$ [ON]

$\frac{a}{aq + aa}$ [ad] $\frac{a - y}{aq + aa - 2ay - qy + yy}$ [ut] xx [ad]

$xx - 2xy + yy$ ⁵⁾

$aqxx - 2aqxy + aaxx - 2aaxy \propto aqxx + aaxx -$

$- 2ayxx - qxxxy$

$- 2aq - 2aa \propto - 2ax - qx$

$\frac{2aq + 2aa}{2a + q} \propto x$

$SM \propto \frac{1}{2}q + a$

$x \propto \frac{2aq + 2aa}{2a + q}$

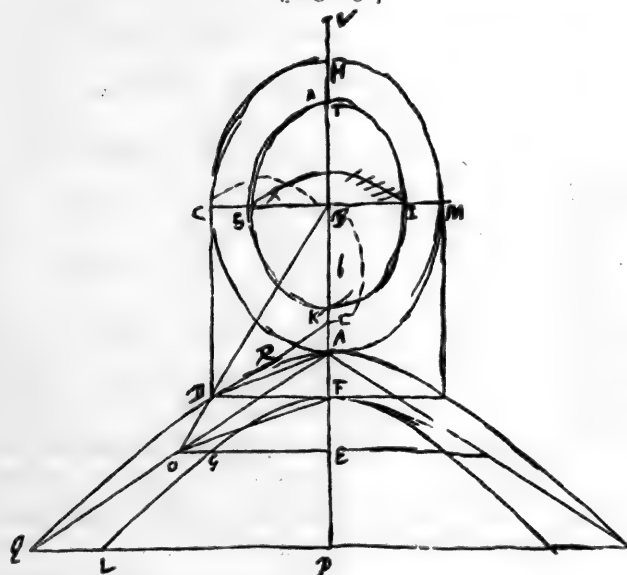
f [ubtr.]

$SF \propto \frac{\frac{1}{2}qq}{2a + q}$

tude de sa conclusion par des considérations plus ou moins explicites sur les parallélogrammes élémentaires qu'on peut circonscrire ou inscrire aux triangles et segments en question. En effet, après avoir divisé DL et DG dans un même nombre de parties égales, on peut remarquer que, pour des divisions correspondantes, les parallélogrammes élémentaires inscrits dans les triangles FKE et ABC sont égaux, puisque les triangles le sont eux-mêmes, de plus ces parallélogrammes ont des rapports égaux (dépendant du nombre ordinal de la division) aux parallélogrammes inscrits dans les segments hyperboliques. On en conclut à l'égalité de ces derniers parallélogrammes, et, par suite, à celle de leurs sommes qui à la limite se confondent avec les segments en question.

$$SM\left(\frac{1}{2}q + a\right)[ad] SA\left(\frac{1}{2}q\right)[ut] SA\left(\frac{1}{2}q\right)[ad] SF\left(\frac{\frac{1}{2}qq}{2a+q}\right)^6)_{\text{bon.}}$$

[Fig. 13.]



§ 27).

Sphæroides compressum.

Axis sphæroidis CM ⁸⁾).

Ut conveniat hyperbola AD Ellipsi AC debent esse prop.^{es} CB, BA, CD five CD

$\propto \frac{1}{2}l.$ rect. ⁹⁾ Ut autem con-

veniat hyperbola AD hyperbolæ FGL, debet sumptis BA, BF, BE propor.^{bus}, esse E focus hyperb. FGL ¹⁰⁾.

B centr. FD vel CB $\propto \frac{1}{2}l.$ rect. ¹¹⁾

¹⁾ Les trois mots qui précèdent ont été ajoutés après coup à une date inconnue.

²⁾ Puisque BF est parallèle au diamètre qui est conjugué à DF.

³⁾ Voir le calcul qui suit où Huygens démontre l'existence de la proportion DF : DA = DA : DC dans le cas où BC est la tangente à l'hyperbole au point B. La proportion avait d'ailleurs été indiquée par Apollonius; voir la note 4 de la p. 341, qui suit.

⁴⁾ Pour déterminer la tangente au point C de l'hyperbole CGA Huygens se propose d'appliquer la méthode de Fermat exposée à la p. 20 de notre T. XI.

⁵⁾ On a $CM^2 : GN^2 = FM^2 : FN^2$, mais d'après la „Prop. XXI” du „Libr. I” des „Conicorum libri quattuor” d'Apollonius, citée dans la note 12, p. 300 de notre T. XI, on peut remplacer le premier de ces rapports par celui de $OM \times AM$ à $ON \times AN$.

⁶⁾ Vérification de la proportion employée dans les démonstrations qui accompagnent les „Problemata” I et II qui précèdent.

⁷⁾ Dans ce paragraphe Huygens s'occupe du cas spécial où les points A et X de la Fig. 8 (p. 326) coïncident. En effet, ces points sont remplacés dans la présente figure par le point D et de même les points Q et B par le point F. En ce cas la relation exposée au § 1 (p. 324—325) se simplifie notablement. Ajoutons que le résultat obtenu dans ce paragraphe est mentionné aux p. 76—77 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium”.

⁸⁾ On remarquera le double emploi de la lettre C dans la figure. Nous désignerons par C le point sur l'axe CBM et par C' celui sur l'axe BA.

⁹⁾ Comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 324. CD est donc égal à la moitié du „latus rectum” de l'ellipse ACHM par rapport à l'axe CM.

¹⁰⁾ Consultez le dernier alinéa de la p. 324.

¹¹⁾ La ligne FD de la présente figure correspond à la ligne BX de la Fig. 2 de la p. 316. Or, on

BA [ad] BF h[oc] e[ft] BF ad BE¹⁾ ut BD ad BO²⁾. Ergo OGE recta linea³⁾.
DA paral. OF⁴⁾.

Spatium QDFP \propto QODRAP quia QDO \propto ODRA \propto DRAF⁵⁾. Spatium

retilin. QODFP $\propto \triangle QAP$
quia $\triangle ODA \propto \triangle DAF$ ⁶⁾.

Sicut spatium QDFP (\propto
 \propto QODRAP) ad $\frac{1}{2}$ qu.

BA $\propto \frac{1}{2}bb$ ita superf. LGF
conoidis ad circulum à
rad. b ⁷⁾.

Sicut spat. DRABC ad
 $\frac{1}{2}$ qu. BA $\propto \frac{1}{2}bb$ ita $\frac{1}{2}$
superf. sphæroidis HCAM
cujus axis CM (vel ita superf.
ficies tota sphæroidis KSTI
funtis BK et BS potentia
subduplis ad BA et BC) ad
circ. à rad. b ⁸⁾.

Ergo sicut totum spat.

QODCBAP ad superf. conoidis FL et sphæroidis KS ita $\frac{1}{2}bb$ ad circ. à rad. b .

Et permutando spat. QODCBAP ad $\frac{1}{2}bb$ ut superf. conoidis FL + superf. sphæ-
roid. KS ad circul. à rad. b .

trouve la longueur de BX en posant $x = 0$ dans l'expression $\frac{1}{2}r + \frac{rx}{q}$ pour CD (p. 315),
où r représente le „latus rectum” de l'hyperbole AGB qui correspond à l'hyperbole LGF de
la présente figure.

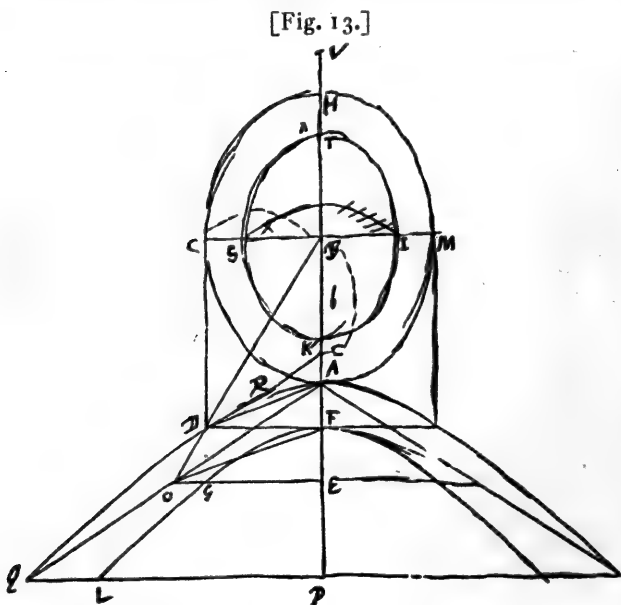
¹⁾ Voir la proportion qui précède et remarquons que le point E est donc un point de l'axe VP, qui
est déterminé par cette proportion. On ne sait donc pas d'avance que la droite OE est paral-
lèle à DF, c'est-à-dire perpendiculaire à AP; mais Huygens va démontrer qu'il en est ainsi.

²⁾ AQ est supposée parallèle à la tangente DC' au point D. On a donc, d'après la proportion
déduite à la fin du § 1, p. 328—329, BA : BF = BC' : BA = BD : BO. De cette manière
l'égalité des demi-segments ODRAO et FDAF est assurée (comparez la note 7 de la p. 326)
et cette égalité suffit comme on le verra bientôt pour pouvoir remplacer la somme des
figures QDFPQ et CDRABC par celle de deux figures rectilignes.

³⁾ EG qui correspond à la ligne VG de la Fig. 8 (p. 326), était primitivement la perpendicu-
laire élevée sur l'axe de l'hyperbole FGL au foyer E de cette courbe.

⁴⁾ Puisqu'on a BA : BF = BD : BO.

⁵⁾ Comparez la note 2.



$$CB \propto x; BA \propto b$$

$$x [\text{ad}] b (\text{rat. } BA : BF)^9) [\text{ut}] BF \left(\frac{bb}{x} \right)^{10}) [\text{ad}] BE \left(\frac{b^3}{xx} \right)^{11})$$

$$BF \left(\frac{bb}{x} \right) [\text{ad}] FD (x) [\text{ut}] BE \left(\frac{b^3}{xx} \right) [\text{ad}] EO (b). \text{ Ergo } PQ \propto 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} BE \left(\frac{b^3}{xx} \right) \\ BA (b) \end{array} \right\} \text{f.}$$

$$[EA] \left(\frac{b^3}{xx} - b \right)$$

$$AP \left(\frac{2b^3}{xx} - 2b \right)$$

$$b \propto EO \propto \frac{1}{2} QP$$

$$\frac{BF \frac{bb}{x}}{FD x}$$

$$\left(\frac{2b^4}{xx} - 2bb \right) \triangle QAP \propto \text{spat. } QODFP$$

$$(bb) \square FC$$

$$(bb) \square FC$$

$$\frac{2b^4}{xx} - bb \propto \text{spat. } QODCBAP$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b^5}{x^4} q.BE \\ \frac{b^4}{xx} q.BF \end{array} \right\} \text{f.}$$

$$\text{l. tr. } [\text{ad}] \text{l. r. } [\text{id est}] \frac{bb}{x} [\text{ad}] x [\text{ut}] \square VEF \left(\frac{b^6}{x^4} - \frac{b^4}{xx} \right)$$

$$[\text{ad}] q. GE \left(\frac{b^4}{xx} - bb \propto xx \right)^{13})$$

⁶⁾ À cause du parallélisme des lignes OF et DA.

⁷⁾ Comparez le début du dernier alinéa de la p. 325.

⁸⁾ Comparez le § 3 de la Première Partie à la quatrième ligne d'en bas de la p. 318.

⁹⁾ $BA : BF = b : \frac{b^2}{x}$ (voir la note suivante) $= x . b$.

¹⁰⁾ Puisque $BF = CD$ est égal à la moitié du „latus rectum” de l'ellipse ACHM par rapport à l'axe CM; voir la note 9 de la p. 329.

¹¹⁾ Voir la première ligne de la p. 330.

¹²⁾ Huygens va rechercher sous quelle condition se réalise le cas spécial qui l'occupe dans le présent paragraphe. Quel doit être alors le rapport des axes $CB = x$ et $AB = b$ de l'ellipse ACHMA?

¹³⁾ Voir la „Prop. XXI” du „Libr. I” des „Conicorum libri quattuor” d'Apollonius, que nous venons de mentionner dans la note 3 de la p. 326. V est l'autre sommet de l'hyperbole

$$x^4 \propto -bbxx + b^4; xx \propto \sqrt{\frac{5}{4}b^4 - \frac{1}{2}bb}; x \propto \sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}b^4 - \frac{1}{2}bb}} \propto \sqrt{b\sqrt{\frac{5}{4}bb - \frac{1}{2}bb}}$$

$$AB(b) [ad] BC(x) [ut] BC(x) [ad] \frac{xx}{b} [\infty] \frac{1}{2} \text{ l.r. Ellipsis AC} \propto$$

$$\propto \sqrt{\frac{5}{4}bb - \frac{1}{2}b}$$

[Fig. 14.]



BA $\propto b \propto \frac{1}{2}$ lat. tr. Ellipsis AC. BA divisa in N [Fig. 14]

secundum extremam et mediam rationem. major pars NA est $\frac{1}{2}$

lat. rectum Ellipsis AC.

Hyperbolæ AQ lat. rect. æquale transv.^{o 1)} nimirum b^2).

$$\frac{1}{2} \text{ qu. BA } \left(\frac{1}{2} bb \right) [ad] \text{ spat. QODCBAP } \left(\frac{2b^4}{xx} - bb \right)$$

[ut] circ. à rad. b [ad] utramque superf.³⁾

$$xx [ad] 4bb - 2xx [ut] \text{ „ } [ad] \text{ „}$$

$$b \sqrt{\frac{5}{4}bb - \frac{1}{2}bb} [ad] 5bb - 2b \sqrt{\frac{5}{4}bb} [ut] \text{ „ } [ad] \text{ „}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{5} - \frac{1}{2} [ad] 5 - \sqrt{5} [ut] bb [ad] 2\sqrt{5}bb \propto 2b\sqrt{5bb}$$

Ergo $\sqrt{2b\sqrt{5bb}} \propto \text{rad. circ. duabus superf.}^{\text{bus}} \text{ æqualis. Hæc melius in adjuncta pagina } ^4).$

LGF. On a donc $VE \times EF = (BE + BF)(BE - BF) = BE^2 - BF^2$. De plus, GE, l'ordonnée de l'hyperbole FGL, qui correspond au foyer E, est la moitié du „latus rectum” de cette hyperbole. On a donc $GE = DF = CB = x$, d'après la note 11 de la p. 329.

¹⁾ On a d'après la Prop. XXI d'Apollonius, citée dans la note précédente:

$$\frac{\text{l. tr. hyp. QDA}}{\text{l. r. hyp. QDA}} = \frac{HA \times AF}{DF^2} = \frac{BF^2 - BA^2}{DF^2} = \frac{\frac{b^4}{x^2} - b^2}{x^2} = \frac{GE^2}{BC^2} = 1.$$

BE [Fig. 13] secta est in A secundum extremam et mediam⁵⁾. BA ad AE ut BA ad $\frac{1}{2}$ l. rect. ellipsis AC⁶⁾. Ergo $AP \propto$ l. r. Ellipsis AC $\propto \frac{2xx}{b}$ quæ ante inventa fuit $\frac{2b^3}{xx} - 2b$ ⁷⁾.

$$\begin{array}{r} \frac{2xx}{b} AP \\ b EO \\ \hline \frac{2xx}{bb} \triangle QAP \\ \square FC \end{array}$$

$\frac{1}{2}$ qu. BA $\left(\frac{1}{2}bb\right)$ [ad] spat. QODCBAP $(2xx + bb)$ [ut] bb [ad] $4xx + 2bb$ ⁸⁾

$\frac{1}{2}bb$ [ad] $b\sqrt{5bb}$ [ut] bb [ad] $2b\sqrt{5bb}$

Ergo $\sqrt{4xx + 2bb}$ h. est $\sqrt{\text{qu. CM} + \frac{1}{2} \text{qu. HA}}$ æquatur radio circuli qui æqualis est superficiebus sphæroidis STK et conoidis hyp.ⁱ FLP.

Vel sumatur potius $\sqrt{\text{qu. TK} + 2 \text{qu. SI}}$ ⁹⁾.

Constr.^o 10) Sit [Fig. 15] datum sphæroides cujus centrum O, axis SI, diameter TK.

Sumatur BC potentia dupla ad OS. Et BA potentia dupla

²⁾ Lisez: $2b$.

³⁾ Voir le dernier alinéa de la p. 330.

⁴⁾ Voir (p. 333) la dernière partie du présent paragraphe.

⁵⁾ Puisqu'on a $BE \left(\frac{b^3}{x^2}\right) : BA(b) = b^2 : x^2 = 1 : \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)$.

⁶⁾ On trouve, lorsqu'on applique la propriété principale de la division en extrême et moyenne raison, $BA : AE = BE \left(\frac{b^3}{x^2}\right) : BA(b) = BA(b) : \frac{x^2}{b}$, où $\frac{x^2}{b}$ représente la moitié du „latus rectum” de ellipse ACHM par rapport à l'axe AH.

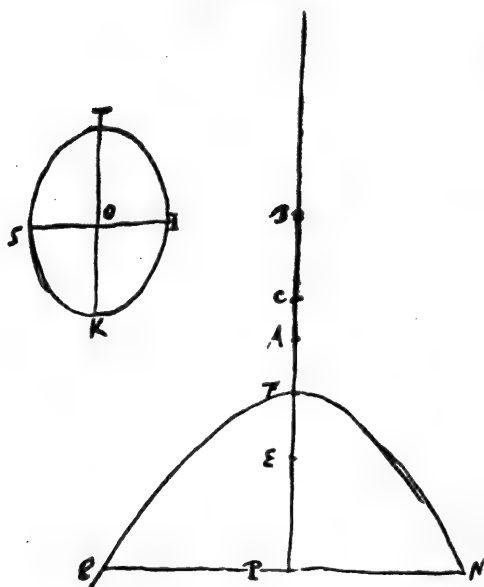
⁷⁾ Voir la p. 331, l. 7. C'est dans l'emploi de l'expression plus simple $\frac{2xx}{b}$ que consiste l'amélioration à la quelle Huygens vient de faire allusion.

⁸⁾ Comparez les proportions en bas de la page précédente.

⁹⁾ Puisque, par construction, $HA = TK$. $\sqrt{2}$ et $CM = SI \cdot 2$.

¹⁰⁾ On retrouve cette construction au lieu cité dans la note 7 de la p. 329. Elle n'est valable, comme Huygens le fait observer dans l'„Horologium oscillatorium”, que dans le cas où OK et OS² : OK [Fig. 15] sont entre elles comme les segments d'une droite divisé en extrême et moyenne raison.

[Fig. 15.]



rect. ellipsis SK ad suum lat. transv. TK⁴⁾. hoc est quam major pars ad totam lineam divisam *ἄκρον καὶ μέσον λόγον*⁵⁾.

ipfius OK. Et sint quatuor hæc continue proportionales BC, BA, BF, BE¹⁾. et ponatur EP \propto EA. Et intelligatur conoides hyperbolicum FQN, cujus axis FP axi adjecta fit FB five $\frac{1}{2}$

l.tr.; $\frac{1}{2}$ latus vero rectum BC²⁾.

Dico hujus conoidis superficiei una cum superficie sphæroidis TK æquare circulum cujus semidiam. possit quadr. TK cum duplo qu.° SI.

E est umbilicus hyperb. QFN³⁾.

Nota quod etiam BC ad BF hoc est lat. rectum hyperb. QF ad latus transversum eam habet rationem quam lat.

[TROISIÈME PARTIE] 6).

3 Feb. 1658.

Sphærae superficiei Archimedes circulum æqualem dedit⁷⁾, nos superficiei conoidis parabolici⁸⁾.

¹⁾ Les points B, A, F, E, P correspondent aux points homonymes de la Fig. 13 (p. 330), tandis que BC représente la même longueur dans les deux figures. Or, on a, d'après ce qui précède, $BC(x) : BA(b) = BA(b) : BF\left(\frac{b^2}{x}\right) = BF\left(\frac{b^2}{x}\right) : BE\left(\frac{b^3}{x^2}\right)$.

²⁾ Comparez la note 11 de la p. 329.

³⁾ Voir le dernier alinéa de la p. 329.

⁴⁾ Puisqu'on a $BC(x) : BF\left(\frac{b^2}{x}\right) = \frac{x^2}{b}\sqrt{2} : TK(b\sqrt{2})$, où $\frac{x^2}{b}\sqrt{2}$ représente le „latus rectum” de l'ellipse STIK par rapport à l'axe TK.

⁵⁾ C'est-à-dire „en extrême et moyenne raison”, puisqu'on a, en effet, $x : \frac{b^2}{x} = x^2 : b^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) : 1$; voir la note 5 de la p. 333.

Si vero detur circulus æqualis superficiei sphæroidis cujusvis data erit quadratura circuli, et hyperbolæ quadratura. Nam si sphæroidis oblongi superficiei circulus æqualis detur, data erit circuli quadratura, et contra ⁹⁾. Si autem superficiei conoidis lati circulus æqualis detur, data erit quadratura hyperbolæ, et contra ¹⁰⁾. Data autem hyperbolæ quadratura, datur longitudo lineæ parabolicæ, et contra ¹¹⁾. Ergo data hic longitudo lineæ parabolicæ datur etiam circulus æqualis superficiei sphæroidis lati. Rursus, dato circulo qui æqualis sit superficiei conoidis hyperbolici, datur quadratura hyperbolæ ¹²⁾, ergo et longitudo parabolicæ lineæ; et circulus æqualis superficiei sphæroidis lati. Et contra ex superficie sphæroidis lati innotescit superficies conoidis hyperbolici. Data autem unius sphæroidis conoidisve hyperbolici superficie datur infinitorum aliorum dissimilium; quoniam &c.

dato sphæroïde lato potest conoides hyperbolicum inveniri, vel dato conoïde hyperbolico potest sphæroid. latum adinveniri et utriusque simul superficiei circulus æqualis effici exactè ¹³⁾.

Sphæroidis omnis oblongi superficies æqualis est circulo, cujus semid. media proportionalis inter semidiametrum sphæroidis (hoc est dimidium ejus quæ per centrum ducitur axi ad angulos rectos) et lineam æqualem utrisque, diametro sphæroidis et arcui peripheriæ descriptæ super axe sphæroidis, cujus peripheriæ diameter sit ad dictum axem ut axis ad distantiam umbilicorum in sectione per axem ¹⁴⁾.

Sphæroidis omnis lati superficies æqualis est circulo, cujus semidiam. est media proportionalis inter diametrum sphæroidis et lineam parabolicæ portionis rectam cujus basis sit axis sphæroidis, altitudo verò æqualis quartæ parti distantie umbilicorum in sectione per axem ¹⁵⁾.

⁶⁾ Dans cette Partie, empruntée à une feuille détachée, Huygens résume les résultats obtenus dans les Parties qui précèdent.

⁷⁾ Voir l'ouvrage „De Sphæra et cylindro”, p. 1—54 de l'édition de Bâle; Heiberg, I, p. 1—255.

⁸⁾ Voir le § 1 de la Première Partie, p. 314.

⁹⁾ Voir le § 4, p. 320—324.

¹⁰⁾ Voir le § 3, p. 317—319.

¹¹⁾ Comparez les „Theoremata VIII et IX”, pp. 249 et 253.

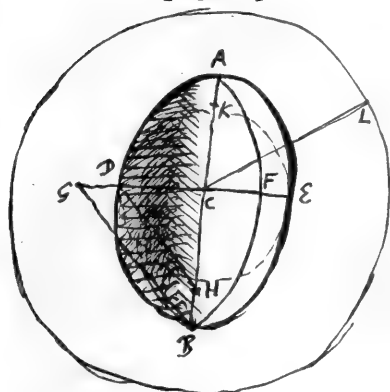
¹²⁾ Voir le § 2, p. 315—316.

¹³⁾ Comparez la Deuxième Partie, p. 324—334.

¹⁴⁾ Comparez le troisième et le quatrième alinéa de la p. 323 et la Fig. 16 qui suit.

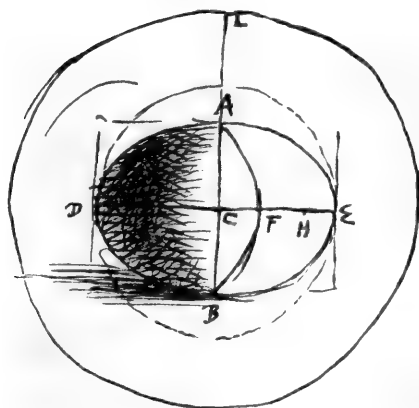
¹⁵⁾ Comparez la „Constructio” de la p. 319, et la Fig. 17 qui suit.

[Fig. 16.]



DH \propto CB. H umbilicus. BG parall. HD.
CL media inter CD et DE + AFB.
superfic. sphæroidis ad superfic. sphærae inscr.
ut DE + AFB ad 2DE.

[Fig. 17.]



H umbilicus. $CF = \frac{1}{2}CH$. AFB parab.
CL media inter DE et AFB.
superficies sphæroidis ad superf. sphærae
circumscr. ut AFB ad DE.
ad superf. cylindri circumscr. ut AFB
ad AB.

3 Feb. 1658.

¹⁾ En 1659 Huygens s'est occupé de nouveau de la quadrature des surfaces des sphéroïdes et des conoïdes hyperboliques. Évidemment c'était son intention de procéder à la rédaction définitive d'un traité qui devait contenir, avec la rectification de la parabole, ses découvertes sur ces quadratures, et peut-être encore d'autres inventions géométriques, p.e. la quadrature des courbes paraboloides et hyperboloïdes (voir la Pièce VIII, p. 273—293). Ainsi la Quatrième et dernière Partie de la présente Pièce, qui occupe les p. 103—113 du Manuscrit A, nous donne en premier lieu un projet de préface, d'où il résulte que Huygens s'était résolu enfin à s'émanciper en partie de la méthode de démonstration archimédienne. Ensuite on y trouve dans une forme très achevée la discussion des coniques auxiliaires dont il s'était servi dans la Première Partie (p. 314—324) afin d'obtenir la réduction de la quadrature des surfaces prémentionnées à celle de l'hyperbole ou du cercle; lesquelles courbes il se proposa, d'après une annotation qu'on trouve dans le projet de préface, de désigner comme courbes adjointes („adjuncta") aux courbes méridiennes des surfaces à considérer. Sans doute Huygens a voulu faire suivre après les „Theoremata I—III" (que nous reproduisons aux

[QUATRIÈME PARTIE] ¹⁾.

Aliqui per indivisibilia. Sed falluntur si pro demonstratione ea venditent ²⁾. Cæterum ad fidem faciendam apud peritos haud multum interest, an demonstratio absoluta tradatur an fundamentum ejus demonstrationis, quo conspecto non dubitent demonstrationem perfectam dari posse. fateor tamen etiam in hac rite instituenda ut clara concinna omniumque aptissima sit, peritiam et ingenium elucere, uti in Archimedis omnibus operibus. verum et prior et longe præcipua est inveniendi ratio ipsa, hujus cognitio potissimè delectat atque a doctis expetitur, quamobrem magis etiam hæc methodus sequenda videtur qua brevius clariusque comprehendî et ob oculos poni potest. Tum verò et nostro labori parcimus in scribendo, et aliorum in legendo, quibus vacare tandem amplius non poterit, ut ingentem multitudinem Geometricorum inventorum quæ augetur in dies doctoque hoc sæculo in immensum porro exitura videtur, evolvant, si quidem prolixam illam ac perfectam veterum methodum scriptores usurpant.

In præcedentibus tamen hanc retinuimus jam olim ita perscriptis ³⁾ ut argumento ac quodammodo exemplo sint quo appareat etiam reliqua ad hunc modum perfici potuisse ⁴⁾.

Egregia est illa et subtiliter reperta veterum ratio demonstr. per inscripta et circumscripta ad absurdum deductio et certitudine mirabili. Et in illo Geometriæ exortu cum novum etiamnum et pene incredibile videretur res tantas tanque reconditas ex parvis initijs confirmari, omnino necessaria.

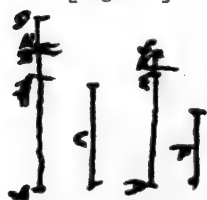
p. 338—346) les théorèmes principaux sur les quadratures de ces surfaces, avec leurs démonstrations, mais ce dessein n'a pas été exécuté, et lors de la publication, en 1673, de son „Horologium oscillatorium”, il y a renoncé définitivement en se résolvant à donner ces théorèmes sans aucune démonstration.

²⁾ On peut consulter quant à l'opinion de Huygens sur la méthode des indivisibles de Cavalleri les pp. 132—134 et 561 du T. I, la p. 158 du T. XI et la p. 753 du T. XIII.

³⁾ Voir les p. 237—270 de la Pièce N°. VI.

⁴⁾ Voir pour la traduction de ce passage intéressant la note 14 de la p. 191.

[Fig. 18.]

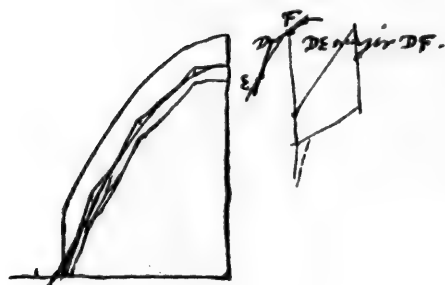


dico ¹⁾ esse AB ad C ut DE ad F. Sit enim primò AB ad C minor quam DE ad F. Et sit si potest GA ad C ut ED ad F et circumscribatur HA simulque DK.

Quia ergo ponitur GA ad C ut ED ad F erit minor ratio HA ad C quam ED ad F. Sed ut HA ad C ita KD ad F. Ergo minor quoque ratio KD ad F quam ED ad F. Ergo KD minor quam ED quod absurdum.

Sit jam si potest ratio BA ad C major quam ED ad F, eademque quæ SD ad F, et circumscribatur KD, simulque HA. Ergo KD ad F habet minorem quam BA ad C. Sed KD ad F ut HA ad C. Ergo et HA ad C minorem quam BA ad C. Ergo HA minor quam BA quod absurdum.

[Fig. 19.]



in omnibus fieri posse. in parabola ex. gr. sic. ²⁾.

fig. adjuncta vocetur ³⁾.

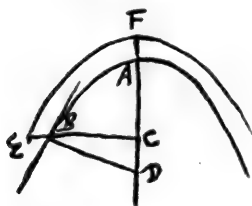
describatur simul ordinatè circumscripta ⁴⁾ et ex ea adjuncta.

[THEOREMA I.]

Si a quovis in parabola puncto [Fig. 20] recta linea ad axem parabolæ terminata ducatur, perpendic. ei quæ in adsumto puncto parabolam contingit perque idem punctum quædam ordinatim ad axem applicetur quæ sit æqualis lineæ prius ductæ. Terminus illius ordinatim applicatæ parabolam aliam continget positionè datam ⁵⁾.

¹⁾ Dans ce qui suit Huygens donne, pour ainsi dire, une description schématique de la méthode de démonstration archimédienne. En effet, AB et DE représentent des grandeurs quelconques (longueurs, aires, volumes) auxquelles on peut circonscrire d'autres grandeurs comme AH ou DK qui ne les surpassent que d'une quantité aussi petite qu'on le veut. De plus, Huygens suppose que les rapports de ces grandeurs circonscrites aux quantités C et F soient de telle nature qu'à chaque valeur $AH > AB$ correspond une valeur $DK > DE$ de

[Fig. 20.]

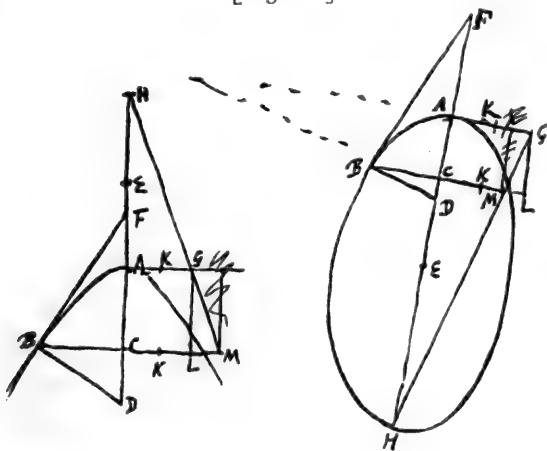


Sit parabola AB, cujus axis AD, vertex A, et sumto in ea puncto B, ducatur BD quæ parabolæ vel parabolam in puncto B contingenti sit ad angulos rectos, sitque CBE ordinatim ad axem AD applicata et æqualis ipsi BD. dico hujus terminum E contingere parabolam aliam FE, cujus quidem latus rectum idem sit quod parabolæ AB, axisque FD cum axe AD conveniat, vertex vero F altior sit vertice A intervallo AF quod æquet quartam partem lateris recti.

Constat enim CD æqualem esse semissi lateris recti ⁶⁾. Quia ergo quadr. EC five BD æquale est quadratis duobus BC et CD quorum BC qu. æquale est \square a latere recto et AC comprehenso, quadr. vero CD æquale quartæ parti quadrati à latere recto. hoc est \square ex AF et latere recto. Erit igitur qu. EC æquale rectangulo quod tota CF et latere recto parabolæ FE continetur. quare punctum E in parabola FE esse liquet.

[THEOREMA II.]

[Fig. 21.]



Si à quovis puncto in hyperbola aut ellipfi duæ rectæ ad axem sectionis ducantur, quorum altera sit applicata ordinatim, altera perpend. ei quæ in eodem puncto sectionem contingit, Erit pars axis ab utraque intercepta in hyperbola quidem æqualis hisce utrisque, dimidio lateri recto, et ei lineæ quæ sit ad portionem axis inter verticem et ordina-

sorte qu'on a $AH : C = DK : F$. Partant de ces suppositions Huygens démontre qu'on aura $AB : C = DE : F$.

Voir p. e. pour une application de cette méthode la démonstration du „Theorema VIII” p. 249—252.

²⁾ Voir la figure à côté et comparez le § 1 de la Première Partie, p. 314.

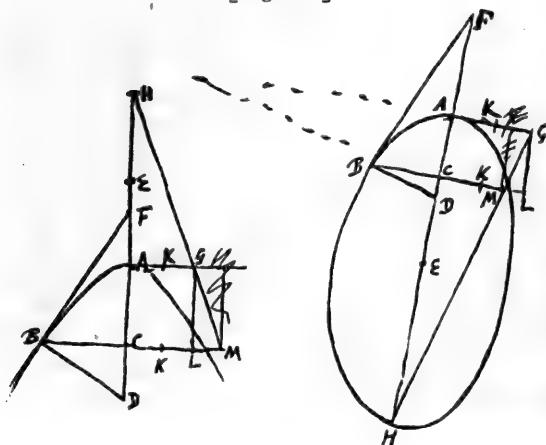
³⁾ Comparez la note 1 de la p. 336.

⁴⁾ Voir la „Definitio I”, p. 237.

⁵⁾ Comparez le § 1 à la p. 314.

⁶⁾ Voir p. e. la p. 218 de l'édition de 1649 (p. 246 des éditions de 1659 et 1683) de la „Geometria”. Comparez la note 8 de la p. 315.

[Fig. 21.]



tim applicatam interceptam, ficut latus rectum sectionis ad latus transversum. In ellipsi vero æqualis ei quo prior harum alterum excedit¹⁾.

Sit hyperbola vel ellipsis AB. cujus axis AC, diameter transversa AH. centrum sectionis E. Et à puncto B in sectione sumpto ducatur BC ad axem ordin. appl.^a, BD vero perpend. tangenti sectionem in puncto B, quæ sit BF.

Sit porro latus rectum sectionis AG insitens axi ad angulos rectos, et ducatur HGM, occurrens ordinatim applicatæ BC in M. eidemque occurrat GL parallela AC. Et secetur CL bifariam in K. Est igitur LK dimidio lateri recto æqualis, LM vero ei lineæ quæ est ad LG sive portionem axis AC sicut latus rectum GA ad latus transversum AH, et MK in hyperbola utrique illarum æqualis: in ellipsi vero ei quo KL ipsam LM superat. Dico itaque utrobique KM esse æqualem parti axis CD a duabus BC, BD interceptæ²⁾.

Quia enim $\square AC, CM$ æquale est quadr.° CB. . . . Conic. ³⁾ itemque $\square DCF$ æquale eidem qu.° CB, propter angulos rectos DBF, DCB. Erit ergo $\square AC, CM$ æqu. $\square FCD$, ideoque AC ad CF ut CD ad CM. Quia autem BF sectionem in B contingit, erunt per. . . Con. ⁴⁾ proportionales EF, EA, EC. ideoque ut EA ad EC, hoc est HE ad EC, ita FA ad AC; et componendo ut HC ad EC ita FC ad AC. Sed ut FC ad AC ita erit CM ad CD. Ergo CM ad CD. ut HC ad EC sed ut HC ad EC ita quoque est CM ad KM. quoniam CM similiter divisa est in L atque HC in A, sectaque bifariam est LC in K et AH in E. Itaque est sicut CM ad CD ita CM ad KM; Quare CD æqualis KM. quod erat demonstr.

¹⁾ Comparez les notes 8 des pp. 315 et 317.

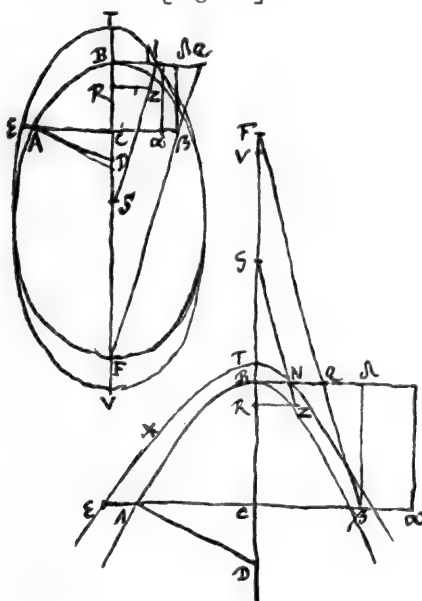
²⁾ Comparez les formules auxquelles se rapportent les notes citées dans la note précédente. Évidemment la construction du segment KM correspond à l'emploi de ces formules. Il s'agit ensuite de donner une démonstration en règle qu'on a, en effet, $KM = CD$.

³⁾ Voir la „Prop. XXI” du „Lib. I” des „Con.” d'Apollonius, que nous avons reproduite dans la note 12 de la p. 300 de notre T. XI. On a, d'après cette proposition, $BC^2 : CA \times CH = AG : AH$; par suite $BC^2 = AC \times \frac{CH}{AH} AG = AC \times CM$.

[THEOREMA III.]

Iisdem positis si ea quæ ordinatim applicata est extra sectionem producaturs donec æqualis fiat illi quæ ducta est contingenti perpendicularis, productæ terminus aliam coni sectionem contingeret positione datam in hyperbola hyperbolen⁵⁾ in ellipsi vero ellipsin aut hyperbolen, prout ad maiorem aut minorem ellipsis axem ordinatim applicata fuerit⁶⁾.

[Fig. 22.]



Sit sectio hyperbolæ aut ellipsis AB, cujus axis transvers. BF (sit autem primum BF axis major ellipseos) latus rectum BQ ad axem perpendiculare. Centrum sectionis S. Et à puncto A in sectione sumto, ducta sit AD, occurrens sectioni sive tangenti sectionem in A ad angulos rectos, et applicetur ad axem ordinatim CAE ipsi AD æqualis, dico terminum ejus E contingere sectionem aliam positione data TX. quæ hyperbole erit si sectio BA sit hyperbole, si vero ellipsis ellipsis; centrum idem habens cum sectione AB axemque axi convenientem, latera vero transversum et rectum reciproce proportionalia lateribus sectionis AB. Et latus quidem transversum VT quod ad latus transversum FB sit potentia, sicut latus transversum FB, ad compositam ex ipsa FB et latere recto BQ in Hyperbolæ in Ellipsi vero ad utriusque differentiam⁷⁾.

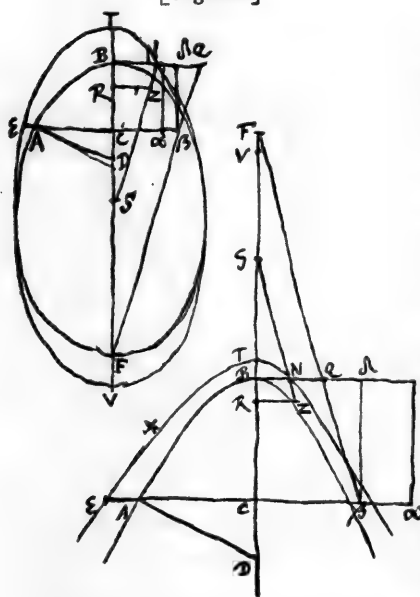
⁴⁾ Voir, à la p. 26 verso de l'édition de Commandin, la première partie de la „Prop. XXXVII” du „Lib. I” des „Con.” d’Apollonius, où l’on lit : „Si hyperbolen, uel ellipsim, uel circuli conferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat : & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur : quæ interiicitur inter applicatam & centrum sectionis unà cum interiecta inter contingentem, & sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineæ, quæ est ex centro sectionis”.

⁵⁾ Comparez le § 2, p. 315—316.

⁶⁾ Comparez les §§ 3 et 4, p. 317—322.

⁷⁾ C’est-à-dire $VT^2 : FB^2 = FB : (FB + BQ)$. Soient donc q et r les „latera transversum et rectum” de l’hyperbole ou ellipse BA, q' et r' ceux de l’hyperbole ou ellipse TE ; on aura alors $q'r' = qr$ et $q'^2 : q^2 = q : (q + r)$.

[Fig. 22.]



Jungatur enim FQ, et producat occurratque rectæ AC in β , et sit duabus FC, C β tertia proportionalis $\beta\alpha$ addenda ipsi C β in hyperb. in ellipsi vero auferenda ¹⁾. et compleatur rectangulum C β DB itemque $\square \delta\alpha$. Sit etiam duabus ST, SB tertia prop.^{is} SR; et ducatur RZ parallela BQ itemque SZ parall. FQ quæ secabit latus rectum bifariam in N.

Quia igitur ut VT ad FB five ut ST ad SB ita ponitur reciproce esse BN dimidium lat.

rect. sectionis BA ad $\frac{1}{2}$ l. rect. sectionis TX:

sicut autem ST ad SB, hoc est, sicut SB ad SR ita BN ad RZ: Erit proinde RZ dimidium lat. rect. sectionis TX ²⁾. Quamobrem si ostensum fuerit sicut ST ad RZ ita esse \square VCT ad qu. AD seu qu. CE, constabit punctum E contingere sectionem TX ³⁾. Illud vero sic ostendemus.

Quoniam æquales sunt BT, FV erit \square VCT æquale duobus rectangulis FCB et VBT: In hyperbole per prop. 24. lib. 7 Pappi ⁴⁾. In Ellipsi vero per prop. 57 ejusdem libri ⁵⁾. quia autem ut ST ad TB ita SB [ad] BR, erit etiam ut utraque simul ST, SB five ut VB ad utrumque simul TB, BR hoc est ad

¹⁾ Voici les considérations qui ont pu conduire à l'introduction de ces lignes auxiliaires. Les équations des courbes BA s'écrivent: $y^2 = \frac{r}{q}x(q \pm x)$, où $y = AC$, $x = BC$, et où l'on doit prendre le signe + dans le cas de l'hyperbole et le signe — dans celui de l'ellipse. On trouve alors, pour les équations des courbes TE, $EC^2 = z^2 = \frac{r}{q}(q \pm x)x \pm \frac{r^2}{q^2}(q \pm x)x + \frac{1}{4}r^2$ (comparez les expressions pour zz des pp. 316 et 317). Pour pouvoir traiter à la fois le cas de l'hyperbole et celui de l'ellipse, il était donc avantageux d'introduire deux lignes auxiliaires $\frac{r}{q}(q \pm x)$ et $\frac{r^2}{q^2}(q \pm x)$ dont il faut prendre la somme dans le cas de l'hyperbole et la différence dans celui de l'ellipse. En combinant cette somme, ou cette différence, avec la ligne $BC = x$, on obtient le rectangle B α qui, augmenté du carré de $BN = \frac{1}{2}r$, est égal au carré de $z = EC$. Or, on trouve facilement que, par construction, $C\beta = \frac{r}{q}(q \pm x)$, $\alpha\beta = \frac{r^2}{q^2}(q \pm x)$.

²⁾ La lettre X manque dans la figure qui se rapporte au cas de l'ellipse; mais il s'agit alors évidemment de la courbe TEV.

³⁾ Comparez la note 3 de la p. 340.

TR ita ST ad TB: ideoque $\square VBT \propto \square STR$. Itaque $\square VCT \approx$ quabitur $\square FCB + \square STR$.

Jam vero quoniam est ST ad SB potentia, hoc est ST ad SR longitudine ut SB ad utramque simul SB, BN in hyperbole; in ellipsi vero ad harum differentiam⁶⁾, Erit dividendo in hyperb., in ellipsi autem per conversionem rationis, ST ad TR ut SB ad BN. hoc est ut FC ad C β . Sed quia C β ad $\beta\alpha$ ut FC ad C β ex confr. hoc est ut SB ad SN, hoc est ut ST ad TR: Erit C β ad C α ut ST ad SR, hoc est ut TR ad RZ; nam ST erat ad TR ut SB ad BN, hoc est, ut SR ad RZ, ideoque permutando ST ad SR ut TR ad RZ. Quia igitur ostendimus esse ut ST ad TR ita FC ad C β . utque TR ad RZ ita C β ad C α . Erit ex æquo ut ST ad RZ ita FC ad C α . atque ita $\square FCB$ ad $\square \alpha C$, CB. seu B α rectangulum.

Rurfus quia ut ST ad TR ita SB ad BN erit $\square STR$ ad $\square SB$, BN duplicata ratio ejus quam ST ad SB, ac propterea eadem quæ ST ad SR. Sed $\square SB$, BN est ad qu. BN ut SB ad BN, h. e. ut SR ad RZ, ergo ex æquo $\square STR$ erit ad qu. BN ut ST ad RZ. Sed et $\square FCB$ ostensum est ad $\square B\alpha$ esse ut ST ad RZ, Ergo ut ST ad RZ ita utrumque simul et $\square FCB$ et $\square STR$, hoc est ita $\square VCT$, ad utrumque horum, $\square B\alpha$ et qu. BN.

Hæc autem utraque simul æqualia esse qu. AD vel CE deinceps ostendemus. Nam primo quidem in hyp. $\square B\alpha$ æquale est $\square B\beta$ et $\square \beta\alpha$ e quibus $\square B\beta$ æquatur qu. AC*. \square vero $\beta\alpha$ $\square B\beta Q^*$, quoniam videlicet latera reciproce *). **).

4) Voici cette proposition, qu'on trouve à la p. 174 recto de l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 259 du T. II: „Sit recta linea AB æqualis CD, & sumatur quoduis punctum E extra lineam AD. Dico rectangulum BEC rectangulo AED, & rectangulo BDC æquale esse”.



5) Voir la p. 194 recto, où l'on lit: „Sit AB æqualis ipsi CD, & quoduis punctum E inter BC puncta. Dico rectangulum AED superare rectangulum BEC rectangulo ACD”.

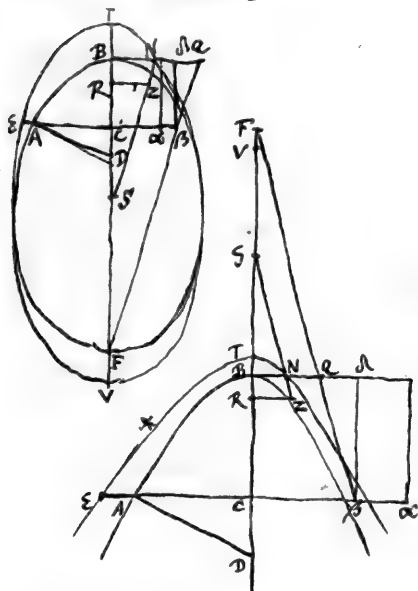


6) Voir la proportion de la note 7 de la p. 341, où $VT = 2ST$; $FB = 2SB$; $BQ = 2BN$, tandis que le rapport de $ST^2 : SB^2$ peut être remplacé par celui de $ST : SR$, puisque, par construction, $SR = \frac{SB^2}{ST}$.

7) Il s'agit de la proposition mentionnée dans la note 3 de la p. 340. On a d'après elle, $AC^2 : FC \times BC = BQ : FB = C\beta : FC = C\beta \times BC : FC \times BC$. Donc, par suite, $AC^2 = \square B\beta$.

8) Voir la „Prop. 14” du „Lib. 6” des „Elementa” d'Euclide, où l'on lit: „Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia”. (Clavius, p. 566).

[Fig. 22.]



proportionalia sunt scilicet ut $\beta\delta$ ad δQ , hoc est ut FC ad $C\beta$ ita $C\beta$ ad $\beta\alpha$ ex constr. Ergo $\square B\alpha + \text{qu. BN}$ æqualia sunt qu. AC . et $\square B\delta Q$ et qu. BN , sed $\square B\delta Q + \text{qu. BN}$ æquantur $\text{quadr. } \delta N$ per . . . secundi Elem. ¹⁾ hoc est qu. CD per anteced. ^{m 2)}. Ergo $\square B\alpha + \text{qu. BN}$ æqualia $\text{qu. is ex AC et CD}$ hoc est qu. AD sive EC .

In ellipsi vero idem sic ostenditur. $\text{qu. BN} \propto \square B\delta Q + \text{qu. N}\delta$. per 2. Eucl. ³⁾ sed $\square B\delta Q \propto \square \delta\beta, \beta\alpha$, quia ut $\beta\delta$ ad δQ hoc est ut FC ad $C\beta$, ita $C\beta$ sive $B\delta$ ad $\beta\alpha$, ex constr. Quadr. igitur $BN \propto \text{qu. N}\delta + \square \delta\alpha$ hoc est $\text{qu. CD} + \square \delta\alpha$, nam $CD \propto N\delta$ per antecedentem ²⁾. Addito jam utrinque $\square \alpha B$, fiet $\text{qu. BN} + \square \alpha B \propto \text{qu. CD} + \square \delta\alpha + \square \alpha B$, hoc est $\text{qu. CD} + \square \beta B$. Sed $\square \beta B \propto \text{qu. AC}$ ⁴⁾. Ergo $\text{qu. BN} + \square \alpha B \propto \text{qu. CD} + \text{qu. CA}$, hoc est $\text{qu. } \delta A$. sive qu. CE .

sicut in hyperbola quoque ostensum est. Erat autem utrobique sicut ST ad RZ , hoc est ut latus transversum sectionis TX ad ejusdem latus rectum, ita $\square VCT$ ad $\square B\alpha + \text{qu. BN}$ ⁵⁾. Ergo ut dictum latus transversum ad latus rectum ita apparet esse $\square VCT$ ad qu. CE . Ideoque punctum E contingere sectionem TX . quod erat dem.

Accipiat ⁶⁾ jam pro latere recto ⁷⁾ minor ellipseos axis BF [Fig. 23] ad quæ ordinatim applicata sit AC . ductaque ut prius AD quæ contingenti Ellip-

¹⁾ Voir la „Prop. 6” du „Lib. 2” des „Elementa” d’Euclide. On la trouve citée dans la note 2 de la p. 46 de notre T. XII.

²⁾ Voir le „Theorema II”, p. 339—340.

³⁾ Il s’agit cette fois de la „Prop. 5” du „Lib. 2”, citée à la p. 176 de notre T. XI.

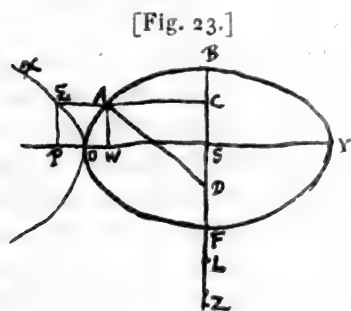
⁴⁾ Voir la note 6 de la p. 343.

⁵⁾ Comparez la dernière phrase du troisième alinéa de la p. 343.

⁶⁾ Comparez, pour ce qui suit, le § 3 de la Première Partie, p. 317—319.

⁷⁾ Lisez : „latere transverso”.

⁸⁾ Écrivant q et r pour les „latera” de l’ellipse OBY par rapport à l’axe BF et q' et r' pour ceux de l’hyperbole XO par rapport à l’axe OY , on a donc $q' = \sqrt{qr}$; $r' = \frac{q^2 \sqrt{qr}}{r^2 - qr}$.



sim in A occurrat ad ang. rectos. Ipsique AD æqualis statuatur CAE. dico terminum ejus E contingere hyperbolam OX positione datam. cujus nimirum latus transversum axi adjacens sit ipse major ellipseos axis OY. latus rectum autem quod ad latus transversum OY eam habeat rationem quam qu. lateris transversi Ellipseos BF, ad id quo qu. lateris recti ellipseos excedit \square ab lateribus recto et transv. contentum⁸⁾, hoc est (ponendo $SZ \propto \frac{1}{2}$ lat. recti

ellips., sumtisque quantitatum dictarum quartis partibus) eam quam qu. BS ad \square SZF. Est enim \square SZF \propto ei quo qu. SZ superat \square ZSF, hoc est quartæ parti ejus quo qu. lateris recti ellipseos superat \square a latere transverso et recto comprehensum.

Ducantur enim à punctis A, E axi majori OY ad ang. rectos, AW, EP. Sit $CL \propto SZ$. Quoniam igitur per præced.²⁾ pars axis CD rectis AC, AD intercepta æqualis est ei quo $\frac{1}{2}$ latus rectum ellipseos excedit lineam quæ sit ad BC ut

latus rectum ad latus transversum: Est autem $CL \propto \frac{1}{2}$ lateri recto. Ergo DL erit prædicta linea, quæ nimirum erit ad BC sicut latus rectum ellipseos ad latus transv. sive sumtis horum dimidijs, ut CL ad SB. quare et perm.^o et convertendo erit CL ad LD ut SB ad BC. Et per conv.^m rationis LC ad CD ut BS ad SC; et permut.^o rursus, LC sive ZS ad SB ut DC ad CS. Sicut autem ZS ad SB, ita est qu. OS⁹⁾ ad qu. SB, utque qu. OS ad qu. SB ita est \square OWY ad qu. WA¹⁰⁾. Ergo etiam ut DC ad CS ita \square OWY ad qu. WA. Sed ut DC ad CS ita \square DCS ad qu. CS sive ad qu. WA. Ergo \square DCS $\propto \square$ OWY.

Est autem qu. DC ad \square DCS ut DC ad CS. Ergo etiam qu. DC ad \square OWY ut DC ad CS hoc est ut ZS ad SB hoc est ut qu. ZS ad \square ZS, SB. Itaque et divid.^o erit qu. DC ad qu. DC — \square OWY ut qu. ZS ad qu. ZS — \square ZSB h. e. ad \square SZF. Est autem qu. DC — \square OWY $\propto \square$ YPO. nam \square YPO \propto qu. PS — qu. SO, hoc est qu. CD + qu. AC — qu. SO; sed qu. SO \propto

⁹⁾ Puisque $OS^2 = \frac{1}{4}qr = BS \times SZ$, d'après une formule bien connue.

¹⁰⁾ D'après la dernière partie de la „Prop. XXI” du „Lib. I” des Coniques d'Apollonius, que nous avons reproduite dans la note 12 de la p. 300 du T. XI.

XI²⁾.

1658—1659.

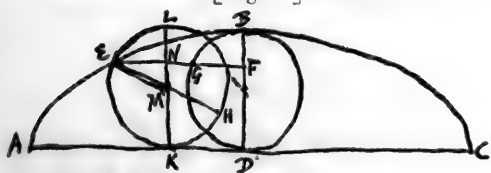
[*Recherches sur les propriétés géométriques de la cycloïde* ³⁾.]

[PREMIÈRE PARTIE ⁴⁾.]

§ 1 ⁵⁾.

Jul. 1658.

[Fig. I.]



ABC est Cycloïdes. BD diameter circuli genitoris. EF parall. AD. dico $EG \propto$ effe arcui GB.

Cum B est in E, circulus BGD est in EKH. Et D in H. Ergo arcus KH \propto rectæ KD. quare et arcus EL sive GB \propto rectæ KD sive NF. Sed NF \propto GE: nam GF \propto NE; et addita utrinque NG fit EG \propto NF. Ergo arcus BG \propto GE.

²⁾ La Pièce, que nous avons divisée en cinq Parties et en paragraphes, est empruntée aux pp. 23—32 et 67—81 du Manuscrit A. Ajoutons que Huygens résume dans l'„Horologium oscillatorium” (p. 69 de l'édition originale) les résultats des recherches qu'elle contient.

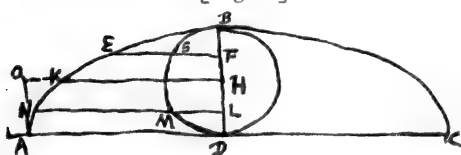
³⁾ Voir, quant à la détermination de la développée de la cycloïde, le § 4 de la Pièce N°. XV, p. 404—405.

⁴⁾ Cette Partie fait connaître les premières recherches de Huygens sur la cycloïde, entamées peu de temps après qu'il eut reçu par l'intermédiaire de Boulliau (voir la lettre de celui-ci du 28 juin 1658, p. 186—187 du T. II) la lettre circulaire de Pascal, sous le pseudonyme Dettonvillius, intitulée: „Problemata de Cycloïde, proposita mense Junii 1658” (voir les p. 187—189 du T. II). Huygens communiqua le résultat de ces recherches à Boulliau dans une lettre du 25 juillet 1658 (p. 200—201 du T. II).

⁵⁾ Ce paragraphe contient la déduction de la propriété de la cycloïde, dont Huygens se servira dans les recherches qui suivent.

§ 2¹⁾.

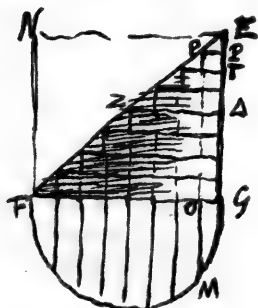
[Fig. 2.]



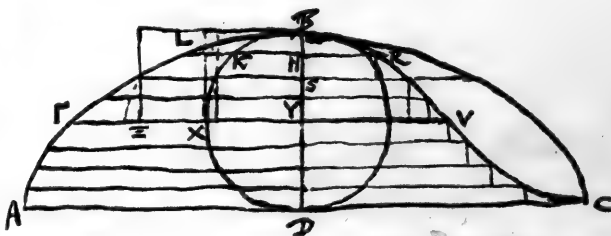
tium AEBGMDA \propto \square HA, hoc est \propto circ.^oBD. Unde totum cycloidis spatium ABC, triplum erit circuli genitoris BD.

Sit $HL \propto HF$. et ducantur FE, LN. Erunt duæ simul GE et MN \propto DA. nam $GE \propto$ arc.GB. Et $MN \propto$ arc.MB five GD. Ergo $GE + MN \propto$ arc.BGD, hoc est \propto DA. Quod cum semper contingat, hinc facile ostenditur quod spa-

[Fig. 3.]



[Fig. 4.]



FNEG [Fig. 3] cylindrus cujus basis circulus FG \propto BD [Fig. 4] et GE \propto FG. Hic sectus est plano EF in duo æqualia. BH [Fig. 4] \propto GO [Fig. 3]; KL \propto arc.BK vel GM vel PQ²⁾. fit HR \propto KL et sic porro. fit ergo \square RS æquale superficiei curvæ QT [Fig. 3], et sic in singulis. Unde spatium totum BRVCD \propto superficiei curvæ FGE. Sed spatium BRVCD \propto BKXDAL ex constructione quasi. Ergo spatium BKXDAL \propto superf. FGE. hoc est duplo semicirculo FMG vel BXD. Unde rursus patet quod supra demonstratum fuit.

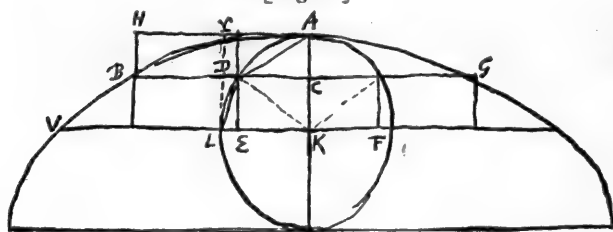
Itaque spatium BLADXB reductum ad BRVCD nihil aliud est quam dimidium involucrum FGE expansum in superficiem planam.

Et si fuerit $E\Delta \propto BY$, et planum ΔZ parall. plano basis FG, erit semi involucrum $Z\Delta E \propto$ spatio $X\Gamma B K X$, vel $YVRB$.

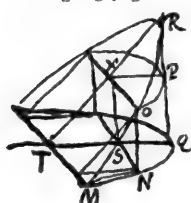
Quod si autem $E\Delta$ fuerit $\propto \frac{1}{2} EG$, ideoque ΓXY per centrum circuli BD.

¹⁾ Dans sa lettre circulaire Pascal avait demandé en premier lieu la quadrature d'un demi-segment quelconque comme BEF (nous employons les notations de la Fig. 2); mais plus loin il avait signalé en particulier les cas où le point E se confond respectivement avec les points A et K. C'est donc par ces cas spéciaux que Huygens commence ses recherches.

[Fig. 6.]



[Fig. 7.]



[Fig. 7]. $TQ, QR \propto KA$
[Fig. 6]. Itaque involucrum
 $RQM \propto \text{spatio } ABVLDA^1).$

Sit QS vel $PX \propto AC$. Ergo
involucrum $OPR \propto \text{spatio}$
 $ADB^2).$ Datum autem est
 OPR involucr. Ergo et ABD
spatium. Datum esse OPR hinc

patet. Datur superficies $MON \propto \frac{1}{2} \text{qu. } NM^3).$ Sed et superf.

$ONQP$ datur quæ non differt a $\square BE$. Ergo ablatis MON
et $ONQP$ ab involucro RQM (quod datum est $\propto \text{qu. } QT$ vel
 AK) reliquum quoque involucrum OPR datum erit, hoc est
 ADB spatium. Huic addito segmento ADC , quod datum est
(quippe sector ADK datur $\propto \frac{1}{2} \square EH$) datum erit totum spa-
tium ABC . quod erat ostend.

Jam si $AC \propto CK$ [Fig. 6]. dico spatium ABC esse triplum trian-
guli $ACD^4).$ Oportet enim auferre à qu. KA , $\square^m EB$ et $\frac{1}{2} \text{qu. } DL$ ($\propto MN$
[Fig. 7]) ut fiat reliquum $\propto \text{spatio } ADB$. Item ut fiat segmentum ADC , oportet
à sectore ADK hoc est $\frac{1}{2} \square^o HE$, h. e. $\square^o BE$ auferre $\triangle KCD$. Ergo ut fiat

¹⁾ Comparez le dernier alinéa du § 2, p. 348—349.

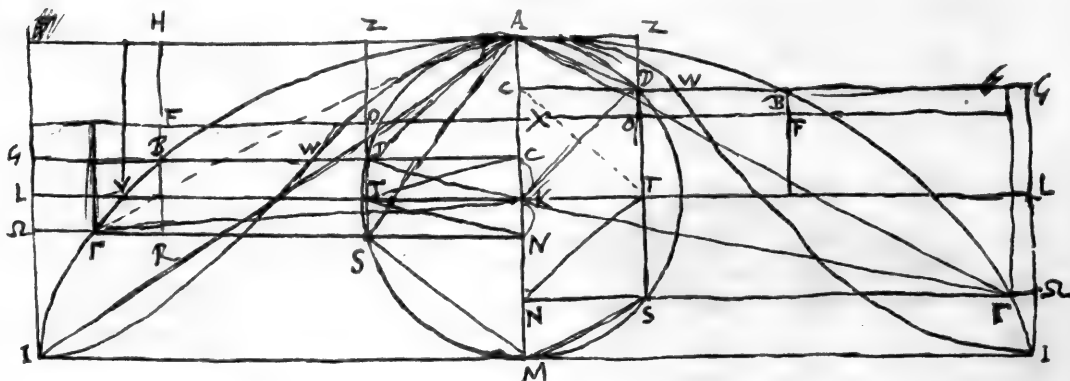
²⁾ C'est-à-dire l'espace limité par l'arc de cercle AD , la droite DB et l'arc cycloïdal BA .

³⁾ Voyez la dernière ligne du § 3 (p. 349), et considérez que LN (Fig. 5) = $2NO$ (Fig. 7).

⁴⁾ Ce résultat simple, d'où il suit que dans le cas en question le demi-segment ABC est carrable sans supposer la quadrature du cercle, attira l'attention de Pascal, qui en fait mention dans son „Histoire de la Roulette” (citée quant à l'édition latine qui parut simultanément avec l'édition française dans la note 2, p. 276 de notre T. II) dans les termes suivants: „J'ay trouvé de belles choses dans leurs Lettres, et des manieres fort subtiles de mesurer le plan de la Roulette, et entr'autres dans celles de Mr. Sluze, Chanoine de la Cathedrale de Liège, de Mr. Richi, Romain, de Mr. Huguens, Holandois, qui a le premier produit que la portion de la Roulette retranchée par l'ordonnée de l'axe, menée du premier quart de l'axe du costé du sommet, est égale à un espace rectiligne donné. Et j'ay trouvé la mesme chose dans une Lettre de Mr. Wren, Anglois, écrite presque en mesme temps” (voir la p. 202 du T. VIII de l'édition des „Œuvres de Blaise Pascal”, citée dans la note 4 de la p. 196). Ajoutons que c'est la seule fois que les recherches de Huygens sur la cycloïde soient mentionnées par Pascal dans ses publications.

Si $AN^1)$ major AK [Fig. 9.] Erit spatium $AFN \propto$ trapez. $AZTN + \square$ OF . h. e. $\propto \square X\Gamma + \triangle ADC$ (idem enim est sive $\square OF$ addatur trapez.

[Fig. 9.]



$AZTN$, five addatur $\square AO + \square ON - \triangle NTS$. est autem $\square OF + \square ON \propto \square X\Gamma$. Et $\square AO - \triangle NTS \propto \triangle ADC$ vel NSM , nam $\square AO \propto \triangle ADK$ quia $AK \propto 2AX$. sed $\triangle NTS \propto \triangle CDK$. Ergo $\square AO - \triangle NTS \propto \triangle ADC$ vel NSM) h. e. $\propto \triangle AFN + \triangle K\Gamma N^2)$ + $\triangle NSM$. Ergo segmentum $AFB \propto \triangle K\Gamma N + \triangle NSM$.

$$\begin{aligned} & AWIM^3) - AWC \propto WIMC \\ & \text{ex } AWIM ([\infty] \square KI^4)) + \square CL \propto \square CI \\ & \square CL + AWC \propto GWI \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a[\text{dde}] \left\{ \begin{aligned} & \square CL + \square AT - \square TB \propto GWI^5) \\ & \square XL - \square TF + \triangle TCD \propto ASN^6) \propto DCM. \\ & \square X\Omega - \square OR + \square AT + \triangle TCD \text{ h. e. } \square OF + \\ & + \text{trap. } AZTN \propto \text{spatio } AFN^7) \text{ nam } FS \propto BG + DC. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

¹⁾ Ce qui suit se rapporte également aux deux points N qu'on trouve sur l'axe AM .

²⁾ On a $\square X\Gamma = \triangle AFN + \triangle K\Gamma N$, puisque $2XN = 2XK + 2KN = AK + 2KN = AN + KN$.

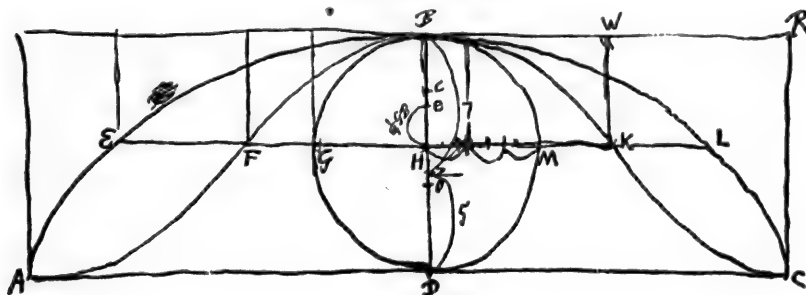
³⁾ Huygens va déduire encore quelques relations entre les aires de diverses parties de la Fig. 9. Ajoutons que les raisonnements géométriques ne sont pas partout faciles à suivre, mais que nous avons vérifié analytiquement l'exactitude des résultats obtenus.

⁴⁾ Voir le deuxième alinéa du § 2, p. 348. D'après cet alinéa l'espace $BRVCD$ de la Fig. 4, qui est identique avec l'espace $AWIM$ de la présente figure, est égal à l'aire du cercle générateur, laquelle est représentée par le rectangle KI .

⁵⁾ On a d'après ce qui précède $GW I = \square CL + AWC$; mais AWC est égal à l'espace limité

§ 5⁸⁾.

[Fig. 10.]



Centrum gravitatis $\frac{1}{2}$ circuli BGD est in HG. Si itaque centrum grav. spatij BGDAEB five BFADB⁹⁾ inventum fuerit altitudine tenus, dabitur totius spatij

par l'arc de cercle AD, la droite BD et l'arc cycloïdal BA. Or, cet espace correspond à l'espace ADB de la Fig. 6, p. 350, qui, d'après le deuxième alinéa de la p. 350, fut trouvé égal à $\square KY - \square EB - \frac{1}{2} DL^2 = \square KY - \square EB - \square EY = \square AE - \square EB$; c'est-à-dire, en retournant à la Fig. 9, à $\square AT - \square TB$.

⁶⁾ ASN représente ici le demi-segment de cercle ADSNA.

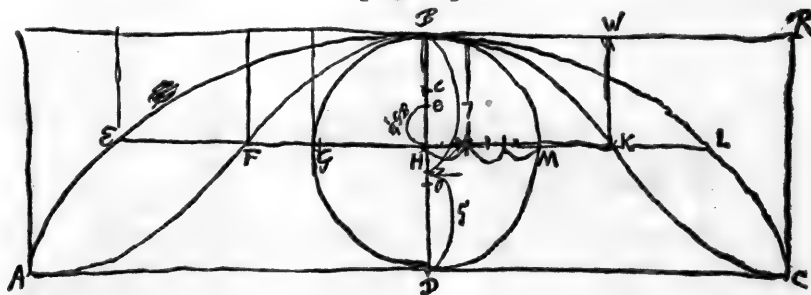
⁷⁾ Comparez les premières lignes de la p. 352.

⁸⁾ Outre la détermination de l'aire d'un demi-segment quelconque BEF de la cycloïde (voir la Fig. 2, p. 348) Pascal avait demandé dans sa lettre circulaire de juin 1658 (voir la note 4 de la p. 347) la détermination du centre de gravité d'un tel demi-segment, la cubature des solides engendrés par sa révolution autour des axes EF et BF, et la situation des centres de gravité de ces solides; comme aussi des solides qu'on obtient en les coupant en deux parties égales par un plan passant par leur axe. Huygens qui considérait ces problèmes pour la plupart comme très difficiles (voir sa lettre à Boulliau p. 200 du T. II) ne s'est occupé en premier lieu que de ceux qui lui semblaient les plus abordables. Quant au centre de gravité du demi-segment il ne cherche qu'à déterminer sa distance à la base EF; ce qui est identique à la détermination du centre de gravité du segment entier. Ce n'est que plusieurs mois plus tard (voir la Cinquième Partie, p. 376, et surtout la note 1 de cette page) qu'il a repris, après avoir pris connaissance des méthodes de Pascal, le problème de la situation du centre de gravité du demi-segment, en déterminant cette fois la distance de ce centre à l'axe BD de la cycloïde.

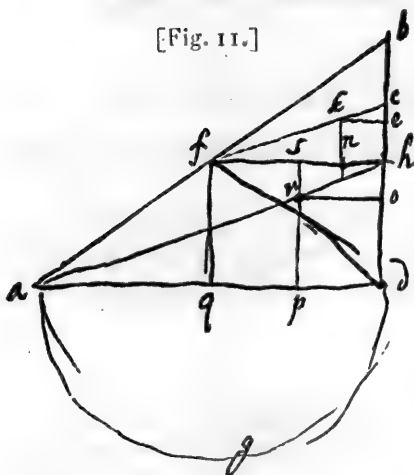
Dans le présent paragraphe Huygens commence ses recherches par les deux cas spéciaux signalés par Pascal (voir la note 1 de la p. 348); c'est-à-dire il détermine les centres de gravité des espaces EBLE et ABKA de la Fig. 10. Ensuite il en déduit aisément les cubatures des solides engendrés par leur révolution, respectivement autour des axes EL et AC.

⁹⁾ Voir sur la construction de la courbe AFBKC le deuxième alinéa de la p. 348. La partie BKC de la présente figure correspond à la partie BRVC de la Fig. 4, pour laquelle partout $RH = KL = \text{arc. BK}$.

[Fig. 10.]



[Fig. 11.]



BEAD centr. gr. altitudine tenuis. quia et spatiorum ad se mutuo ratio data est ¹⁾. spatium BFADB est involucrum semicylindri *bad* [Fig. 11] ²⁾. Ergo hujus centr. gr. altitudine tenuis quærendum est. superficiæ cylindricæ *bfd* centrum gr. est in *fh* ³⁾: puta *n* ⁴⁾, quod postea invenietur. superficiæ cyl. *afd* centr. gr. est in *fq*. Sicut involucrum *abd* ad *bfd* ita sit *nf* ad *fs*. et *sp* parall. *bd*. Ergo totius involucri *abd* centr. gr. erit in *sp* ⁵⁾. Sed et in *ah*. Ergo in intersectione *r*. Sit *ro* parall. *ad*. Ergo sicut *bd* dividitur in *o*, ita centrum gr. spatij AFBKC [Fig. 10] dividet diametrum BD.

Ad inveniendum vero centr. gr. supert.

¹⁾ Comparez le premier alinéa du § 2, p. 348.

²⁾ Comparez le deuxième alinéa de la p. 348.

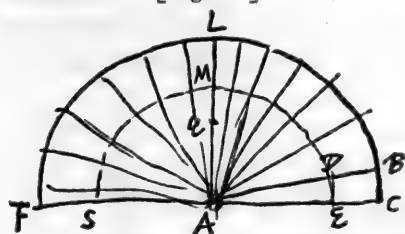
³⁾ Dès ici Huygens considère les surfaces entières des deux côtés du plan *abd* de la Fig. 11.

⁴⁾ Remarquons que le point *n*, centre de gravité de la surface cylindrique *bfd*, se trouve sur la ligne *fh* quoique la lettre *n* soit placée à une certaine distance de cette ligne.

⁵⁾ La ligne *fh* est considérée comme le bras d'un levier qui porte en *f* le poids de la surface *afd* et en *n* celui de la surface *bfd*, on peut donc remplacer ces poids par celui de la surface entière *abd*, suspendu en *s*, pourvu que $fs \times \text{surf. } abd = fn \times \text{surf. } bfd$.

⁶⁾ Évidemment les centres de gravité des différentes parties de la surface cylindrique *fhh*, découpées par des plans perpendiculaires sur le plan de projection *abd* et passant par *f*, se trouvent sur une même ligne verticale qui passe par *n*. Il suffit donc, pour connaître cette ligne, de déterminer le centre de gravité d'une seule de ces parties, pour laquelle Huygens choisit celle qui contient le demi-cercle dont *fh* est la projection, parce qu'elle peut être considérée comme ne différant pas appréciablement d'un secteur sphérique.

[Fig. 12.]



cyl.^æ bfd vel bfh , comparo hanc superficiem sphaericæ minimæ ABC [Fig. 12] nam sicut DE, quæ per centrum gr. hujus fecat AC, ita necessario punctum n dividet fh ⁶⁾. semisphaeræ superficiem FLC centr. grav. Q dividit AL bifariam, ut ostendetur postea⁷⁾. Sit ut FC ad FLC ita AQ ad AM. Erit Q centr. grav. $\frac{1}{2}$

circumf. SME. Sed et Q centrum gravit. est superf. sphaericæ FLC. Ergo singularum partium superficiem ut ABC centrum gravit. debet esse in circumf.^a SME. Sed AQ ad AM ut FC ad FLC, ideoque AL ad AM ut 2FC ad FLC, h. e. ut AL ad $\frac{1}{4}$ FLC. Ergo AM vel AE $\propto \frac{1}{4}$ FLC. Unde et fn [Fig. 11] $\propto \frac{1}{4}agd$ ⁸⁾. Sit fc quæ bifariam fecet bh ; nk parall. hb ; ke parall. fh . Quia ergo $ch \propto \frac{1}{2}bh$ vel $\frac{1}{2}hf$, erit kn , sive $eh \propto \frac{1}{2}nf$. h. e. $\propto \frac{1}{8}agd$. Itaque sumptâ in super[iore] fig. [Fig. 10] $He \propto \frac{1}{4}$ arc. BG, erit e centr. gr. spatij FBK. sive duorum BGE. BML⁹⁾. Porro quia ut involucr. abd [Fig. 11] ad fbd h. e. ut agd ad ad ¹⁰⁾ ita nf ad fs ; estque $nf \propto \frac{1}{4}agd$. Erit et $fs \propto \frac{1}{4}ad$ sive $\propto \frac{1}{2}fh$. Unde et $hr \propto \frac{1}{4}ha$. Ergo et $ho \propto \frac{1}{4}hd$. Ideoque bo ad od ut 5 ad 3. Ergo in super. fig. [Fig. 10] sumpta Bo partium 5 qualium BD est 8, erit o centr. gr. spatij AFBKC. sive utriusque BEADGB, BLCDMB. hæc vero æquantur duplo circ.^o BD¹¹⁾; Ergo divisa Ho in z ut sit Hz dupla zo, erit z centrum grav. spatij cycloidis totius ABC. Do est $\frac{3}{8}$ sive $\frac{9}{24}$ BD et $oz \propto \frac{1}{24}$ BD. Ergo Dz $\propto \frac{10}{24}$ sive $\frac{5}{12}$ BD¹²⁾.

⁷⁾ Huygens n'a pas fait suivre la démonstration de cette proposition bien connue.

⁸⁾ Voir le demi-cercle en bas de la Fig. 11.

⁹⁾ Puisqu'on connaît aussi l'aire de ces deux espaces (voir les derniers deux alinéa's du § 2, p. 348—349) et de même le centre de gravité et l'aire du demi-cercle GBM le problème de trouver le centre de gravité du segment EBL peut être considéré comme résolu.

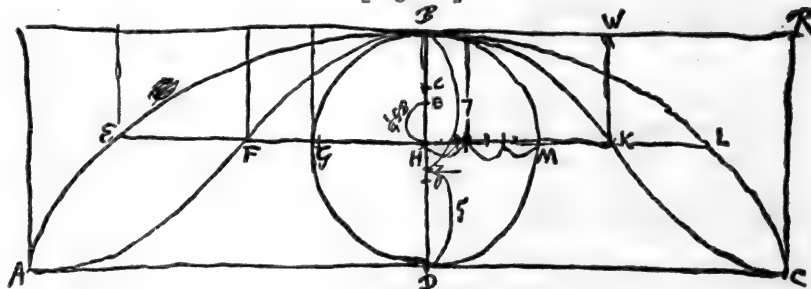
¹⁰⁾ On a évidemment invol. $abd = bd \times \text{arc. } agd = 2bh \times \text{arc. } agd$, et l'on trouve $fbd = 2fbh = 2Z\Delta E$ (Fig. 3) $= 4E\Delta^2$ (voir le dernier alinéa du § 2, p. 348—349) $= 4bh^2$ (Fig. 11) $= 2bh \times ad$.

¹¹⁾ Comparez le premier alinéa du § 2, p. 348.

¹²⁾ Comparez, pour une autre détermination du centre de gravité z , l'Appendice à la Pièce N^o. XV, p. 406.

Ratio solidi à Cycloide facti circa axem AC ad cylindr. à \square AR circa axem eundem componitur ex ratione spatij cycloidis ad spatium \square i AR, hoc est ex ratione 3 ad 4; et ex ratione Dz ad DH, quæ est 5 ad 6. Ergo solidum cycloidis ad dictum cylindrum erit ut 15 ad 24 hoc est ut 5 ad 8.

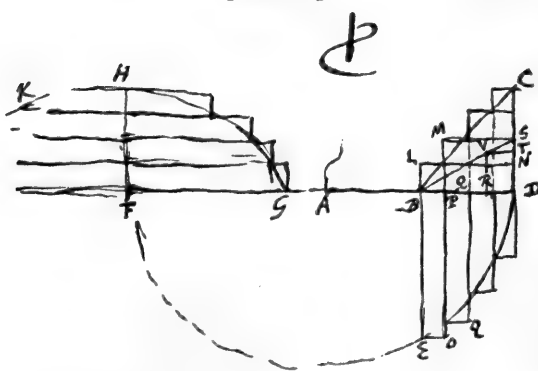
[Fig. 10.]



Ratio solidi à spatio FBK (ungulæ nimirum involucro) circa FK axem ad cylindrum à \square FW, componitur ex ratione spatij FBK ad \square FW, hoc est ex ratione HG ad FH (nam spatium FBK \propto 2 qu. HG¹), et ex ratione eH ad cH, hoc est ex ratione $\frac{1}{4}$ [arc.] GB vel $\frac{1}{4}$ FH ad $\frac{1}{2}$ HG h. e. FH ad 2HG. Ergo eadem est quæ HG ad 2HG, hoc est quæ 1 ad 2. Est autem solidum ab FBK æquale ei quod à duobus spatijs BGE, BML. Ergo si solido ab FBK hoc est cylindro à \square FB addatur sphaera BD, vel cylindrus ipsi æqualis, oritur solidum ab EBL circa axem EL.

§ 6²).

[Fig. 13.]



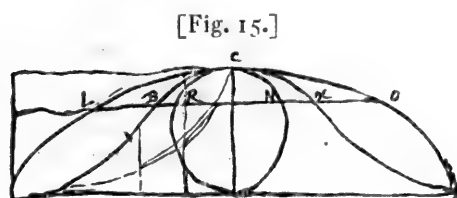
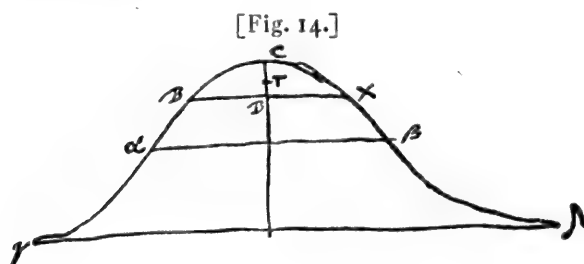
BDC est frustum cylindri cujus cylindri basis est circulus FED. frusti basis est segmentum EBD vel potius hujus duplum. Oporteat invenire centrum gravitatis involucri BDC.

ut DE arcus ad EB ita est AD radius ad AQ³) ut Q sit centrum gr. arcus DE (dupli scilicet), ideoque et involucri LD. Quare si \square BO suspendatur ex F, illud suspenfa libra ex A, æquiponderabit invo-

¹) Voir les derniers deux alinéa's du § 2, p. 348—349.

²) Après avoir trouvé le centre de gravité d'un segment cycloïdal dans les deux cas spéciaux indiqués par Pascal (voir la note 1 de la p. 348), Huygens découvre une méthode plus géné-

lucro LD ut positum est ⁴⁾. Similiter $\square PQ$ ⁵⁾ ex F suspensum æquiponderabit (ex A) involucro MN, atque ita totum segmentum BDE ex F suspensum æquiponderabit involucro BCD et duplum duplo. Sicut igitur involucrum BCD ad segmentum BDE ita si fiat FA ad AR. Erit R centr. gr. vel certè sub centro grav. is involucri BDC. Est autem et in BS quæ bifur. secant DC idem gr. centrum. Ergo datum erit in interfectione V. Et facta VT parall.^a BD dabitur quoque ratio CT ad TD.



Si igitur involucrum BDC exporrectum fuerit in plano [Fig. 14], faciens partem quamlibet involucri semicylindrici ut BCX, ejus centrum gr. in diametro CD inveniri poterit. Et hæc methodus brevior meliorque est quam qua paulo ante totius involucri centrum gr. ut et involucri ungułæ, quod est $\alpha C\beta$, quærebamur ⁶⁾.

Cumque centr. gr. involucri BCX hoc est duorum spatiorum CRL, CNO [Fig. 15] inveniri possit, itemque centr. gr. segmenti circularis RCN. datum igitur est partis LCO centr. gr. quæ qualitercunque lineâ LO basi parallela à cycloide abscinditur. Sed et dimensio data est partis ejusmodi per antecedentia ⁷⁾. Ergo et solidum quod ab ea efficitur circa axem LO conversione factâ ⁸⁾.

rale (et en même temps plus facile) qui peut servir à déterminer le centre de gravité du segment découpé par une droite quelconque parallèle à la base de la cycloïde. À cet effet il commence par chercher le centre de gravité de la surface courbe d'un onglet cylindrique BDC [Fig. 13] ($\angle CBD = 45^\circ$) où la distance AB peut être choisie à volonté.

³⁾ Voir le point Q sur la ligne BD.

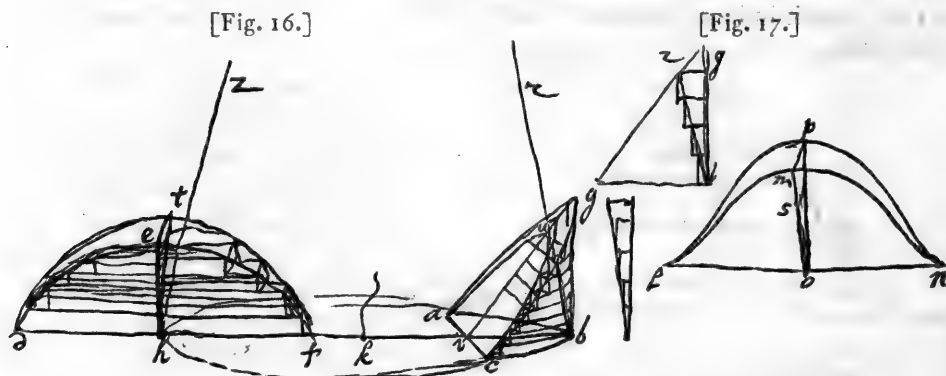
⁴⁾ On a $\text{arc. DE} \times \text{AQ} = \text{EB} \times \text{AD} = \text{EB} \times \text{AF}$, c'est-à-dire: $\text{arc. DE} \times \text{LB}$ (= surf. cyl. BN) $\times \text{AQ} = \text{EB} \times \text{BP}$ (= $\square \text{BO}$) $\times \text{AF}$; d'où il suit, en effet, que le rectangle BO suspendu en F fera équilibre avec la surface cylindrique BN suspendue en Q sur un levier dont le point d'appui est en A.

⁵⁾ Il y a dans la figure double emploi de la lettre Q. Cette fois il s'agit de celle qui se trouve en bas près des points E et O.

⁶⁾ Voir le § 5, p. 353—355.

⁷⁾ Voir au § 4 les p. 349—350.

⁸⁾ Remarquons que Huygens s'est contenté de cette solution potentielle sans plus s'occuper des calculs qu'elle exigerait.

[DEUXIÈME PARTIE ¹⁾].§ 1 ²⁾.

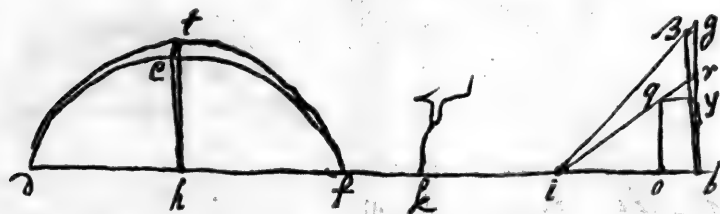
Isdem positis quæ in propositione χ (hoc signo notata ³⁾) æquiponderat, (ex k suspensa librâ [Fig. 16]) segmentum def (æquale abc), involucro $agbc$ ut positum est ⁴⁾. Involucrum hoc expansum in plano fit lmn [Fig. 17], nempe $ln \propto$ arcus abc . superque ea basi parallelopipedum ⁵⁾ intelligatur, idque plano lpn sectum esto, ut fiat ungula seu cuneus $lmnp$, minimus quasi.

- ¹⁾ Dans cette Partie, composée quelques mois plus tard que la Première Partie, Huygens s'occupe de nouveau d'un des problèmes proposés par Pascal (voir la note 8 de la p. 353); c'est-à-dire de la détermination du centre de gravité du solide engendré par une demi-révolution du segment cycloïdal LCOL (voir la Fig. 15) autour de la corde LO.
- ²⁾ Dans ce paragraphe Huygens cherche une solution potentielle (c'est-à-dire sans exécution des calculs indiqués) du problème dans le cas le plus général où LCOL (Fig. 15) est un segment quelconque dont la corde est parallèle à la base de la cycloïde.

Afin d'expliquer la manière dont Huygens attaque ce problème nous faisons remarquer que pour trouver le centre de gravité du solide en question, il suffit de connaître la situation du centre de gravité d'un secteur infinitésimal engendré par la rotation du segment LCOL autour de l'axe LO par un angle infiniment petit. En effet les centres de gravité de tous les secteurs infinitésimaux qui composent le solide se trouvent alors sur un demi-cercle dont on peut déterminer le centre de gravité en supposant que sa densité soit partout égale. Or, Huygens applique ce procédé en premier lieu à la figure LCONCRL (Fig. 15), qu'on peut remplacer par le segment BCXB qui est identique avec le segment $lmnl$ de la Fig. 17. Pour déterminer le centre de gravité du secteur infinitésimal engendré par le segment entier LCO [Fig. 15] le même procédé devrait être appliqué ensuite au segment de cercle RCN. On n'en trouve rien dans le présent manuscrit, ni dans les autres manuscrits de Huygens. Toutefois il nous semble probable que ce travail a été exécuté par Huygens. En tout cas il l'a achevé pour le cas spécial discuté dans la note 6 de la p. 361 qui suit.

Oportet invenire quomodo hujus centrum gr. s dividat diametrum om . super basi circulo $abch$, conus intelligatur maximus cujus latera hz , bz . hujus coni pars quam cum ungula $acbg$ communem habet si ab ungula auferri intelligatur, supererit solidum quoddam cavum minimum; quod solidum (si fuerit angulus $gbz \propto pom$ in cuneo) nihil aliud erit quam ipse ille cuneus inflexus veluti. Sit etiam super segmentum def extructa ungula $defht$, ut sit angulus $eht \propto mop$ vel gbz . tum inscriptis \square is æqualis altitudinis in segmento def super ijs parallelopipeda intra ungulam excitentur, et totidem annularia solida intra solidum cavum $aucbg$ formentur. horum singula singulis dictis parallelopipedis æquiponderabunt, quia involucra (ex propof. 8³) basibus parallelopipedorum æquiponderant et utraque in eandem altitudinem ducuntur. Ergo apparet ungulam ipsam $defht$ æquiponderare solido cavo $aucbg$. Quare si fiat ut solidum cavum

[Fig. 18.]



$aucbg$ ad ungulam $defht$ ita kh radius ad ko [Fig. 18] erit o sub centro gr. dicti solidi cavi. Sed quænam est ratio solidi cavi, five cunei $lmnop$ [Fig. 17] ad ungulam $defht$? Eam dico datam esse. Est

enim eadem quæ solidi ex conversione involucri expansi lmn circa ln [Fig. 17], ad solidum ex conversione segmenti def circa df . Illud solidum ex ijs quæ ex Prop. 8 deduximus datum est⁴). alterum similiter datum est quoniam segmentum def magnitudine datur datâ cycloide⁷), itemque segmenti centr. grav. Ergo quum utraque solida sint data etiam ratio ad se invicem data erit. quare itaque et ratio kh ad ko [Fig. 18]. ducta ergo oq parall. bg in ea erit centr. gr. solidi cavi $aucbg$ [Fig. 16], sed et in recta ir [Fig. 18], quæ ita dividit bg ut br sit dupla rg . quia videlicet ex triangularibus solidis, quale $gb\beta$, totum cavum solidum $aucbg$

³) Voir le § 6 de la Première Partie, p. 356, où l'on retrouve dans la Fig. 13 le même signe de renvoi.

⁴) Comparez le deuxième alinéa du § 6 cité dans la note précédente.

⁵) Lisez: „cylindrum”.

⁶) Puisqu'on connaît, d'après le § 4 (p. 349—350) de la Première Partie, l'aire du segment $lpnl$ (Fig. 17) dont la moitié est égale à la différence des aires cycloïdales et circulaires ABC et ADC de la Fig. 6 (p. 350), et de même, d'après le § 6 (p. 356—357) de cette Partie, la situation de son centre de gravité T (Fig. 14).

⁷) Huygens veut dire que, si la cycloïde est considérée comme donnée, on connaît aussi la rectification d'un arc de cercle et, par conséquent, la quadrature d'un segment de cercle.

Sit nunc super basi tota cycloide lpn cuneus constitutus $lypnom$. Ejus cunei duæ partes $lyp\delta$, $pen\zeta$ habent punctum sub centro gr. in mo quam ita dividit quemadmodum unguæ $ompp$ centro gr.^{is} suppositum. cum nihil aliud sint quam hæc ungula diducta. Ergo id centr. gr. θ [Fig. 20 et 21] ita dividit rectam om ut pars versus m sit 3, reliqua 5⁶). ex $ms \propto \frac{4}{9}[mo]$ aufer $m\theta \propto \frac{3}{8}[mo]$, relinquitur $\theta s \propto \frac{13}{72}$

[Fig. 21]. $\left(\frac{5}{72}\right)^7 mo$. hæc θs dividatur in λ [Fig. 21] ut sit $\theta\lambda$ dupla⁸) (sesquialt.)



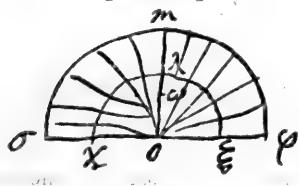
ipsum λs , fit $\lambda s \propto \frac{13}{216}\left(\frac{1}{36}\right)[mo]$ cui additâ $so \propto \frac{5}{9}[mo]$ fit $\lambda o \propto \frac{133}{216}\left(\frac{7}{12}\right)$

totius mo . λ autem est centr. gr. cunei $lyp\zeta nom$ [Fig. 20].

Sit solidum ex cycloide ortum circa axem ln [Fig. 20] eoque per axem eundem ln secto⁹) quærendum sit hujus medietatis centr. gr. Sectio quæ bifariam hanc medietatem dividit, fit circulus $om\varphi$ [Fig. 22]

et sumpta $o\lambda \propto \frac{133}{216}\left(\frac{7}{12}\right)om$ fit designata circumferentia $\chi\lambda\xi$. in hac

[Fig. 22.]



quia centr. gr. sunt omnium cuneorum cycloidalium dicti semisolidi; erit proinde periferiæ $\chi\lambda\xi$ centr. gr. idem quoque semisolidi dicti. Ergo ut semiperiferia circuli ad diametrum, hoc est ut dimidia basis cycloidis lo [Fig. 23] ad ejusdem altitudinem om ita fit λo nempe $\frac{133}{216}\left(\frac{7}{12}\right)om$ ad $o\omega$, eritque ω centr. gr. semisolidi

volume est à celui engendré par le cercle $om\varphi o$ autour de ln , ou du cercle de autour de db , comme 3 à 2.

⁵) Il s'agit du secteur infinitésimal décrit par l'aire $ldmanl$.

⁶) En effet, à l'aide de l'analyse moderne, il est facile de constater que le centre de gravité θ du secteur infinitésimal engendré par le cercle $om\varphi o$ doit partager le segment om dans le rapport de 3 à 5, indiqué par Huygens. Mais comment celui-ci a-t-il obtenu ce résultat? Il y a raison de supposer qu'il était en possession d'une méthode, que nous ne connaissons pas, pour déterminer le centre de gravité du secteur infinitésimal engendré par un segment de cercle quelconque tournant autour de sa corde et qu'il a appliqué cette méthode au calcul du cas spécial en question; comparez la note 2 de la p. 358.

⁷) Huygens commet ici la première des erreurs de calcul qu'il signale dans la dernière phrase de ce paragraphe. Plus tard, ayant pris connaissance du résultat de Pascal, il a corrigé ces erreurs. Or, nous donnons dans le texte la leçon primitive, sauf à ajouter, comme ici, entre parenthèses, les corrections que Huygens y a apportées plus tard.

⁸) C'est la deuxième erreur. Évidemment la distance θs (Fig. 21) doit être partagée dans la raison réciproque des secteurs infinitésimaux dont θ et s représentent les centres de gravité. Or, le rapport de ces secteurs, qui est le même que celui des solides de révolution complets, a été trouvé de 2 à 3; voir la note 4 de la page précédente.

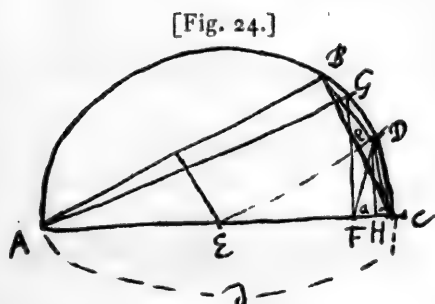
⁹) C'est-à-dire par un plan passant par cet axe; voir le plan $lE nH$ de la Fig. 23, p. 362.

[TROISIÈME PARTIE 5).]

§ 16).

1659. 11 Jan.

[LEMMA].



[AC \propto d]; BD \propto DC; DH \perp AC; HC \propto HF [$\propto d$].

$$\sqrt{ad - aa} \propto \text{HD}; \quad \frac{1}{2}d - a \propto \text{EQ}^7)$$

$$\frac{2}{d-2a[\infty]_{AB}}$$

Sed et $AF \propto d - 2a$; Ergo $AB \propto AF$.

Sed AG media prop. inter FA et AC.

Ergo AG media prop. inter AB, AC. Ergo $\square BA, AC \propto$ qu. AG five \propto
 $\propto \square FAC$ hoc est \propto qu. AC — 2qu. CD.

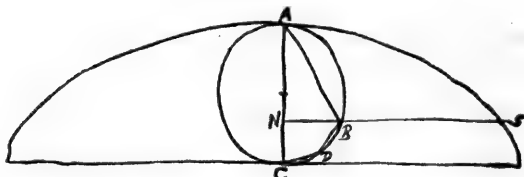
Curvæ pars AS [Fig. 25] ad AN rectam ut quadr.AC—2qu.CD, hoc est

5) Dans la deuxième semaine de janvier 1659, Huygens reçut de la part de Pascal (voir les pp. 309, 310, 312 et 313 du T. II) l'„*Historia Cycloidis*”, où il lut que Wren avait rectifié la cycloïde et l'avait trouvée égale au quadruple de son axe (voir la p. 219 du T. VIII de l'édition de Brunschwig, etc. des Œuvres de Pascal). De plus, Pascal y énonce (p. 221—222) de nouveaux problèmes, savoir de déterminer le centre de gravité d'un arc cycloïdal, la dimension de la surface de révolution décrite par un tel arc tant autour de la base „ce qui est facile” qu'autour de l'axe, et enfin „le centre de gravité de cette surface, ou demy surface, ou quart de surface, etc.; ce qui est le plus difficile et proprement le seul que je propose”. C'est sans doute à propos de ces communications que Huygens entreprit les recherches que nous avons reproduites dans cette Partie. On remarquera que Huygens n'a pas entamé les problèmes signalés comme difficiles par Pascal. Probablement était-il persuadé que ses méthodes n'y suffisaient pas.

6) Ce paragraphe nous donne des renseignements, quoiqu'incomplets, sur la manière dont la rectification de la cycloïde fut d'abord obtenue par Huygens. Bientôt après il découvrit une voie plus courte pour arriver au même résultat; on en trouve l'exposition dans le § 2 qui suit.

7) BQ est perpendiculaire à ED qui est parallèle à AB.

[Fig. 25.]



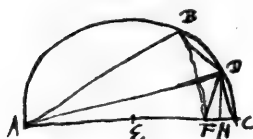
curva AS ad AB ut $\square BAC$ ad $\frac{1}{2} \square BAC$ hoc est ut 2 ad 1.

facilius hoc demonstr. in sequentibus ²⁾).

§ 2 ³⁾).

LEMMA [I.] ⁴⁾

[Fig. 26.]



CD arcus \propto DB; DH perpend. AC. HF \propto HC. Oſtend. AF \propto AB.

Dem. quia HF \propto HC et DH perpend. erit DF \propto DC hoc est \propto DB. est autem in triang. ABD, AFD, $\angle ABD \propto \angle AFD$ quia hic una cum $\angle DFC$, ille cum $\angle DCF$ (ipſi DFC æquali) æquatur 2 rectis ⁵⁾. Sed et latus AD triangulis ABD, AFD commune, ergo et latus AF \propto AB. qu. erat dem.

[Fig. 27.]



LEMMA [II.]

in $\triangle ECD$, $\angle D + \angle ABD \propto$ ang. \perp . $\angle C + \angle ECA$ five + $\angle EBA \propto \angle \perp$. Ergo $\angle C$ superat $\angle D$ angulo EBD.

¹⁾ Nous ne connaissons pas cette démonstration qu'on ne trouve pas dans les manuscrits dont nous disposons.

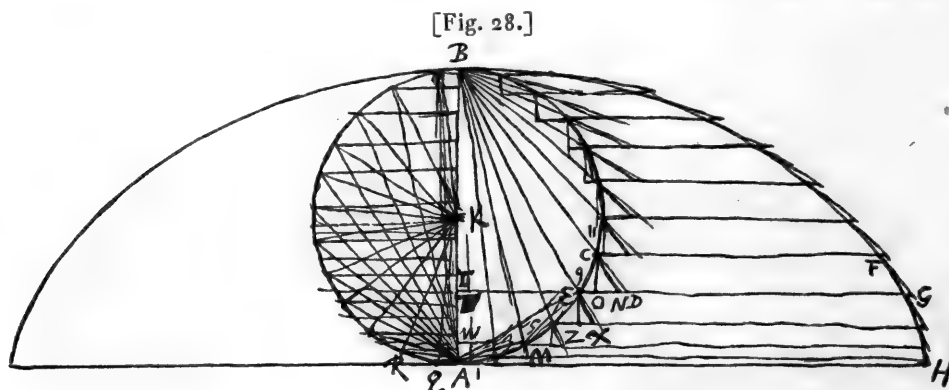
²⁾ Voir le § 2, qui suit.

³⁾ Rectification d'un arc cycloïdal.

⁴⁾ Comparez le „Lemma” du § 1, p. 363.

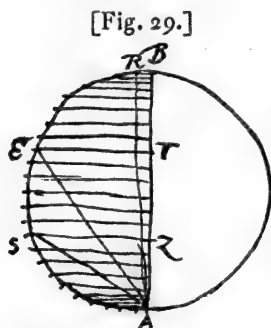
⁵⁾ Puisque $\angle ABD$ a pour mesure la moitié d'une demi-circonférence + arcDC et $\angle ACD$ la moitié d'une demi-circonférence — arcDC.

⁶⁾ Il était, en effet, connu que BC, dont CD est le prolongement, est parallèle à la tangente FG à la cycloïde. D'ailleurs Huygens en donne plus loin une démonstration; voir la Quatrième Partie, p. 374—375.



Ad inveniendam rectam æqualem parti curvæ ut HG, ductâ GE parall.^a HA, inveniendum est quænam sit ratio omnium subtenfarum usque ad arcum AE ad omnes sinus ab eodem demissos, infinita multitudine utrorumque. hæc enim ratio eadem est illi quam habent omnes EX deinceps usque ad A ad omnes perpendiculares EZ.

Dictam autem rationem omnium subtenfarum ad omnes sinus eam dico esse quam habet quadrupla AW sinus versus dimid. arcus AE, ad AT¹⁾.



Ostendit Archimedes omnes sinus ab arcu AE in æquales partes diviso demissos esse ad AT ut AR [Fig. 29] ad RB subtenfam unius partis²⁾.

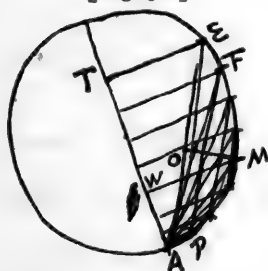
Similiter ergo omnes sinus ab arcu AS demissi erunt ad AZ ut AR ad RB. Itaque omnes sinus ab arcu AE ad AT, sicut omnes sinus ab arcu AS ad AZ. Et permutando, omnes sinus ab arcu AE ad omnes sinus ab arcu AS ut AT ad AZ, sive etiam ut qu. AE ad qu. AS.

d'un nombre égal de sinus qui se trouvent tous dans le premier quadrant. Or, lorsque n est suffisamment grand, on peut admettre que les points terminaux de ces sinus sont répartis également sur l'arc de cercle. Lorsqu'on les répartit ensuite d'une manière égale sur les deux premiers quadrants, sans changer leur nombre, leur somme ne change pas et peut être considérée comme égale à celle des sinus appartenant aux n divisions primitives de la demi-circonférence.

¹⁾ AT est le sinus versus de l'arc AE lui-même.

²⁾ Il s'agit de la „Prop. 22” du „Lib. I” de l'ouvrage: „De sphæra et cylindro”: „Si in circuli cuiuspiam portione figura multorum angulorum inscribatur, quæ quidem figura latera habeat excepta base inter se æqualia, & numero paria, deinde rectæ lineæ ducantur æquedistantes basi portionis, & quæ latera dictæ figuræ coniungant: tunc hæ omnes ductæ simul, cum dimidio basis portionis, habebunt ad altitudinem portionis eandem proportionem, quam habet linea illa ad latus figuræ dictæ, quæ linea ab una extremitate diametri totius circuli ad latus figuræ ipsi diametro applicatum ducta sit.” (p. 23 de l'édition de Bâle; Heiberg, I, p. 99—101). Ajoutons que cette proposition d'Archimède est équivalente à l'identité:

[Fig. 30.]



Omnes subtenſæ crescentes in arcu AE [Fig. 30] æquantur duplo omnium FP reſtarum quæ parallelæ ſunt ipſi AE et bina quæque ſectionum puncta conjungunt ³⁾. quum illæ in eodem circuli ſegmento duplo plures ſinus quam hæ conſtituant. Harum verò (ipſi AE parallelarum) dimidiæ omnes, ſive ſinus ab arcu ME demiffi, ita ſe habent ad omnes ſinus ET demiffos ab arcu AME ipſius ME duplo, ſicut MO vel AW ad AT per præced. Ergo ex æquo omnes ſubtenſæ in arcu AE ad omnes ſinus ab eodem arcu AE demiffos eam habent rationem quam qua-

drupla AW ad AT.

Quum ergo ſuperius dictum ſit eam fore rationem curvæ partis HG [Fig. 28] ad rectam TA quam omnium ſubtenſarum in arcu AE ad omnes ſinus ab eodem demiffos, quam nunc invenimus eſſe eam quam quadruplæ AW ad AT, apparet ipſam curvam HG æquari quadruplæ AW. Nimirum ad inveniendam rectam curvæ HG æqualem oportet ducere GE parall. baſi cycloidis, et diviſo arcu EA bifariam in M ducere MW parall. eidem baſi. Eritque quadrupla AW æqualis curvæ HG.

Jam verò quoniam BA æquatur dimidiæ curvæ BH ⁴⁾, et AW bis (uti oſtendimus) æqu. [dimidiæ] curvæ parti HG hinc $\frac{1}{2}$ reliqua pars GB æquabitur BA—2AW. hoc eſt ipſi BE rectæ ⁵⁾. nam hæc æquatur BA—2AW ex lemm. ſuperiori ⁶⁾.

Notandum item quod WK ſemper æqualis $\frac{1}{4}$ curvæ GB.

$$\frac{2 \sum_{p=1}^{p=n-1} \sin ps + \sin ns}{1 - \cos ns} = \frac{\cos \frac{1}{2}n}{\sin \frac{1}{2}n}.$$

et que, lorsqu'on paſſe à la limite en faiſant croître indéfiniment le nombre des ſinus, on peut, en effet, remplacer le numérateur de la première fraction par $2 \sum_{p=1}^{p=n} \sin ps$.

D'ailleurs l'application exacte de la propoſition d'Archimède exige de lire, ici et dans l'alinéa qui ſuit, „duplum omnium ſinuum” au lieu de „omnes ſinus”, mais cette inadvertance de Huygens ne fauſſe pas les réſultats qui ſuivent.

³⁾ AF eſt égale à la corde qui joint les milieux des arcs AP et EF; la corde joignant A au point de la diviſion qui fait ſuite à F, eſt égale à PF, etc.

⁴⁾ Voir le deuxième alinéa de la p. 365.

⁵⁾ Ce réſultat fut communiqué, le 14 janvier 1659, à de Sluſe; le 16 janvier, à de Carcavy; le 31 janvier, à Wallis; le 7 février à van Schooten (voir les pp. 313, 315—316, 330 et 343 du T. II). Il eſt identique avec celui de Wren, publié par Wallis, en 1659, dans ſes „Tractatus Duo, Prior, de Cycloide et corporibus inde genitis”, etc.; voir la p. 520 des „Opera Mathematica de John Wallis. Volumen Primum, Oxoniæ, E Theatro Sheldoniano. 1695”.

⁶⁾ Voir le „Lemma I”, p. 364, où HC (Fig. 26) et AB corrépondent reſpectivement aux lignes AW et BE de la Fig. 28.

$$KO\left(\frac{1}{2}q\right)[ad]BK\left(\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}q\right)[ut]HE\left(\frac{1}{3}q+\frac{1}{3}\frac{qq}{d}\right)[ad]\left(\frac{\frac{1}{6}dq-\frac{1}{6}\frac{q^3}{d}}{\frac{1}{2}q}\right)EP.$$

$$\frac{\frac{1}{3}dEA}{\frac{1}{3}d-\frac{1}{3}\frac{qq}{d}}EP$$

$$\frac{\frac{1}{3}\frac{qq}{d}PA}{\frac{1}{3}d} \propto \frac{1}{3}AQ^5).$$

§ 4¹⁾.

LEMMA ad ea quæ in fin. pag. sequentis⁶⁾.

in $\triangle ABC$, BD perp. AC. dico majorem habere rationem AD ad DC quam ang. ACB ad ang. CAB.

[Fig. 32.]



Sit $AE \propto DC$, et EF perp. AC, et $\angle ACL \propto \angle BAC$.

AD ad DC ut AD ad AE, h. e. ut BD ad EF vel DK. Sed BD ad DK major ratio quam ang.ⁱ BCD ad $\angle KCD$ five A. ut facile est ostendere. Ergo et AD ad DC major quam $\angle BCA$ ad A.

Circumfer.^a divisa est in partes æquales [Fig. 33]. Omnes CN parallelæ et æquales tangentibus cycloidem respondentibus⁷⁾. hoc est ipsi curvæ. Et singulæ in eadem

la Fig. 26, $HC = FH = \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}AB$, c'est-à-dire, dans la présente figure:

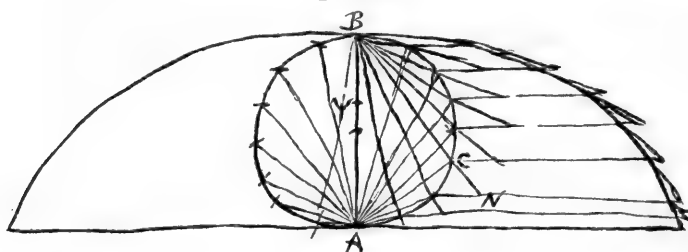
$$BK = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AL = \frac{1}{2}(d - q).$$

⁵⁾ Ce résultat fut communiqué à Wallis dans une lettre du 31 janvier 1659 (voir la p. 330 du T. II) et à Pascal dans une lettre du 5 février suivant (p. 341 du T. II).

⁶⁾ Voir la première annotation en marge de la p. 371.

⁷⁾ Voir la note 6 de la p. 364.

[Fig. 33.]

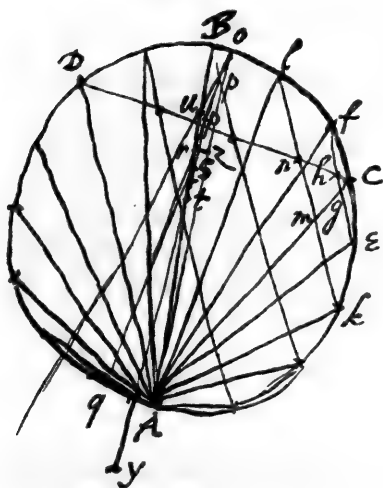


altitudine similiter sitæ. Ergo centr. gr. cycloidis lineæ erit in eadem altitudine atque centr. gr. omnium CN. Superius autem apparuit, pag. 78 ¹⁾, singulas CN esse inter se sicut quæ ipsis adjacent

CA. Unde sequitur, si in singulis punctis C suspenderentur singulæ CA, fore centrum gr. omnium CA ita suspensarum eadem altitudine atque centr. gr. omnium CN uti positæ sunt, vel certè si singulæ CN suspenderentur itidem è punctis C. quod nihil refert.

Oportet igitur invenire centrum gr. omnium CA ex punctis C suspensarum. Sit

[Fig. 34.]



primo propositum invenire centr. gr. omnium CA suspensarum ex C punctis per arcum ACB ²⁾

[Fig. 34] quemcunque. dividatur hic bifariam in C, à quo bina quæque reliquorum punctorum C æqualiter utrinque distent; quæ jungantur rectis *ef*, *kl* &c. et ducatur item CD. Quia ergo AC dividit bifariam angulum *eAf*, erit ut *eA* ad *Af* ita *eg* ad *gf*, vel ita quoque *fh* ad *he* ³⁾. Ergo *h* centr. gr. erit ipsarum *Ae*, *Af* suspensarum ex *e* et *f*. Eodem modo ostendetur centr. gr. duarum *kA* et *lA* suspensarum ex *k* et *l* esse in *n*; atque ita de cæteris quibusque binis apparebit centr. ipsarum gr. esse in recta CD. Ergo omnium AC ex punctis C suspensarum per totum arcum ACD erit centr. gr. in CD.

dividatur AB ⁴⁾ in *s* ut sit *As* dupla *sB*. dico centr. gr. omnium AC, per totam circumferen-

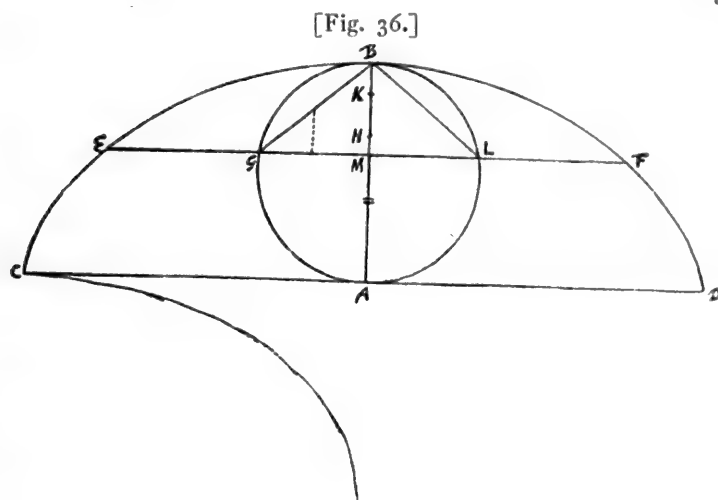
¹⁾ La page numérotée 78 par Huygens contient le „Lemma II” de la p. 364 et les alinéa's suivants jusqu'à celui qui commence par les mots „Ostendit Archimedes” (p. 366). Huygens y démontre e. a., que les lignes CD (Fig. 28, p. 366) peuvent être considérées comme proportionnelles aux cordes des angles CED, or, il en est de même des cordes AC [Fig. 28 et 33], puisque les angles CKA [Fig. 28] ne diffèrent pas sensiblement des angles CED.

²⁾ Lisez: ACD.

³⁾ On a *fh* = *ge* à cause de la situation symétrique des segments *CfD* et *CeA* par rapport à la droite qui joint le point C au centre du cercle.

⁴⁾ AB passe par le centre du cercle.

qua partium curvæ DC, MN [Fig. 31] centr. gr. invenitur ⁷⁾. Unde deinde deducitur ⁸⁾ centr. gr. partis DAM esse in P ut sit $AP \propto \frac{1}{3} AQ$.



Est ergo hæc proprietas Cycloidis et miranda profecto, quod sicut centrum grav. totius curvæ axem ejus dividit, ita quoque centra gr. cujusque partis recta basi parallela abscissæ suos axes dividunt, nempe ut pars ad verticem triens sit axis totius ⁹⁾. Ita hic BK

[Fig. 36] est $\frac{1}{3} BM$,

ideoque K centrum

gr. curvæ EBF. Cum autem BG semper sit dimidia curvæ BE, hinc jam superficiei magnitudinem quæ fit conversione curvæ EBF circa basim EMF facile inveniemus. habet enim superficies ejusmodi ad superficiem ad eam quæ fit conversione utriusque rectæ GB, BL, circa GL, rationem compositam ex ratione curvæ EBF ad utrumque simul GB, BL et ex ratione KM ad dimidiam BM, cum in media BM sit centr. gr. duarum GB, BL. Erit igitur superficiei ex curva EBF genitæ ad superficiem è duabus GB, BL, hoc est ad duplicem conicam superficiem, rationem compositam ex 2 ad 1 et ratione 4 ad 3, nam curva est ad dictas duas rectas ut 2 ad 1, et KM ad $\frac{1}{2} BM$ ut 4 ad 3. Est ergo ratio ea quæ 8 ad 3. Idque perpetuo. unde superficies a tota curva CBD circa basim ad superficiem circuli genitoris erit ut 64 ad 3 ¹⁰⁾, sive ut $21\frac{1}{3}$ ad 1.

⁷⁾ Voir le deuxième alinéa du § 3, p. 368.

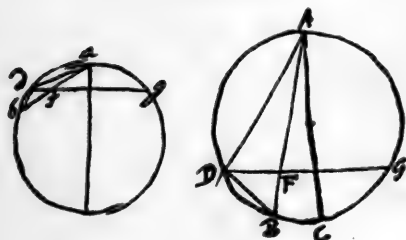
⁸⁾ Au même § 3.

⁹⁾ Comparez la note 5 de la p. 369. Dans sa lettre à Pascal (p. 341 du T. II) Huygens s'exprime comme il suit: „et peu de temps après avoir envoyé cette lettre” (il s'agit d'une lettre à de Carcavy du 16 janvier 1659, p. 315 du T. II). „j'ay encore trouué le centre de gravité de la ligne Cycloïde, et des parties coupées par une parallèle à la base, qui ont cette propriété estrange que leur centre de gravité divise leur axes tousjours en la raison de 1 à 2. comme vous savez Monsieur”.

¹⁰⁾ Ce résultat fut communiqué à Wallis dans la lettre du 31 janvier 1659 (p. 329 du T. II), bien qu'il ne soit pas mentionné dans le sommaire que nous en possédons. Cela résulte de la

LEMMA II.

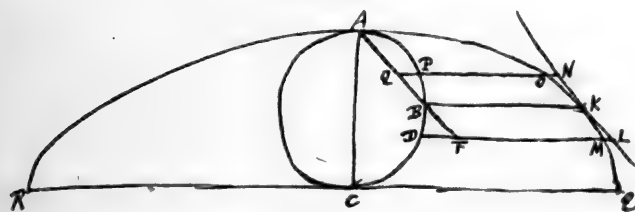
[Fig. 39].



AC diam. AB linea. DFG perp. AC.
demonstrandum arcum BD majorem
recta DF.

ducatur subtensa DB. arcus AG \propto AD,
Ergo $\angle ADG \propto ABD$. \angle autem DFB \propto
 $\propto ADG + DAF$. Ergo $\angle DFB \parallel \angle ABD$.
Ergo in $\triangle DFB$ latus DB \parallel latere DF. quare
multo magis arcus BD major recta DF.

[Fig. 40.]



[THEOREMA.]

Sit RAQ Cycloides.
K datum in ipsa punctum in quo tangens fit
ducenda. ABC est cir-
culus genitor intra cy-
cloidem constitutus.

Sit KB parall. bafi QC, et jungatur BA, cui parallela sit NKL. dico eam tangere cycloidem in puncto K.

Sumatur enim in NKL punctum quodvis præter K, ac primo altius ut N, unde agatur NQ parall. BK, quæ occurrat cycloidi in O circulo ABC in P.

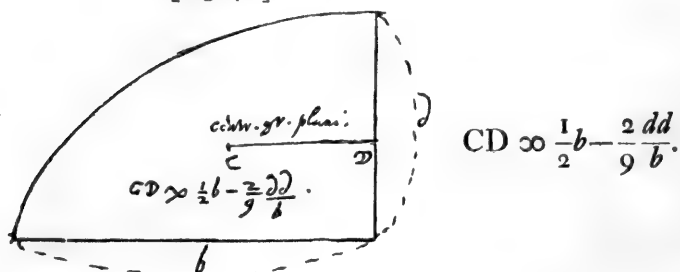
Quia ergo PO est ∞ arcui PA ut superius dem. 5) erit QO ∞ arc. PA + PQ. hisce autem duobus major est arc. APB, quia arc. PB major rectâ PQ per lemm. secund. Estque arcui APB æqualis BK sive QN. Ergo QN major quam QO. Ergo punctum N est extra cycloidem.

deinde infra K sumatur in KL punctum L et ducatur LD parall. KB. occurrens cycloidi in M, productaque AB in F. Ergo quia $DM \propto$ arcui DBA. DF autem major arcu DB per lemma I. Erit FM minor arcu BA, hoc est rectâ BK five FL. Ergo punctum L extra cycloidem. Est ergo NKL tangens in K.

⁵⁾ Voir le § 1 de la Première Partie, p. 347.

[CINQUIÈME PARTIE] ¹⁾.

[Fig. 41.]

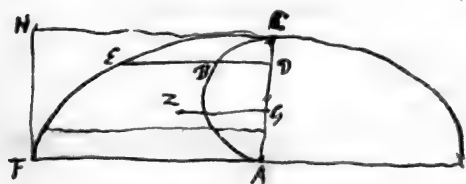


¹⁾ Vers la fin du mois de mai 1659, Huygens reçut enfin les „Lettres de A. Dettonville contenant quelques unes de ses Inventions de Geometrie” (voir l’ouvrage marqué *c*, cité dans la note 32, p. 307 du T. II), où Pascal expose les méthodes qui l’avaient conduit à la résolution des problèmes sur la cycloïde. À ce propos Huygens écrivit à de Carcavy dans une lettre du 22 mai 1659 (p. 411 du T. II) qu’il admira „de plus en plus la subtilité des écrits de Monsieur Dettonville, mais” ajouta-t-il „il faut avouer que c’est un labyrinthe lors que l’on veut faire la construction de quelque probleme”. C’est ce qui le porta à entreprendre des calculs précis, d’après les méthodes de Pascal, de la distance à l’axe du centre de gravité d’un demi-segment de cycloïde dans les deux cas spéciaux signalés auparavant par Pascal (voir la note 1 de la p. 348). Or, la figure du texte nous fait connaître le résultat de son calcul dans le premier de ces cas, tandis que dans la lettre à de Carcavy déjà mentionnée, il dit avoir trouvé dans le deuxième cas (celui où le demi-segment cycloïdal est limité par la droite décrite par le centre du cercle générateur) pour la distance du centre de gravité à l’axe une valeur qui, exprimée dans les notations de la Fig. 41, est représentée par la forme $\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}b - \frac{17}{12}\frac{d^2}{2d+b}$. Après quoi il prie de Carcavy de lui mander s’il a „bien supputé.”

Ajoutons que nous avons vérifié, par l’analyse moderne, l’exactitude des deux résultats.

APPENDICE À LA PIÈCE N^o. XI³).

[1691]³⁾



CF $\frac{1}{2}$ Cyclois. CA axis seu diameter circuli genitoris CBA. DE applicata ad axem, secans circumf.^m in B.

Solidum ex spatio CAF circa axem, itemque centri gravitatis Z distantia ab axe, quæ est ZG, cognoscetur, si detur summa quadratorum DE⁴). hoc est summa quadratorum BD, summa quadratorum BE, et summa duplorum rectangulorum DBE.

Sit $\frac{1}{2}AC$ seu radius circuli genitoris R. Circumferentia tota P.

Summa quad.^{orum} DB est $\frac{4}{3}R^3$, quod facile cognoscitur ex proportionibus sphaeræ ad circumscriptum cylindrum⁵). Summa quad.^{orum} BE apud Wallisum in libro de Motu⁶), ostenditur æqualis $\frac{1}{4}RP^2 - 4R^3$, difficili fatis demonstratione ex ungula super involucro cylindrico expanso⁷).

²) La Pièce est empruntée à la p. 126 recto du Manuscrit G. Elle contient la détermination de la distance ZG du centre de gravité Z à l'axe AC de l'espace cycloïdal CFA à l'aide des méthodes exposées par Wallis dans ses ouvrages „Tractatus Duo. Prior, De Cycloïde Posterior, Epistolaris” (1659) et „Mechanicorum, sive Tractatus De Motu, Pars secunda” (1670). À cette occasion Huygens corrige deux erreurs qui se trouvent dans l'édition originale des „Tractatus Duo”, citée dans la note 3 de la p. 518 du T. II.

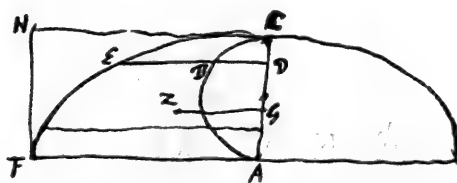
³) D'après le lieu que la Pièce occupe dans le Manuscrit G.

⁴) En langage moderne $\sum DE^2$ représente $\int y^2 dx$, où $y = DE$, $x = CD$.

⁵) On a évidemment $\frac{\sum BD^2}{\sum R^2} = \frac{\text{vol. sphère}}{\text{vol. cyl. circ.}} = \frac{2}{3}$, où $\sum R^2 = \int_0^{2R} R^2 dx = 2R^3$.

⁶) Voir l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 38 du T. VII.

⁷) Au § G de la „Prop. XVII” du „Caput V”; voir les p. 759—760 du „Volumen Primum” des „Opera Mathematica” de Wallis, Oxoniæ, E Theatro Sheldoniano, 1695.



Summa duplorum rectangulorum, apud eundem in libro de Cycloide, invenitur facili ratiocinio æqualis $\frac{1}{8}RP^2$ ¹⁾. Sed tantum ad solidum integrum ex CFA pertinet. GA est æqualis $\frac{5}{6}R^2$). quam in libro de

Cycloide Wallifius facit $\propto \frac{3}{4}R^3$).

$$\frac{4}{3}R^3 + \frac{1}{4}RP^2 - 4R^3 + \frac{1}{8}RP^2 \text{ five } \frac{3}{8}RP^2 - \frac{8}{3}R^3 \text{ summa quorum DE.}$$

$$\text{Summa quadratorum AF in } \square^o \text{ AH } \propto \frac{1}{2}RP^2.$$

$\frac{1}{2}RP^2$ [ad] $\frac{3}{8}RP^2 - \frac{8}{3}R^3$ [five] P^2 [ad] $\frac{3}{4}P^2 - \frac{4}{3}R^2$ ⁴⁾ ut cylindrus ex \square^o AH circa CA ad solidum ex $\frac{1}{2}$ Cycloide CFA. hinc $ZG \propto \frac{1}{4}P - \frac{16}{9}\frac{R^2}{P}$ ⁵⁾. quam in libro de Cycloide Wallifius statuit $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$ ⁶⁾. Postea vero correxit in lib. de Motu⁷⁾.

Observandum in hoc et omni calculo summam quadratorum esse duplam momenti quod vocant, hoc est, duplam ejus quod fit ex figura plana proposita, in distantiam ipsius centri gravitatis⁸⁾.

¹⁾ Voir le § 81 des „Tractatus Duo”, p. 516 du „Volumen Primum” cité dans la note 7 de la page précédente. L’artifice en question est basé sur la remarque que dans la Fig. 2 de la p. 348 on a $GF = ML$ et $EG + NM = AD$; par suite, dans la présente figure, $2 \times EB \times BD$ est égal au volume d’un cylindre qui a pour base le demi-cercle CBA et pour hauteur la ligne AF.

²⁾ Comparez la dernière ligne de la p. 355.

³⁾ Voir le § 36 de l’ouvrage cité; mais l’erreur a été corrigée depuis dans le „Volumen Primum” (p. 505).

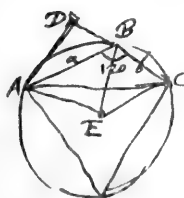
⁴⁾ Lisez: $\frac{3}{4}P^2 - \frac{16}{3}R^2$.

⁵⁾ Puisque les volumes du cylindre et du solide décrit par la demi-cycloïde sont dans la raison composée des aires du rectangle et de la demi-cycloïde (qui sont de 4 à 3; voir le § 2, p. 348) et des distances de leurs centres de gravité à l’axe CA. On a donc $P^2 : \left(\frac{3}{4}P^2 - \frac{16}{3}R^2 \right) = 4 \times \frac{1}{4}P : 3 \times ZG$, et par suite $ZG = \frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; résultat conforme à celui indiqué dans l’inscription de la Fig. 41, p. 376, puisqu’on a $P = 2b$ et $R = \frac{1}{2}d$.

⁶⁾ Voir le § 35 des „Tractatus duo”; mais le résultat erroné fut corrigé depuis à la p. 505 du „Volumen Primum”.

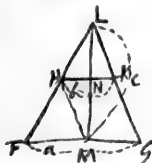
[1658].

[Fig. 1.]



Eft enim $qu.AC \propto qu.AB + qu.BC + 2 \square CBD$, at $2 \square CBD = \square ABC$ quia $AB \propto 2BD$. Ergo &c.

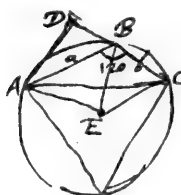
[Fig. 2.]


$$MN \propto \frac{bc}{a} \propto \frac{ac - bc}{a}$$

$$3 \text{ con.FLG } (aac) - 3 \text{ con.HLK } \left(\frac{b^3c}{a} \right) [\infty] \frac{a^3c - b^3c}{a}$$

¹⁰⁾ Voici ce théorème tel qu'il est formulé dans l'„Epistola XXIII” du „Commercium epistolicum”: „Sit Pyramidis vel Coni Frustum (parallelis planis abscissum:) Cujus Basis major, æquetur quadrato rectæ A; minor, quadrato rectæ E; Altitudo, F. Dico, Si cruribus A, E (vel his æqualibus) constituatur angulus graduum 120, & compleatur Triangulum, eique circumscribatur Circulus: Quadratum Radii circuli circumscripti, in Altitudinem Frusti ductum, æquatur Frusto.” (Voir la p. 110 de l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 192 du T. II, ou la p. 817 du „Volumen Alterum” de l'„Algebra” de Wallis, cité dans la note 10 de la p. 9 du présent Tome).

[Fig. 1.]



3 frustum FHKG divif. per MN $\propto \frac{a^3c - b^3c}{ac - bc} \propto aa + ab +$
 $+ bb \propto \text{qu. AC}$ [Fig. 1] ($AB \propto FG \propto a$; $BC \propto HK \propto b$) cujus
 $\frac{1}{3}$ est qu. EB. unde cylind. cujus diameter circ. baseos fit EB,
 altit. MN [Fig. 2] æquabitur frusto FHKG.

Wallisius invenit sed minus commode demonstravit ¹⁾.

[Fig. 2.]



¹⁾ Comparez la lettre de Huygens à Wallis du 6 septembre 1658 (p. 212 du T. II) où l'on lit:
 „Theorema tuum p. 110 propositum elegantissimum est. potuit tamen proprietas illa trianguli
 amblygonij 120 graduum multo brevius alio modo demonstrari.” Voir, pour la réponse de
 Wallis, sa lettre du 1 janvier 1659, p. 298 du T. II, ou la dernière page de l'ouvrage cité
 dans la note 3, p. 518 du T. II, où il a publié sa réponse.

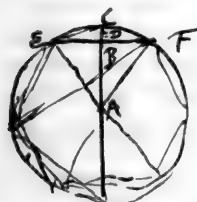
XIII²⁾.

[1659].

[Dédution d'un théorème de cyclométrie, basée sur la situation connue du centre de gravité d'un arc de cycloïde].

§ 1³⁾.

[Fig. 1.]



[Fig. 2.]



10000000 [AC]

8660254 AB

1339746 BC

446582 DC

9553418 AD [ad] 10000000 (AC) [ut

10000000] EF [ad (arc. ECF)] 104695⁴⁾

3

314085⁵⁾

²⁾ Nous reproduisons dans cette Pièce un théorème de cyclométrie et quelques annotations qui s'y rapportent. On les trouve aux p. 75 et 76 du Manuscrit A, lesquelles pages suivent immédiatement celles dont nous avons emprunté les §§ 3 et 4 de la Troisième Partie de la Pièce N^o. XI (p. 368—374), qui traitent de la détermination du centre de gravité d'un arc cycloïdal. En effet, on verra qu'il s'agit d'une application cyclométrique de cette détermination.

³⁾ Dans ce premier paragraphe Huygens calcule la valeur approximative qu'on trouverait pour le nombre π en supposant que le centre de gravité D [Fig. 1] d'un arc de 60° coïncide avec celui d'un arc cycloïdal possédant la même flèche, auquel cas on aurait $CD = \frac{1}{3} CB$.

⁴⁾ Nous supprimons les calculs. On trouve en vérité 104675.

⁵⁾ Lisez: 314025.

§ 3³⁾.

$$\begin{aligned}
 b + \frac{b-a}{3} &\infty \frac{3bb}{2b+a} \\
 \frac{4b}{3} - \frac{1}{3}a &\infty \frac{3bb}{2b+a} \\
 \frac{8}{3}bb + \frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}aa &\infty 3bb \\
 8bb + 2ab - aa &\infty 9bb \\
 2ab - aa &\infty bb
 \end{aligned}$$

§ 4.

$$\begin{aligned}
 3a + 2b [\text{ad}] \quad 4b + a [\text{ut}] \quad \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a [\text{ad}] \quad \frac{\frac{4}{3}bb - ab - \frac{1}{3}aa}{3a + 2b} \\
 b + \frac{\frac{4}{3}bb - ab - \frac{1}{3}aa}{3a + 2b} &\infty \frac{3bb}{2b + a} \\
 \frac{2ab + \frac{10}{3}bb - \frac{1}{3}aa}{3a + 2b} &\infty \frac{3bb}{2b + a} \\
 \frac{\frac{2}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 + \frac{4}{3}aab}{3} &\infty \frac{5abb}{3} \\
 \frac{2b^3 - a^3}{3} &\infty 5abb - 4aab \\
 2b^3 - 5abb &\infty a^3 - 4aab \quad (b \infty c + a)^4)
 \end{aligned}$$

XVI" de l'ouvrage „De circuli magnitudine inventa" (voir la p. 159 du T. XII). Cela résulte de la comparaison des notes 27, p. 99—100, et 33, p. 159, du T. XII; mais il est probable que Huygens ne s'en est pas aperçu à cause de la dissemblance des énoncés.

- 3) Dans ce paragraphe et dans le suivant, qui se trouve à côté, Huygens compare l'approximation nouvellement obtenue à celles énoncées dans le „Theor. XVI, Prop. XIX" de son ouvrage „De circuli magnitudine inventa", p. 169 du T. XII.

Or, la dernière équation du § 3 doit être remplacée évidemment par $2ab - aa < bb$ (puisque $0 < (b-a)^2$). Remontant ensuite la chaîne des équations, on trouve $b + \frac{b-a}{3} < \frac{3bb}{2b+a}$, d'où il suit (parce qu'il s'agit d'une limite inférieure) que la nouvelle formule donne une meilleure approximation que celle à laquelle elle est comparée.

Appliquant le même raisonnement au § 4, on trouve d'abord (en posant $b = a + c$, comme Huygens l'indique) $2b^3 - 5abb > a^3 - 4aab$, d'où il suit $b + \frac{\frac{4}{3}bb - ab - \frac{1}{3}aa}{3a + 2b} > \frac{3bb}{2b + a}$; résultat qui était à prévoir, puisque la première expression représente une limite supérieure et l'autre une limite inférieure.

Ajoutons ici que l'article de M. F. Schuh, dont nous avons fait mention dans la note 51 à la p. 174 du T. XII, a paru en 1913 et 1914 dans le T. III (Série IIIA) des Archives Néerlandaises (p. 1—178 et 229—323). On y trouvera une étude approfondie, d'après une méthode nouvelle, des diverses approximations qu'on a proposées pour l'arc de cercle.

- 4) Outre les annotations que nous venons de reproduire, on trouve encore aux p. 75 et 76 du Manuscrit A des calculs qui se rapportent à l'application du théorème nouveau aux cas des polygones à 16 et à 60 côtés.

XIV^o.

[1659].

[*Solution d'un problème d'arithmétique*].

Op de 10^{de} questie²⁾ van Everfdyck³⁾ bijgevoeght achter de Arithm. Coutereels⁴⁾.

het blijft twijfelachtig of sijn dienst van jaer tot jaer verbetert in arithmetische progressie, of wel van maent tot maendt. Ick verstaen dat hij meent van maendt tot maendt. want indien sijn dienst gestelt wert te verbeteren niet alleen gedurende de 5 jaer die hij bij sijn meester is geweest, maer ook in ieder van de 7 maenden, gelijk het inderdaet wert gestelt, soo moet oock deselfde verbetering in den voor-

Traduction:

Sur la dixième question d'Everfdyck ajoutée derrière l'Arithmétique de Coutereels²⁾.

il reste douteux si son service s'améliore d'année en année ou bien de mois en mois. Je suppose qu'il entend de mois en mois. Car, si le service du valet fût posé s'améliorer non seulement pendant les 5 années qu'il est demeuré chez son maître, mais aussi dans chacun des sept mois, comme cela fut posé en effet, il faut aussi que la même amélioration soit

¹⁾ La Pièce est empruntée à la p. 153 du Manuscrit A.

²⁾ Voici cette question avec la traduction que nous en donnons: „Een Meester neemt een knecht aen voor 7 jaren; onder conditie dat hij hem ten eynde des tijds, voor sijnen dienst, betalen sal (boven sijne mont-kosten &c.) 40 fl. Maer in-dien hij op 't eynde van 't derde jaer begeert te vertrecken, soo sal hij aan sijnen Meester betalen 60 fl. overmits sijnen dienst gerekent wert te verbeteren van 't beghin tot den eynde toe, gelijk eene *Arithmetische Progressie*; Het ghebeurt nu na 5 jaren en 7 maenden dat sy-lieden, met beyder bewilliginghe,

gaenden tijdt te weten in de 5 jaeren van maendt tot maendt gerekent werden. de Progressie dan op maenden genomen sijnde soo meen ick dat hij ten eijnde van de eerste maend verdient heeft x gl. ergo de 36^{ste} maendt $36x$ + al het geen hij de voorgaende maenden verdient heeft. dat is te samen $666x$. maer daer wert geseght dat hij met dit derde jaer vertreckende soude moeten 60 guld. aen sijn meester geven, boven dat hij niets soude genieten van het verdiende. Ergo geeft hij in 3 jaren aen sijn meester $666x + 60$ hoe veel dan in 7 jaer komt $1554x + 140$. Vorders is hetgeen hij ten eijnde van 7 jaer ofte 84 maenden verdient

Traduction:

comptée de mois en mois dans le temps qui précède, favoir, dans les 5 années. Prenant donc la progression par mois, je suppose qu'il ait gagné le premier mois x florins; par suite le 36^{ième} mois $36x$ augmenté de tout ce qu'il a gagné dans les mois précédents; ce qui est ensemble $666x$. Mais il est dit que s'il partait après la troisième année, il devrait donner 60 florins à son maître, outre qu'il ne profiterait pas de ce qu'il avait gagné. Par conséquent il donne en 3 années à son maître $666x + 60$, combien donc en 7 années? Il vient $1554x + 140$. Ensuite ce qu'il a gagné après 7 années,

van malkanderen scheiden, midts betalende naer advenant van de eerste conditie; *De vrage is*, hoe dat het met de rekeninghe staet? *Antw.* de Knecht moet aen sijn Meester betalen $18\frac{317}{336}$ ƒ 3. [Un Maître prend un valet pour 7 années; sous condition qu'il lui payera (en dessus de ses vivres, &c.) à la fin de cette période la somme de 40 ƒ 3. Mais s'il désire partir à la fin de la troisième année, il payera à son Maître 60 ƒ 3. parce qu'il est supposé que son service s'améliore du commencement jusqu'à la fin d'après une *Progression Arithmétique*. Or, il arrive, après 5 années et 7 mois, qu'ils veulent se quitter de consentement mutuel, pourvu que le paiement aura lieu suivant la condition prémentionnée; *On demande* comment ce paiement doit être réglé. *Rép.* Le Valet doit payer à son Maître $18\frac{317}{336}$ ƒ 3.]

On trouve ce problème à la p. 460 de l'ouvrage suivant: „Arithmetica Van Mr. Johan Coutereels Van Antwerpen; Nu nieuwelijcx oversien, alle Questien na-gerekent, en van on-tallicke fauten gesuyvert; Item vermeerderd met *d'Algebraïsche werckingen*, uyt het Fransche Exempelaer over-geset; met by-voeginghe van verscheiden andre fraeye Questien, en noodige annotatien. Door Cornelis Fr. Eversdyck, Reken-meester's Lants ende Graeffelijckheys van Zeelant. Tot Middelburgh, Bij Jaques Fierens, Anno MDCLVIII. Met privilegie voor tien jaren.”

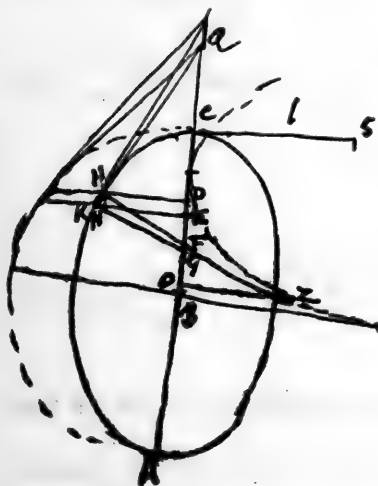
- 3) Cornelis Fransz. Eversdyck appartenait à une famille distinguée de la Zélande. Il naquit à Goes le 20 mai 1586 et mourut à Middelbourg le 19 décembre 1666. Élève de Johan Coutereels, il était l'auteur de plusieurs traités d'arithmétique pratique.
- 4) Johan Coutereels d'Anvers s'établit, vers 1594, à Middelbourg en Zélande, où il enseigna les mathématiques. De son traité d'arithmétique, publié en 1599 chez Symon Moulert à Middelbourg, des réimpressions hollandaises parurent en 1606 et en 1610, tandis que l'édition française, mentionnée dans le titre de l'édition de Eversdyck, citée dans la note 2, parut en 1620.

XV¹⁾.

[1659.]

[Recherches sur la théorie des développées.]

[Fig. 1].



§ 1²⁾.

$AC \propto a$; l. r. $CS \propto b$; $BD \propto c$; $BE \propto d$.

$AB^3) (a) [ad] CS (b) [ut] BD (c) [ad]$
 $DF \left(\frac{bc}{a}\right)^4)$

$AB^3) (a) [ad] CS (b) [ut] BE (d) [ad] EG \left(\frac{bd}{a}\right)$
 $DF \left(\frac{bc}{a}\right) f[ubtr]. DE (c-d); EF \left(\frac{bc}{a} - c + d\right)$
 $ex EG \left(\frac{bd}{a}\right); FG \left(\frac{bd}{a} - \frac{bc}{a} + c - d\right)$

¹⁾ La Pièce, que nous avons divisée en paragraphes, est empruntée aux pp. 181—185, 192—208 et 226 du Manuscrit A.

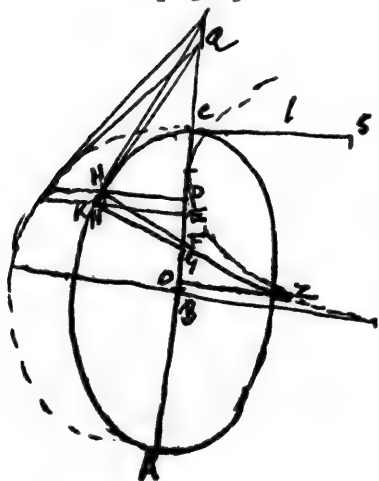
²⁾ Dans ce paragraphe Huygens s'occupe de la développée de l'ellipse. La méthode suivie pour déterminer cette courbe est expliquée par lui dans la „Prop. XI” de la „Pars tertia” de son „Horologium Oscillatorium” (p. 81—82 de l'édition originale). Pour l'exposer en quelques mots, soit R le point où les lignes KE et HN (parallèle à l'axe BC) de la Fig. 1 se coupent, Z le point d'intersection des normales consécutives HF et KG; on a alors $\frac{HZ}{FZ} = \frac{HN}{FG} = \frac{HN}{HR} \times \frac{DE}{FG} = \frac{QG}{QE} \times \frac{DE}{FG}$. Par suite, afin de connaître le point Z de la développée, qui correspond au point H de l'ellipse, il suffira de déterminer les deux rapports $\frac{QG}{QE}$ et $\frac{DE}{FG}$. Or, dans la présente Pièce, Huygens commence par chercher le deuxième rapport, qu'il trouve égal à $\frac{a}{a-b}$; ensuite il remplace le premier rapport par $\frac{QF}{QD}$ dont il ne diffère qu'insensiblement à cause de la situation rapprochée des points K et H.

³⁾ Lisez AC.

⁴⁾ Calcul de la sous-normale. La formule se déduit facilement de celle pour FC de la p. 317 en substituant b pour r , a pour q et $\frac{1}{2}a - c$ pour x .

$$\text{DE } (c-d) [\text{ad}] \text{FG} \left(\frac{bd}{a} - \frac{bc}{a} + c-d \right) [\text{ut}] ac - ad [\text{ad}] bd - bc + ac - ad$$

[Fig. 1.] [i. e. ut] $a [\text{ad}] a - b$.



$$\text{DC} \left(\frac{1}{2}a - c \right); \text{DA} \left(\frac{1}{2}a + c \right). [\text{DA} - \text{DC}]$$

$$(2c) [\text{ad}] \text{DC} \left(\frac{1}{2}a - c \right) [\text{ut}] \text{AC} (a) [\text{ad}] \text{CQ}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}aa - ac}{2c} \right)^1; \text{CQ} \frac{\frac{1}{2}aa - ac}{2c} \text{ad}[\text{de}] \text{CD}$$

$$\frac{1}{2}a - c; \text{QD} \frac{\frac{1}{2}aa - 2cc}{2c} - [\text{adde}] \text{DF} \frac{bc}{a}; \text{QF}$$

$$\frac{\frac{1}{2}aa - 2cc}{2c} + \frac{bc}{a}.$$

ratio HZ ad ZF componitur ex rationibus $\text{QF} \left(\frac{\frac{1}{2}aa - 2cc}{2c} + \frac{bc}{a} \right) [\text{ad}] \text{QD}$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}aa - 2cc}{2c} \right) \text{et DE ad FG [h. e.] } a \text{ada} - b^2). \text{Ergo est ea quæ } \frac{1}{2}a^3 - 2acc + 2bcc$$

$$[\text{ad}] \frac{1}{2}a^3 - 2acc - \frac{1}{2}aab + 2bcc. \text{Ergo HF ad FZ ut } \frac{1}{2}aab [\text{ad}] \frac{1}{2}a^3 - 2aac -$$

$$- \frac{1}{2}aab + 2bcc [\text{h. e.}] [\text{ut}] \frac{1}{2}aab [\text{ad}] \frac{1}{4}aa - cc.$$

$$\text{HF ad FZ [componitur] ex } \frac{1}{4}aa [\text{ad}] \frac{1}{4}aa - cc [\text{et}] b [\text{ad}] a - b^3).$$

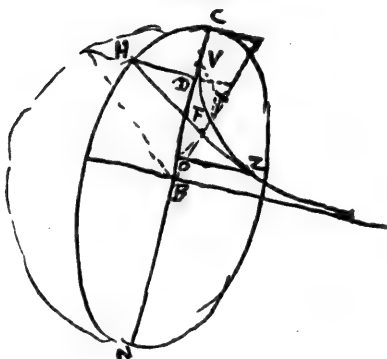
¹⁾ Cette proportion résulte immédiatement de celle (DA : DC = QA : QC) qu'on trouve formulée dans la „Prop. XXXV I” du „Lib. I” des „Con.” d'Apollonius; voir la p. 26 verso de l'édition de Commandin.

²⁾ Consultez la note 2 de la page précédente.

³⁾ À l'aide de cette relation il est possible de construire la développée de l'ellipse point par point; mais Huygens désire connaître l'équation de cette courbe afin de savoir si elle est algébrique et jusqu'à quel degré son équation s'élève. À cet effet il prend pour origine le point V de la Fig. 2, posant VO = x, OZ = y. Or, afin de trouver le point V, il suffit de remarquer que CV est égal à la limite de DF = $\frac{bc}{a}$ pour BD = c = $\frac{1}{2}a$. On a donc CV = $\frac{1}{2}b$.

⁴⁾ Le segment BD est déjà représenté par c (voir la première ligne du présent paragraphe). Or,

[Fig. 2.]



$$q.DF\left(\frac{bbzz}{aa}\right) [ad] \quad q.DH\left(\frac{aab-bzz}{a}\right) [ut]$$

$$q.FO\left(\frac{zz \text{ in } qu.a-b \text{ in } qu.\frac{1}{4}aa-cc}{\frac{1}{16}a^6}\right)$$

$$[ad] \quad qu.OZ(vv)$$

$$ab [ad] aa-zz [ut] \frac{qu.a-b \text{ in } qu.\frac{1}{4}aa-cc}{\frac{1}{16}a^4}$$

$$[ad] vv^1)$$

$$\text{fit } \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \propto p [\infty] BV. \text{ ergo } z \propto \frac{pa^3 - a^3x}{8pcc}. \text{ fit } y \propto p - x \propto BO^2) \text{ ergo}$$

$$z \propto \frac{a^3y}{8pcc}. \text{ fed } c \text{ est } \propto z. z^3 \propto \frac{a^3y}{8p}.$$

$$ab [ad] aa - \sqrt{\frac{a^6yy}{64pp}} [ut] \frac{4pp \text{ in } qu.\frac{1}{4}aa - a \sqrt{\frac{a^3yy}{64pp}}}{\frac{1}{16}a^4} [ad] vv$$

$$\frac{bvv}{app} \propto 4 - \frac{yy}{pp} - 9 \sqrt{\frac{yy}{pp}} + 6 \sqrt{\frac{y^4}{p^4}}. \text{ fit } \sqrt{\frac{y}{p}} \propto e. \frac{bvv}{app} - 4 - \frac{yy}{pp}^3)$$

$$\text{vocetur } f. f \propto -9ee + \frac{6ey}{p}; fe \propto -\frac{9y}{p} + \frac{6eey}{p}; \frac{pfe}{y} + 9 \propto 6ee; \text{ substituto valore}$$

$$-9ee; f^4) \propto -\frac{3pfe}{2y} - \frac{27}{2} + \frac{6ey}{p}; \frac{2pyf + 27py}{12yy - 3ppf} \propto e; e \propto$$

$$\propto \frac{2bvv + 19appy - 2ay^3}{15apyy - 3bpvv + 12ap^3} \propto \sqrt{\frac{y}{p}}^5)$$

$$\text{fi } p \propto \frac{1}{4}a \text{ etiam } b \propto \frac{1}{2}a; \frac{vv + \frac{19}{16}aay - 2y^3}{\frac{15}{4}aay - \frac{3}{8}avv + \frac{3}{16}a^3} \propto \sqrt{\frac{y}{p}}.$$

¹⁾ Nous supprimons, ici et ailleurs, quelques calculs intermédiaires.

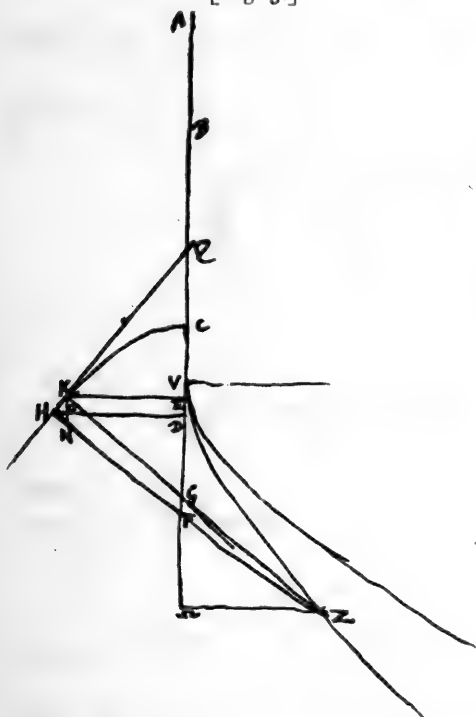
²⁾ B peut donc être considéré comme l'origine des coordonnées y et v.

³⁾ Lisez : $+\frac{yy}{pp}$. Nous n'indiquons pas les corrections qui devraient résulter de cette inadvertance. Le résultat final resterait inexact à cause de l'erreur signalée dans la note 5 de la p. 389.

⁴⁾ Ici Huygens reprend l'équation $f \propto -9ee + \frac{6ey}{p}$ pour y substituer la valeur de ee déduite de l'équation qui précède.

§ 2⁶).

[Fig. 3.]

l. tr. $\propto a^7$); l. r. $\propto b$; $BD \propto c$; $BE \propto d$. $DF \propto \frac{bc}{a}$ ⁵) a[dde] $DE \propto c-d$, EF $[\infty] \frac{bc}{a} + c-d$ [ubtr]. $\frac{bd}{a} [\infty] EG$; GF $[\infty] \frac{bc}{a} - \frac{bd}{a} + c-d$. $GF \left(\frac{bc}{a} - \frac{bd}{a} + c-d \right) [ad] DE (c-d)$
[ut] $b+a$ [ad] a $BD (c) [ad] BC \left(\frac{1}{2}a \right) [ut] BC \left(\frac{1}{2}a \right)$ $[ad] BQ \left(\frac{\frac{1}{4}aa}{c} \right)$ ⁹) $DQ [\infty] c - \frac{1}{4} \frac{aa}{c}$ a[dde] $DF [\infty] \frac{bc}{a}$; $QF [\infty] \frac{cc - \frac{1}{4}aa}{c} + \frac{bc}{a}$

ratio KN ad GF five KZ ad ZG componitur ex rationibus NK ad KO [five]
 QF [ad] QD [five] $cc - \frac{1}{4}aa + \frac{bcc}{a}$ [ad] $cc - \frac{1}{4}aa$ et DE [ad] GF [five] a [ad]
 $a+b$.

ergo ratio KZ [ad] ZG [ut] $acc - \frac{1}{4}a^3 + bcc$ [ad] $acc - \frac{1}{4}a^3 + bcc -$

⁵) Consultez sur ce résultat erroné la note 5 de la p. 389.

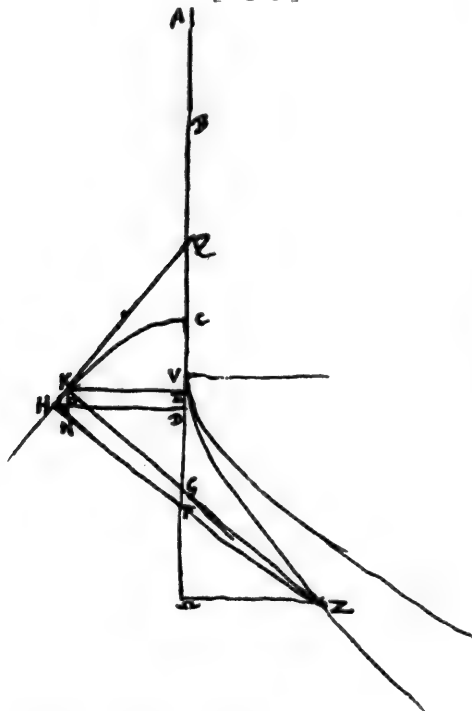
⁶) Dans ce paragraphe Huygens s'occupe de la développée de l'hyperbole.

⁷) On a donc, dans la Fig. 3, $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Si dans cette figure la distance AB est prise plus courte que BC , c'est parce que la figure s'approchait trop du bord de la page du manuscrit pour pouvoir prendre BA égal à BC .

⁸) Cette expression pour la sous-normale se déduit aisément de celle de la p. 315 en posant $r=b$; $q=a$; $x=c - \frac{1}{2}a$.

⁹) Voir la proposition d'Apollonius citée dans la note 4 de la p. 341.

[Fig. 3.]



$$-\frac{1}{4}baa; \text{dividendo, ratio KG [ad] GZ}$$

$$[\text{ut}] \frac{1}{4}aab [\text{ad}] \overline{a+b} \cdot cc - \frac{1}{4}aa^3)$$

$$\text{KG [ad] GZ [five]} \frac{1}{4}aab [\text{ad}]$$

$$\overline{a+b} \cdot cc - \frac{1}{4}aa [\text{ut}] \text{DF} \left(\frac{bc}{a} \right) [\text{ad}] \text{F}\Omega$$

$$\left(\frac{\overline{ac+bc} \cdot cc - \frac{1}{4}aa}{\frac{1}{4}a^3} \right)$$

$$\text{fit } a \propto b^2; \text{DF} \propto \frac{bc}{a} \propto$$

$$\propto c; \text{F}\Omega = \frac{2c^3 - \frac{1}{2}caa}{\frac{1}{4}aa}$$

$$\begin{aligned} \text{DV} &\propto \text{BD} - \text{BC} - \text{CV} [\infty] c - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a^3 \propto c - a [\text{adde}] \text{DF} (c) [\text{et}] \text{F}\Omega \\ \left(\frac{8c^3}{aa} - 2c \right) [\text{fit}] \text{V}\Omega &\propto \frac{8c^3 - a^3}{aa}; \frac{8c^3}{aa} \propto y \propto \text{B}\Omega^4); c \propto \frac{1}{2} \sqrt{\overline{caay}} \propto \text{BD} \propto \text{DF} \\ \text{qu. DF} (cc) [\text{ad}] \text{q. DH} \left(cc - \frac{1}{4}aa \right)^5 [\text{ut}] \text{q. F}\Omega \left(\frac{64cc}{a^4} \text{ in qu. } cc - \frac{1}{4}aa \right) \\ &[\text{ad}] \text{q. } \Omega \text{Z} (vv) \end{aligned}$$

¹⁾ La construction point par point de la développée est donc trouvée. Il s'agit dans la suite de la détermination de son équation.

²⁾ Huygens ne continue pas les calculs pour le cas général. Dès ici il se borne à celui de l'hyperbole équilatère.

³⁾ On a $\text{CV} = \frac{1}{2}a$, puisque CV est égale à la valeur limite de DF pour $c = \frac{1}{2}a$.

⁴⁾ Puisqu'on a $\text{B}\Omega = \text{V}\Omega + \text{CV} + \text{BC} = \frac{8c^3 - a^3}{aa} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = \frac{8c^3}{aa}$.

⁵⁾ Valeur de l'ordonnée de l'hyperbole équilatère correspondant à l'abscisse $\text{BD} = c$.

⁶⁾ L'équation de la développée de l'hyperbole équilatère est donc trouvée. Il s'agit maintenant de la rendre rationnelle. À cet effet Huygens pose $\sqrt{ay^2} = e$.

⁷⁾ Cette équation est obtenue en substituant la valeur de ee , déduite de l'équation précédente, dans la première équation $f = 3aee - 3aee$.

$$aa[ad]cc - \frac{1}{4}aa[ut] \frac{64qu.cc - \frac{1}{4}aa}{aa} [ad]vv$$

$$aa[ad] \frac{1}{4} \sqrt{\overline{Ca^4yy}} - \frac{1}{4}aa[ut] \frac{64qu. \frac{1}{4} \sqrt{\overline{Ca^4yy}} - \frac{1}{4}aa}{aa} [ad]vv$$

$$a[ad] \sqrt{\overline{Cayy}} - a[ut] qu. \sqrt{\overline{Cayy}} - a[ad]vv$$

$$ayy - 3a \sqrt{\overline{Caay^4}} + 3aa \sqrt{\overline{Cayy}} - a^3 \propto avv^6)$$

$$f \propto ayy - a^3 - avv \propto 3aee - 3aae$$

$$fe \propto 3aayy - 3aaee$$

$$\frac{3aayy - fe}{a} \propto 3aee$$

$$f \propto \frac{3aayy - fe}{a} - 3aae^7)$$

$$e \propto \frac{3aayy - af}{3a^3 + f}, \text{ restitue } f$$

$$\frac{2ayy + a^3 + avv}{yy + 2aa - vv} \propto e \propto \sqrt{\overline{Cayy}}$$

$$0 \propto y^8 - 2a^2y^6 - 3vvv^6 - 24a^2vvy^4 + 3v^4y^4 - 24vva^4yy - v^6yy + 2a^6yy - 3a^4v^4 - a^8 - 3a^6vv - a^2v^6. \text{ fortasse possit dividi. potest per } yy + aa^8).$$

$$\frac{3aayy - af}{3a^3 + f} \propto e^9); \frac{3aayye - afe}{3a^3 + f} \propto ee; \frac{f + 3aae}{3a} \propto \frac{3aayye - afe}{3a^3 + f}$$

$$3a^3f + 9a^5e + ff + 3aafe \propto 9a^3yye - 3aafe$$

$$\frac{3a^3f + ff}{9a^3yy - 6aaf - 9a^5} \propto e \propto \frac{3aayy - af}{3a^3 + f}$$

$$f^3 \propto 27a^5y^4 - 27a^4yyf - 27a^7y^2$$

$$\frac{f^3}{a^3} \propto 27aay^4 - 27ayyf - 27a^4yy$$

$$\frac{f}{a} \propto yy - aa - vv^{11})$$

⁸⁾ Comparez la note 4 de la p. 394 qui suit sur la méthode de Hudde par laquelle ce facteur peut avoir été découvert.

⁹⁾ Huygens reprend l'équation qu'il a trouvée quatre lignes plus haut.

¹⁰⁾ Cette expression pour ee est déduite de l'équation $f = 3aee - 3aae$ qu'on trouve plus haut.

¹¹⁾ Voir, plus haut, au lieu où la lettre f est introduite pour la première fois.

$$y^6 - 3aay^4 - 3vvy^4 + 3a^4yy + 6aavvyy + 3v^4yy - a^6 - 3a^4vv - 3aav^4 - v^6 \infty \\ \infty 27aavvyy$$

est nihil aliud quam cub. $\sqrt{yy - aa - vv - 27yyaavv} [\infty 0]^1)$

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{3}yy - \frac{1}{3}vv - \frac{1}{12}aa \infty e^2}$$

$$\frac{1}{6}aa + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{3}vv + a\sqrt{\cdot} \infty ee$$

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\cdot}$$

$$\frac{1}{2}aay - \frac{1}{2}avv + \frac{2}{3}aa\sqrt{\cdot} + \frac{1}{3}yy\sqrt{\cdot} - \frac{1}{3}vv\sqrt{\cdot} \infty ayy \infty e^3$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}yy - \frac{1}{3}vv - \frac{1}{12}aa \infty \frac{\frac{1}{2}aay + \frac{1}{2}avv}{\frac{2}{3}aa + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{3}vv} \text{ vix idem }^3)}$$

hæc methodus hic optime adhibetur quia sine Huddenij regula⁴⁾ pervenitur ad æquationem 6 dimensionum tantum⁵⁾.

¹⁾ Huygens mentionne ce résultat dans la „Prop. X” de la „Pars III” de l’„Horologium oscillatorium”, p. 80 de l’édition originale, seulement on y doit lire „DN, x” au lieu de „CN, x”.

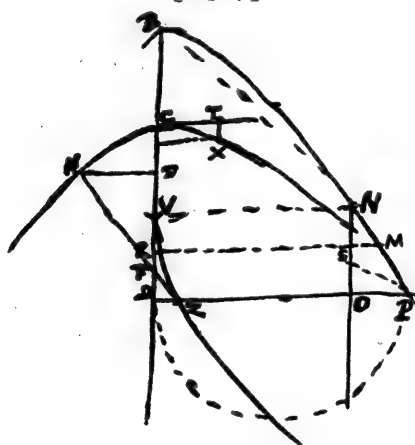
²⁾ On obtient ce résultat par la résolution de l’équation quadratique $3aee - 3aae = f$ qu’on trouve au lieu indiqué dans la note 11 de la p. 393. Le choix de la racine est motivée probablement par ce que dans la partie VZ de la développée, que Huygens considère, on a toujours $B\Omega = y > BC = \frac{1}{2}a$.

³⁾ Comparez le résultat $(y^2 - a^2 - v^2)^3 - 27a^2y^2v^2 = 0$, obtenu quelques lignes plus haut; mais on vérifie aisément que les deux résultats sont identiques.

⁴⁾ Il s’agit de l’article de Hudde „Epistola prima de reductione æquationum”, qui occupe les p. 406—506 de la seconde édition (de 1659) de la „Geometria Renati Des Cartes opera Fr. à Schooten”, citée dans la note 5, p. 360 du T. II. C’était surtout la „III Regula”, p. 414 de cet article qui a pu servir à découvrir le facteur $y^3 + a^2$ par laquelle l’équation du huitième degré de la p. 393 peut être divisée. Voici la suscription de cette règle: „Regula, Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una *literam aliquam* comprehendit, quæ in altera non continetur; & quæ *litera* non habet eundem dimensionum numerum in diversis Terminis”. Or, en posant $v = 0$, la règle amène les expressions $y - a$, $y + a$ et $y^2 + a^2$ comme facteurs possibles de l’équation du huitième degré.

⁵⁾ Remarquons que dans le cas de l’ellipse et dans celui d’une hyperbole quelconque la méthode

[Fig. 4.]



$$q.DF(cc) [ad] q.FH\left(2cc - \frac{1}{4}aa\right) [ut] \\ aa [ad] xx^3)$$

$$c [ad] \sqrt{2cc - \frac{1}{4}aa} \text{ (ratio } F\Omega \text{ ad } FZ) \\ [ut] a [ad] x$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\varphi aay} [ad] \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\varphi a^4yy} - \frac{1}{4}aa} \\ [ut] a [ad] x$$

$$\frac{1}{4}xx \sqrt{\varphi a^4yy} \propto \frac{1}{2}aa \sqrt{\varphi a^4yy} - \frac{1}{4}a^4 \\ \frac{a^3}{2aa - xx} \propto \sqrt{\varphi ayy}$$

$$8a^6 - 12a^4xx + 6aax^4 - x^6 \propto ayy \text{ five } \frac{a^3}{\text{cub. } 2aa - xx} \propto yy \text{ hujusmodi curvæ}^2) \\ \text{spatium quadrare possum}^3).$$

- ¹⁾ Afin d'expliquer cette dernière partie du présent paragraphe, remarquons d'abord que la rectification d'une courbe donnée entraîne nécessairement la quadrature d'une autre courbe. Or, il est clair que la développée de l'hyperbole est algébriquement rectifiable puisque sa longueur VZ (Fig. 4) est égale à la différence HZ—VC. Quelle est donc la courbe correspondante dont la quadrature dépend de la rectification de cette développée? Voilà la question que Huygens se pose pour le cas de l'hyperbole équilatère.

Soit ds un élément de la développée; on a alors $\frac{ds}{dy} = \frac{FZ}{F\Omega}$, où $B\Omega = y$. Posant donc $\frac{ds}{dy} = \frac{x}{a} = \varphi(y)$, il est évident qu'on peut carrer la courbe $x = a\varphi(y)$, parce que pour cette courbe $x dy = a ds$. Il s'agit donc, pour trouver la courbe cherchée, d'exprimer x en fonction de y à l'aide de la relation $\frac{a}{x} = \frac{dy}{ds} = \frac{F\Omega}{FZ} = \frac{DF}{FH}$, c'est-à-dire, en employant les notations indiquées au commencement de ce paragraphe, $\frac{a}{x} = \frac{c}{\sqrt{2c^2 - \frac{1}{4}aa}}$, puisque dans le cas de l'hyperbole

équilatère $DF = BD = c$ et $FH = \sqrt{DF^2 + HD^2} = \sqrt{2c^2 - \frac{1}{4}a^2}$, tandis que $c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2y}$ d'après la note 8 de la page précédente.

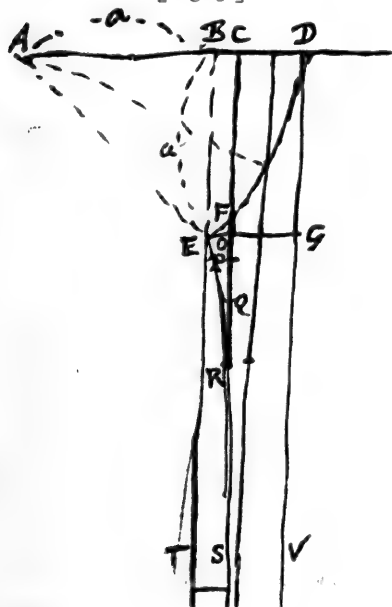
- ²⁾ Voir plus loin (Fig. 5) la construction de cette courbe.

- ³⁾ Remarquons qu'on a, en effet, $\int \frac{a^4}{(\sqrt{2a^2 - x^2})^3} dx = \frac{a^2 x}{2\sqrt{2a^2 - x^2}}$.

- ⁴⁾ Construction de la courbe $y = \frac{a^4}{(\sqrt{2a^2 - x^2})^3}$.

- ⁵⁾ Dans ce paragraphe nous réunissons les renseignements que les manuscrits nous donnent sur l'invention, en 1659, de la théorie générale des développées et des courbes parallèles. En partie ils ont servi d'avant-projet pour les „Definitiones I—IV” et les „Prop. I—IV” de la „Pars

[Fig. 5.]



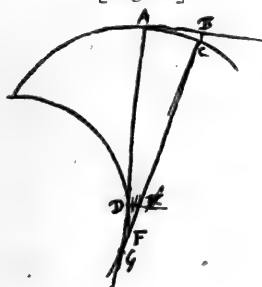
ED⁴⁾ est $\frac{1}{8}$ circf.; AB \propto BE [$\propto a$]; EG parall. BD. CF, CO, CP, CQ, CR sunt continue proport.^{es}

ERS curva per puncta ita inventa ut R descripta est. dico spatij inter hanc et rectam ET, vel GV interjacentis partem quamvis quadrari posse.

AC $\propto x$; CR $\propto y$; CF $\propto z \propto \sqrt{2aa - xx}$.

§ 3⁵⁾.

[Fig. 6.]



$\angle DAB$ est rectus⁶⁾.
AD est tangens in D.
CG tang. in G.

DF + FG \parallel DG.

AF + FG \parallel ADG
sive CG

aufer utrinque FG.

Ergo FA \parallel FC.

Ergo FB \parallel FC.

Ergo punctum C citra B.

[Fig. 7.]



HCD est recta.

$\angle DAH$ rectus.

HE recta \parallel HE
curva.

HE recta + EC \parallel

\parallel HE curva + EC,

hoc est HA. HC

recta \parallel HA. HC \parallel

\parallel HD.

C citra AD rectam.

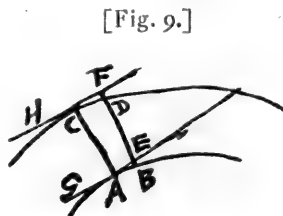
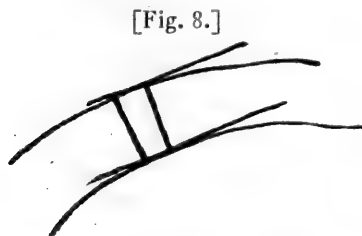
III^o de l'„Horologium oscillatorium” (voir les p. 59—65 de l'édition originale de 1670), desquelles elles s'écartent toutefois sur quelques points.

⁶⁾ Comparez à cette première partie, qui se rapporte aux figures 6 et 7, la Prop. I (p. 60 de l'„Hor. osc.”) dont elle constitue l'avant-projet. Ainsi les courbes DG et EH représentent une même développée; la courbe AC (dans les deux figures) deux parties consécutives (celle à droite et celle à gauche du point A) de la développante. En effet, Huygens démontre que ces deux parties se trouvent du même côté de la droite AB ou AD, qui est perpendiculaire à DA ou AH, d'où il conclut dans la proposition citée, que la développante est coupée orthogonalement par la tangente à la développée.

⁷⁾ Ce signe est équivalent au signe moderne $>$.

[THEOREMA I.]

Si fit curva quædam AB [Fig. 9], et alia item curva CD illa



exterior, hoc est cuius cavitas respiciat convexitatem curvæ AB. Sit autem CD curva ita comparata ad curvam AB, ut si ducantur à quibuslibet huius punctis

velut A. et B rectæ AC, BD quæ curvæ AB insistant ad angulos rectos, atque ex alia parte occurrant curvæ CD, ut inquam, hæ omnes ita ductæ inter se æquales sint. dico easdem etiam curvæ CD ad rectos angulos occurrere¹⁾.

Ut hoc demonstretur de quavis linea ita ducta, puta AC, ducatur GAE ipsi AC ad angulos rectos, quam quidem constat tangere curvam AB in A. per C autem agatur HCF ipsi GAE æquidistans, ac proinde quoque ipsi AC ad angulos rectos. Si igitur ostendatur hanc HCF contingere curvam CD in C, manifestum erit eidem curvam ad rectos angulos occurrere rectam AC. Sumatur in CD punctum aliud D quamlibet propinquum ipsi C, per quod ducta intelligatur FDB quæ occurrat curvæ AB ad angulos rectos; rectæ autem HCF in F. Erit ergo DB per hypothesin æqualis CA. Et cum curva AB jaceat tota ad partem alteram tangentis GAE, curva autem CD ad alteram, necesse est rectam GAE secari à DB. esto in E. Itaque ED minor erit quam BD, hoc est quam AC ideoque minor etiam ipsa EF, intercepta inter parallelas AE, CF; quia videlicet AC est interceptarum omnium brevissima. Itaque apparet punctum D cadere ad partem rectæ HCF quæ est versus curvam AB. Eadem autem ratione hoc ostendetur de quovis puncto in curva CD sumto²⁾. Ergo tota curva CD est ad partem eandem sita rectæ HCF, ac proinde ab hac contingitur in C. quod erat dem.

¹⁾ On ne retrouve pas ce théorème dans l'„Horologium oscillatorium”.

²⁾ Voir la figure à gauche sans lettres à laquelle la même démonstration est applicable.

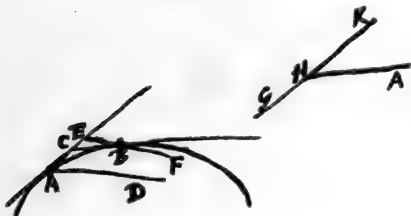
³⁾ Dans l'„Horologium Oscillatorium” Huygens n'a pas reproduit la démonstration de ce „Lemma”. Quand il applique dans la „Prop. II” (p. 62 de l'édition originale) la construction indiquée, il se contente de faire suivre: „quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione indigeat”.

⁴⁾ On ne rencontre pas ce „Lemma” dans l'„Hor. osc.”.

[LEMMA I.]

dato puncto A in curva qualibet versus eandem partem cava,

[Fig. 10.]



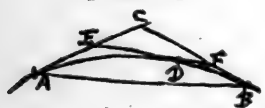
dico aliud infuper punctum in ea sumi posse ut B, in quo si recta curvam contingat ut BC, atque occurrat tangenti in A, angulum cum ea faciat ACB quovis dato majorem³⁾.

datus enim sit angulus GHA. Ducatur AD quæ faciat super tangentem AC angulum acutum DAC minorem complemento anguli dati GHA ad duos rectos. Manifestum itaque est curvæ partem quandam ut AB incedere intra angulum CAD, in qua parte accipi possit punctum ut B quod magis distet à recta AD, omni alio curvæ puncto inter ipsum B et A sumto. quare ab eo puncto si ducatur BE parallela AD occurrensque tangenti AC in E, ejus pars BE tota cadet extra curvam, ac proinde vel ipsa tangens erit in B, vel si in B tangens alia fuerit ut BC ea incedet inter curvam BA et rectam BE. Si ergo BE tangens fuerit erit angulus BEA una cum EAD duobis rectis æqualis quia BE parallela AD. atqui angulus EAD cum sit minor complemento anguli GHA ad 2 rectos, additus proinde ang.^o GHA minor erit compositus duobus rectis, ergo angulus BEA major erit angulo GHA. Atque ita constabit jam propositum, quoniam BE, AE sunt tangentes curvæ. At si BC demum tangens fuerit, erit ang. BCA major adhuc angulo BEC erit enim æqualis ambabus simul BEA et EBC, quoniam C cadit necessario inter A et E. Ergo sic quoque constat propositum.

[LEMMA II.]

Si fuerit curva in easdem partes cava, et angulo tangentium contenta; ab eaque pars abscindatur;

[Fig. 11.]



comprehendetur pars reliqua angulo tangentium majori quam sit angulus totam comprehendens⁴⁾.

Sit curva ADB tangentium AC, BC angulo comprehensa ACB. abscindatur autem pars BD et sit FDE tangens in D. Ergo angulus comprehendens partem reliquam DA est DEA. dico itaque hunc esse majorem angulo ACB.

Cum enim D punctum sit intra triangulum ACB; et per punctum D recta transeat EF necesse est eam utrinque productam occurrere duobus trianguli ACB lateribus, vel uni lateri occurrentem parte alia incidere in angulum aliquem A,

[Fig. 11.]

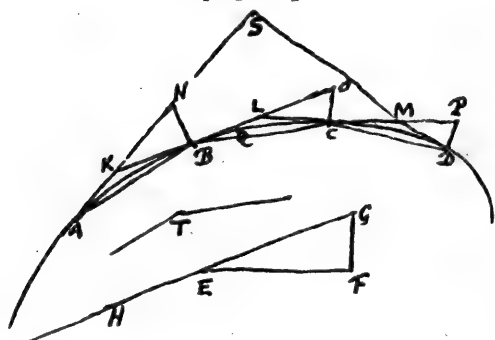


C, aut B. Non potest autem in angulum A incidere, quia rectæ ex D in A aut B ductæ non tangunt curvam in D quod tamen ponitur. Sed neque omnino occurrere potest EF lateri AB, quia cum tangat curvam ADB, versus eandem partem cavam, debet tota esse ad eandem partem curvæ ad quam tangentes AC, CB. Itaque nec in angulum C parte altera incidere poterit EF, quia scilicet tunc altera parte occurreret lateri AB. Necesfario itaque occurrit lateribus AC, CB, efficitque triangulum EFC. Hujus autem angulum exteriorem DEA majorem esse constat angulo interiori opposito C. quod erat dem.

[THEOREMA II.]

datâ curvæ portione in easdem partes cava et tangentium

[Fig. 12.]



ang. comprehensâ ut AQD potest ea in tot partes dividi, ut si unicuique parti subtenfa recta ducatur ut AB, BC, CD et ab unoquoque divisionis puncto ducatur recta tangens curvam, ut AN, BO, CP, occurrensque ei quæ curvæ in puncto divisionis sequenti ad angulos rectos infistit, nempe lineis BN, CO, DP, ut inquam subtenfa quæque habeat ad

fibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut AB ad BN, BC ad CO &c. rationem majorem quavis ratione proposita¹⁾.

Sit data ratio lineæ EF ad FG; quæ recto angulo ad F jungantur; et ducatur recta GEH. Sumatur autem angulus obtusus T major angulo HEF, idemque major angulo tangentium quæ curvam comprehendunt, ASD. itaque angulus T si super curvæ AQC convexitatem moveri intelligatur, ita ut lineæ ipsum comprehendentes tangant perpetuo curvam; constat semper minorem curvæ portionem comprehensurum quam sit tota AQD; sit autem minima curvæ portio quam comprehendere dictus angulus possit, æqualis AQ curvæ. nam vel ubique æqualem portionem comprehendere eam certum est, vel, si curva fuerit circuli circumferentia, vel aliquam portionem fore minimam quam possit comprehendere. Jam si dividatur curva AQD in partes AB, BC, CD quarum singulæ sint minores quam

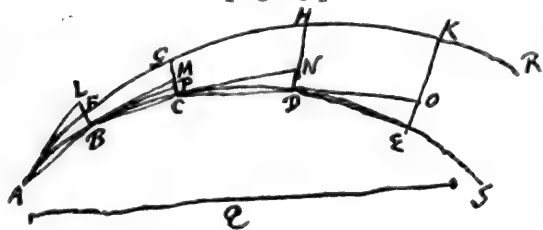
¹⁾ Comparez la „Prop. II” de la „Pars III” de l’„Horologium oscillatorium”, p. 62—63 de l’édition originale.

AQ, et in divisionum punctis ducantur tangentes, quibus curvæ figura quædam rectilinea circumscribatur AKLMD necesse est angulos singulos AKB, BLC, &c. majores esse angulo T. quoniam si partes AB, BC, CD singulæ æquales forent ipsi AQ, anguli tangentium ipsas comprehendendum singuli vel æquales vel minores essent angulo T, nunc autem partes dictæ sunt ipsa AQ minores; ideoque angulos K, L, M ipsas comprehendentes majores esse necesse est angulo T per præc. 2) Iidem anguli itaque multo majores erunt singuli angulo HEF; Ac proinde productis AK, BL, CM donec conveniant cum rectis BN, CO, DP, quæ super curvam AQC five super tangentes BK, CL, DM positæ sint perpendiculares, erunt anguli NKB, OLC, PMD, priorum nempe residui ad 2 rectos minores singuli angulo FEG. habent autem \triangle^{la} KBN, LCO, MDP angulos rectos B, C, D. itaque ratio KB ad BN, item LC ad CO, et MD ad DP major erit quæque ratione EF ad FG. Sed AB est major quam BK, quia in triangulo AKB angulus K cui subtenditur AB est obtusus; itaque major multo erit ratio AB ad BN quam EF ad FG. Eademque ratione major ratio BC ad CO, et CD ad DP quam EF ad FG. Quare constat propositum.

[THEOREMA III.]

Duæ curvæ existere nequeunt quæ sint in easdem partes cavæ alterumque communem terminum habeant, sintque ita ad se invicem comparatæ ut recta omnis quæ alteram earum ad rectos angulos secet eadem producta etiam reliquam ad rectos angulos secet 3).

[Fig. 13.]



Sint enim si fieri potest ejusmodi lineæ curvæ ABCDES et AFGHKL videlicet quæ sint in easdem partes cavæ, et communem habeant terminum A, atque ita sint comparatæ ut quælibet rectæ BF, CG quæ alteri ad rectos angulos occurrunt, etiam alteri sic occurrant.

Quoniam ergo ab A termino diversæ incedunt, poterit in exteriori curva punctum aliquod sumi ut K 4)

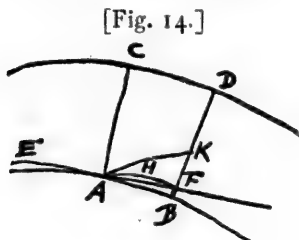
2) Voir le „Lemma II” qui précède, p. 399. On lit encore dans le manuscrit au bas de la page: „Lemma quod major angulus minorem portionem complectitur”.

3) Comparez la „Prop. III” de la „Pars III” de l’„Horologium oscillatorium”, p. 63 de l’édition originale.

4) Huygens arrête ici la démonstration parce qu’il s’aperçoit que pour l’achever il a besoin du lemme qu’il fait suivre (voir la p. 402). Or, en admettant que ce lemme soit prouvé, on peut

[LEMMA III.]

Si fuerint duæ curvæ communium perpendicularium atque in eafdem partes cavæ CD, AB [Fig. 14].



[Fig. 14.]

Interiorem autem duarum AB tangat recta EAF in puncto A unde ducatur perpend. AC ad curvam exteriorem: per aliud vero punctum sumtum in recta EF eaue ejus parte quæ inter utramque curvam interjacet ut F, ducatur alia recta curvis perpendicularis DFB. dico hujus

partem FD, inter rectam EF et curvam exteriorem interceptam minorem esse recta AC.

Si enim non, erit DF vel æqualis vel major recta AC. Sit primo æqualis, et intelligatur per A procedere curvam AHF *parallelam curvæ* CD¹⁾; fieri enim potest cum CA, DB non concurrerint adhuc²⁾, nam occurrunt curvæ AB, in eafdem partes cavæ in quas CD. Transibit ergo curva AHF per F. eritque tota ad partes rectæ AF ubi et CD cum sit cava versus eafdem partes atque CD. Itaque recta AF nequaquam continget curvam AHF in A: quod est contra propositiorem . . .³⁾ Cum enim AHF curva sit *parallela* curvæ CD, huic vero occurrat AC ad ang. rectos, eadem AC etiam curvæ AHF ad rectos angulos occurrere deberet⁴⁾.

facilement reconstituer la suite de la démonstration à l'aide des indications que la „Prop. III”, citée dans la note précédente, nous donne. A cet effet nous supposons que le segment Q soit choisi de sorte qu'on a $Q >$ courbe ABCDE. Ensuite, d'après la proposition précédente, on divise la courbe ABCDE en tant de parties qu'on a partout: $\frac{AB}{LB}, \frac{BC}{MC}, \frac{CD}{ND}, \frac{DE}{EO} > \frac{Q}{KE}$, où AL, BM, CN, DO sont des tangentes à la courbe AS et LB, GC, HD, KE des perpendiculaires aux deux courbes.

On a donc $\frac{AB+BC+CD+DE}{LB+MC+ND+EO} > \frac{Q}{KE}$, et *à fortiori* $\frac{\text{courbe ABCDE}}{LB+MC+ND+EO} > \frac{Q}{KE}$. Mais, d'après le lemme, on a $KE = KO + EO < HN + ND + EO < GM + MC + ND + EO < LB + MC + ND + EO$. On en déduit $\frac{\text{courbe ABCDE}}{KE} > \frac{Q}{KE}$, et par suite courbe ABCDE $> Q$, ce qui est absurde, puisqu'on a, par supposition, $Q >$ courbe ABCDE.

Ajoutons qu'il nous semble que Huygens n'a pas été satisfait de la démonstration du lemme en question, qu'il n'a pas achevée non plus. En effet, dans la démonstration de la „Prop. III”, citée dans la note 3 de la p. 401, il a su éviter l'emploi de ce lemme et sur la dernière des deux pages d'où nous avons emprunté le lemme, Huygens a ébauché quelques figures où l'on retrouve les lignes auxiliaires dont il s'est servi dans cette démonstration.

¹⁾ Voir au troisième alinéa de la p. 403 qui suit la définition des „curvæ parallelæ”, dont la

Si sint duæ curvæ *communium perpendicularium* et cavæ in eandem partem nullæ duæ perpendiculares earum sese secabunt intra spatium quod inter curvam utramque interjacet ²⁾.

[Fig. 15.]



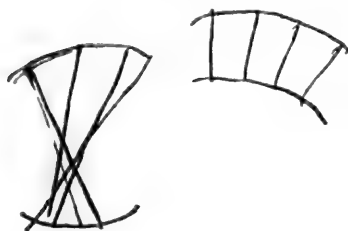
linea curva in easdem partes cava vocetur quam tangentes omnes rectæ ab eadem parte contingunt ⁵⁾.

[Fig. 16.]



curvæ parallelæ vocentur quæ ita ad se mutuo sunt comparatæ ut, rectæ omnes quæ alteri earum ad angulos rectos insistant, et ad reliquam terminantur, sint inter se æquales ⁶⁾.

[Fig. 17].



Curvæ communium perpendicularium dicantur quæ ita ad se mutuo sunt comparatæ, ut rectæ omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos etiam alteri ad angulos rectos occurrant.

propriété principale avait déjà été démontrée dans le „Theorema I” de la p. 398 sans que Huygens leur avait appliqué cette dénomination.

²⁾ Voir à propos de cette remarque les Fig. 16.

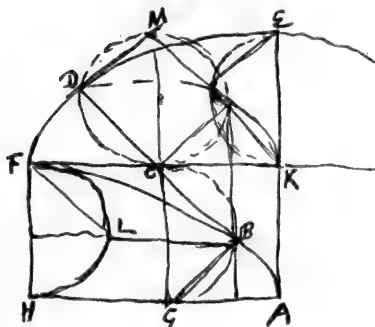
³⁾ Il s'agit du „Theorema I” cité dans la note 1.

⁴⁾ Huygens n'achève pas la démonstration, mais il est évident que la ligne AK représente la courbe parallèle à CD, passant par A, dans le cas où $FD > AC$.

⁵⁾ Comparez la „Definitio I” de la „Pars III”, p. 59 de l'édition originale de l’„Hor. oscil.”

⁶⁾ Cette définition et la suivante ne se retrouvent pas dans l’„Horologium oscillatorium”.

[Fig. 18.]

§ 4¹⁾.

[Première Partie.]

Si ABF sit dimidia cycloides, cui circum applicatum sit filum seu linea flexibilis ABF, eaque firmata in A, capite altero ab F recedens curvam quandam describat semper tenfa manens, ea curva, puta FDE, erit dimidia item cycloides ipfi

FBA æqualis similisque.

BCD tangens in B. $CD \propto CB$ ²⁾. ostend. D esse in cycloide FE. Sit BL parall. AH, et jungatur LF. Ergo hæc parall. BC³⁾ et æqualis. Ergo \square est FCBL. Sed $LB \propto$ arcui LF⁴⁾. ergo et CF \propto arcui LF.

Sit circulus genitor MDC tangens in C rectam FK, ubi et circulus BG. Ergo punctum D est in circumferentia MDC. Sed et arcus $CD \propto CB$ vel FL, hoc est rectæ CF. unde punctum D necessario in cycloide FDE.

Porro cum BD sit dupla BC sive FL rectæ, cujus dupla quoque est curva FB⁵⁾ apparet, rectam BD una cum curva BA æquari curvæ ABF. hoc est rectæ AE.

¹⁾ Dans son „Horologium oscillatorium” (voir la Prop. XI de la „Pars tertia”, p. 82 de l'édition originale) Huygens nous dit expressément qu'il avait appliqué en premier lieu à la cycloïde la méthode, décrite dans la note 2 de la p. 387, pour déterminer la développée d'une courbe donnée. Il avait trouvé que pour la cycloïde on a $HN = 2FG$ (voir la Fig. 1 de la p. 388) lorsque AC représente la base de la cycloïde, d'où il suit que pour cette courbe FZ devient égal à HF.

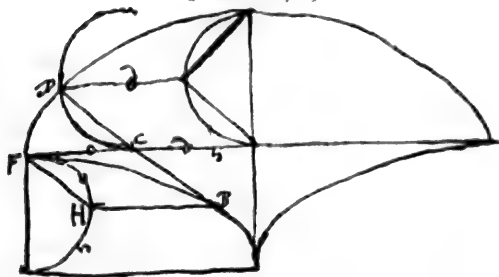
Cette assertion de Huygens est encore confirmée par une lettre du 10 février 1662 à Moray où l'on lit (voir la p. 51 du T. IV): „La propriété de la Cycloïde, de ce que par son evolution, il se décrit une courbe pareille n'estoit pas difficile a demontrer apres que Monsieur Wren a decouvert la dimension de cette ligne, mais a trouver methodiquement la dite propriété comme j'ay fait, il y avoit plus de peine”.

Or, cette première application méthodique de la théorie générale des développées, qui doit donc avoir précédée les calculs des §§ 1 et 2 (p. 387—397), est perdue pour nous, puisqu'on ne la retrouve pas dans les manuscrits que nous possédons.

Ce qu'on y trouve sur la détermination de la développée de la cycloïde, nous l'avons reproduit dans les deux parties qui composent ce § 4.

La Première Partie que nous croyons antérieure à l'autre est empruntée à une feuille détachée, la Deuxième à la p. 226 du Manuscrit A.

²⁾ Cette supposition était donc probablement suggérée par le résultat dont nous avons parlé dans la note précédente.

[Fig. 19.] ⁶⁾

[Deuxième Partie.]

Ex eo quod $BD \propto BF$ ⁷⁾, hoc est per Wrennij inv.^m ⁸⁾ $\propto 2BC$, et BCD tangens, ostenditur D punctum in cycloide FD ⁹⁾.

Ex eo quod tangens est BCD , ostenditur occurrere alteri cycloidi ad angulos rectos ¹⁰⁾ hinc ex nostra methodo sequitur describi cycloidem.

³⁾ Par le théorème de la p. 375.

⁴⁾ Comparez le § 1 de la Pièce N°. XI, p. 347.

⁵⁾ Voir la cinquième ligne de la p. 364.

⁶⁾ Nous avons ajouté à cette figure la lettre H .

⁷⁾ La courbe FD est donc, par définition, une développante de la cycloïde FB .

⁸⁾ Il s'agit de la rectification de la cycloïde par Wren; comparez la note 5 de la p. 367.

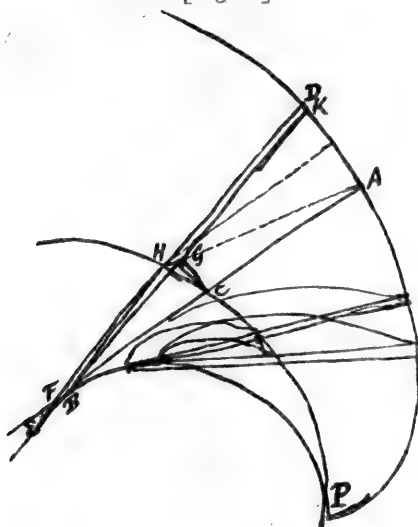
⁹⁾ Puisqu'on a évidemment $\text{arc } CD = \text{arc } FH = HB = FC$.

¹⁰⁾ Par la théorie générale des développées; comparez la note 6 de la p. 397.

APPENDICE À LA PIÈCE N^o. XV ¹⁾.

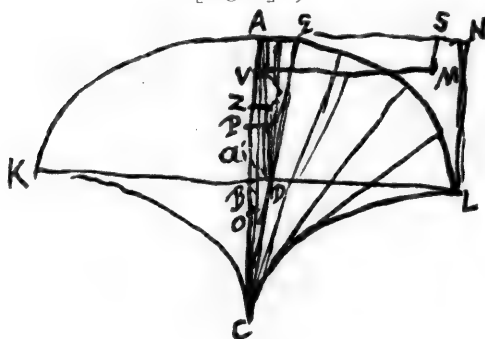
[1679.] ²⁾

[Fig. 1.]



ratio spatij ABEDA ³⁾ ad spatium CBEHC quamlibet minimo differt a ratione spatij ABK ad spatium simile CBG, quia spatium ABEDA quamlibet minimo differt a spatio ABK, et spatium CBEHC quamlibet minimo à spatio CBG. Ergo ratio totius DEBPD ad totum HEBPH quamlibet parum differt à ratione spatij ABK ad CBG. h. e. à ratione qu. AB ad qu. CB. Ergo est eadem.

[Fig 2.] ⁴⁾



nota ratio solidi ex BAL ad solid. ex BCL quæ 5 ad 1 ⁵⁾. et ratio plani BAL ad plan. BCL quæ 3 ad 1. hinc ratio BP ad BO quæ 5 ad 3 ⁶⁾. Ergo et BP ad AV ⁷⁾ ut 5 ad 3. Sit $AZ \propto \frac{1}{2}AB$. Ergo VZ ad ZP ut 3 ad 1 ⁸⁾. fit $AB \propto d$. BP $\propto a$. Ergo $AV \propto \frac{3}{5}a$. Hinc ⁹⁾ $a \propto \frac{5}{12}d$.

$[ZP] \frac{1}{2}d - a$ ad $[ZV] \frac{1}{2}d - \frac{3}{5}a$ ut 1 ad 3

$$\frac{3}{2}d - 3a \propto \frac{1}{2}d - \frac{3}{5}a$$

$$d - 3a \propto -\frac{3}{5}a$$

$$5d \propto 12a$$

$$\frac{5}{12}d \propto a^{10)}$$

XVI.

1659.

[*Construction de la tangente à la quadratrice de Dinostrate.*]

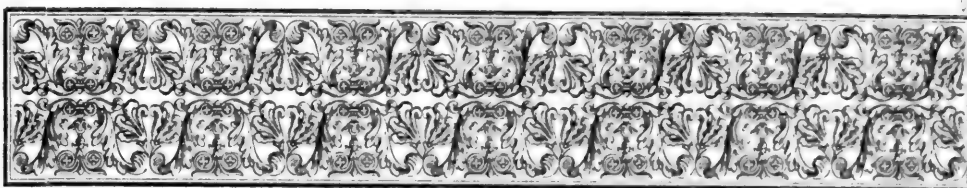
6 Nov. 1659 ¹¹⁾.

- ¹⁾ Cet Appendice emprunté à la p. 166 du Manuscrit E contient une nouvelle détermination du centre de gravité de l'espace limité par la cycloïde et par sa base (comparez le § 5 de la Pièce N°. XI, p. 353—355). Cette fois la détermination est basée sur les propriétés de la développée de la cycloïde.
- ²⁾ D'après le lieu que cet Appendice occupe dans le Manuscrit E.
- ³⁾ Dans la figure de Huygens la courbe DAP représente une épicycloïde, HC sa base circulaire, EB sa développée. Nous reviendrons plus tard sur les recherches de Huygens sur les épicycloïdes. Pour le moment il suffit de rappeler que pour une telle courbe le rapport $\frac{AB}{CB}$ est constant.
- ⁴⁾ Nous avons ajouté la lettre K à cette figure.
- ⁵⁾ Il s'agit des solides de révolution des espaces BAL et BCL tournant autour de la ligne KL qui est la base de la cycloïde KAL. En effet, considérons les espaces infinitésimaux de la Fig. 2 qui correspondent aux espaces HCDA et EHCB de la Fig. 1. D'après le théorème qui précède ils sont ici dans le rapport de 3 à 1, puisque dans le cas de la cycloïde on a BA [Fig. 1] = 2CB (voir, p. 405, la Deuxième Partie du § 4). Or, il est facile de montrer que les distances à KL [Fig. 2] de leurs centres de gravité sont dans le rapport de $\frac{5}{9}$ à $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire de 5 à 3; d'où il suit, par le théorème de Guldin, que les solides engendrés par ces espaces infinitésimaux dans leur rotation autour de la base de la cycloïde sont dans le rapport constant de 5 à 1 et, par conséquent, que les solides engendrés par les espaces BAL et BCL sont dans ce même rapport.
- ⁶⁾ Par le théorème de Guldin, P étant le centre de gravité de l'espace KAL, et O celui de l'espace KCL.
- ⁷⁾ V est la projection, sur l'axe AB de la cycloïde, du centre de gravité M du triligne ANL. On a donc BO = AV à cause de la congruence des trilignes CBL et LAN.
- ⁸⁾ Z est le centre de gravité du rectangle KN circonscrit à la cycloïde KAL; V et P sont les centres de gravité des parties qui composent ce rectangle, savoir: l'espace cycloïdal KAL égal à trois quarts du rectangle (voir le premier alinéa de la p. 348), et l'ensemble des deux trilignes, comme ANL, qui restent.
- ⁹⁾ Voir le calcul qui suit.
- ¹⁰⁾ Résultat conforme au résultat obtenu au § 5 de la Pièce N°. XI; voir la dernière ligne de la p. 355.
- ¹¹⁾ Le texte de cette Pièce, qu'on trouve à la p. 256 du Manuscrit A, a déjà été reproduit dans la note 19 de la p. 440 du T. X. Nous nous bornerons donc ici à ajouter aux données de cette note que la quadratrice de Dinostrate est décrite dans les „*Mathematicæ Collectiones*” de Pappus, dans l'introduction à la „*Prop. XXVI*” du „*Liber IV*”; voir la p. 57 recto de l'ouvrage cité dans la note 3 de la p. 259 du T. II.

409

CONTRIBUTIONS AUX COMMENTAIRES
DE VAN SCHOOTEN SUR
LA „GEOMETRIA” DE DESCARTES.

ÉDITIONS DE 1649 ET DE 1659.



Avertissement.

Quelques-uns des résultats mathématiques obtenus par Huygens qui ne furent pas publiés par lui-même, parurent parmi les Commentaires que van Schooten ajouta à sa traduction latine de la „Géométrie” de Descartes ¹⁾. C’est pourquoi nous croyons devoir reproduire ici les passages de ces Commentaires qui se rapportent aux travaux de Huygens.

On connaît les relations amicales qui existaient entre le professeur van Schooten et son élève depuis l’arrivée de ce dernier à Leiden, en mai 1645, jusqu’au décès de van Schooten, en janvier 1661. Or, van Schooten aimait beaucoup à faire ressortir les mérites de ses élèves. Ainsi déjà en 1649, dans la première édition de la „Geometria”, il inséra une „invention” du jeune Huygens en la

¹⁾ Voir quant à la première édition de 1649, la note 1 de la p. 218 de notre T. I. Voici le titre de la deuxième: „Geometria, à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; postea autem Una cum Notis Florimondi de Beaune, in Curia Blesensi Consilarii Regii, Gallicè conscriptis in Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata, Operà atque studio Francisci à Schooten in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris. Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata, Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet. Amstelædami, Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, CIO IOC LIX”.

Une troisième édition, identique à la deuxième, parut en 1683 „Amstelodami, ex typographia Blaviana”.

faisant précéder de quelques mots de louange qui montrent qu'il avait pressenti de bonne heure le grand avenir de son élève ¹⁾).

Cette invention de Huygens consiste dans la remarque, elucidée par un exemple, qu'un problème peut quelquefois se transformer en théorème; favoir dans le cas où tous les points situés à l'extérieur ou à l'intérieur d'une figure donnée satisfont aux conditions posées dans le problème.

C'est à l'âge de 15 ans que Huygens avait fait cette remarque. En effet, on la retrouve ²⁾ sur une des premières pages du Manuscrit N°. 17, dont nous avons déjà parlé dans l'Avertissement pour les „Travaux divers de Jeunesse” ³⁾. Lors de la rédaction de cet Avertissement, nous ignorions si ce petit manuscrit avait été commencé avant ou après le départ de Christiaan, en 1645, pour Leiden. Depuis, nous avons été mieux renseignés, grâce à feu M. J. A. Worp, qui a publié, en 1913, des annotations de Constantijn Huygens père, sur les progrès des études de ses fils ⁴⁾. On y lit sous l'année 1644: „Dans cette même année je mis Constantyn et Christiaan sous la direction de Stampioen pour leur enseigner les mathématiques. Le succès était singulier, quoique ce fût surtout Christiaan qui excellait. Non seulement qu'il comprenait et retenait facilement toute chose, mais il inventait quotidiennement toutes sortes de choses ingénieuses, qu'il assemblait dans un livret („Boeckjen”), de sorte qu'il y avait lieu de s'en étonner grandement”. Or, ce „boeckje” qu'il désigna plus tard dans les mêmes termes à son frère Constantijn ⁵⁾ était sans doute le manuscrit N°. 17 ⁶⁾.

La participation de Huygens à la seconde édition, de 1659, de la „Geometria”

¹⁾ Voir le passage N°. I, p. 416.

²⁾ Voir la p. 25 de notre T. XI.

³⁾ Voir la p. 4 du T. XI.

⁴⁾ Voir l'article „De jeugd van Christiaan Huygens, volgens een handschrift van zijn vader” (La jeunesse de Christiaan Huygens, d'après un manuscrit de son père), p. 209—235 du T. 31, 1913, du Journal: „Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam, Gebroeders Binger”. On y lit (p. 232): „In ditzelfde jaer” [1644] „stelde ick Constantyn ende Christiaan onder Stampioen, die haer de Mathematique quam leeren, met sonderling succes, hoewel dat meest in uyt muntte Christiaan, die niet alleen alle dingen lichtelijk begreep ende onthiel, maer selfs dagelijc allerhande kunstige dingen inventeerde en in een Boeckjen bijeen vergaderde, soo dat men der sich hoogelijc over hadde te verwonderen”.

⁵⁾ Voir toujours la p. 4 du T. XI.

⁶⁾ Comparez encore la p. 16 du T. XI au § 8 et la note 1 de la p. 23 du même Tome. Il est

était beaucoup plus active. En effet, comme nous le verrons, elle ne s'est pas limitée aux endroits où elle est expressément mentionnée par van Schooten ⁷⁾.

Aussitôt après que Louis Elzevier avait fait savoir à van Schooten, qu'il voulait préparer une nouvelle édition de la „Geometria”, celui-ci s'adressa à Huygens pour le prier de lui communiquer les corrections ou modifications qu'il jugerait opportun d'apporter à cet ouvrage ⁸⁾. En réponse, Huygens lui envoya, en octobre ou novembre 1654, une copie des annotations qu'il avait faites en marge de son exemplaire ⁹⁾.

Outre celles qui se rapportent aux passages que nous reproduisons dans le texte qui suit, on trouve dans cette copie plusieurs autres annotations, plus ou moins importantes, qui ont été utilisées également par van Schooten. Nous en signalons deux, dont l'une a occasionné la note volumineuse CC, p. 182—206 de l'édition de 1659; nous avons citée celle-ci dans la note 3 de l'Appendice, p. 423. L'autre concerne les points d'intersection d'une parabole et d'un cercle ¹⁰⁾. Huygens y traite du cas où trois de ces points coïncident, et fait remarquer que dans ce cas les deux courbes se coupent au point de coïncidence, nonobstant qu'elles y possèdent une tangente commune. On retrouve cette observation à la p. 339 de l'édition en question de la „Geometria”.

Au mois de mars 1655, Huygens attira l'attention de van Schooten sur une petite inadvertance commise par Descartes dans sa „Géométrie” et lui proposa de la corriger dans le texte de la nouvelle édition de la „Geometria” ou de l'indiquer dans ses Commentaires ¹¹⁾. C'est la première de ces alternatives qui fut suivie par van Schooten aux p. 28—29 de l'édition de 1659.

Enfin il y a encore la note BB, p. 179—181, qui fut ajoutée sur l'instigation de Huygens. En effet, celui-ci reçut, en juillet 1656, une lettre de Roberval, où ce savant lui indiqua ce qu'il considérait comme une faute importante commise par

maintenant presque certain que la remarque dont nous avons parlé, fut faite indépendamment des leçons de van Schooten, mais il reste possible qu'elle fût inspirée par le passage de la „Géométrie” de Descartes, cité dans le § 8 prémentionné.

⁷⁾ Voir les passages I—V, reproduits aux p. 416—422 qui suivent.

⁸⁾ Voir la lettre de van Schooten du 25 octobre 1654 à la p. 301 de notre T. I.

⁹⁾ Comparez la lettre de Huygens à van Schooten du 29 octobre 1654 et la Pièce N°. 204, p. 303—305 du T. I.

¹⁰⁾ Voir le dernier alinéa de la p. 305 du T. I.

¹¹⁾ Voir la lettre du 25 mars 1665, p. 323—324 du T. I.

Descartes, savoir que Descartes n'avait pas compris que la solution complète du problème de Pappus à quatre lignes „demande deux sections à la fois, et chacune toute entière”¹⁾. Huygens trouva les remarques de Roberval „tres belles et veritables” et il envoya sa lettre à van Schooten avec la recommandation d'utiliser ses remarques pour les Commentaires²⁾. Or, pour un fervent admirateur de Descartes, comme van Schooten, la manière dont Roberval parla du „bon-homme” Descartes était difficile à digérer. Ainsi, dans sa réponse, il ne manqua pas de prendre ardemment la défense de Descartes³⁾; toutefois, quelques mois plus tard, après avoir reçu une lettre très détaillée de Huygens⁴⁾, où celui-ci renouvela sa recommandation, van Schooten résolut de se conformer à l'avis de Huygens⁵⁾; mais il le fit d'assez mauvaise grâce, puisque dans la note BB il ne nomme ni Huygens, ni Roberval, quoiqu'il suive de très près la lettre de Huygens⁶⁾.

Nous ne voulons pas passer sous silence une conjecture proposée par Uylenbroek à la p. 3 de ses „Exercitationes mathematicæ et philosophicæ, Fasc. II”⁷⁾ de 1833. D'après cette conjecture on doit lire *Hugenius* au lieu de *Huddenius* à la p. 367 de l'édition de 1659 de la „Geometria”. Il s'agit d'expliquer la manière dont les règles de Cardan pour la résolution des équations cubiques auraient pu être trouvées⁸⁾. Or, dans une lettre du 29 mai 1655, van Schooten avait prié

¹⁾ Consultez la lettre du 6 juillet 1656, p. 449—451 du T. I. Ajoutons que dans les figures de la „Géométrie” de Descartes (voir les pp. 400 et 402 du T. VI de l'édition de ses Œuvres par Adam et Tannery, ou les pp. 34 et 36, ou 30 et 32, des éditions de la „Geometria” de 1649 ou 1659) qui se rapportent à la solution du problème de Pappus à quatre lignes on ne trouve tracée qu'une seule ellipse ou une seule branche d'hyperbole. Or, si dans ce problème, que nous avons formulé dans la note 1 de la p. 211 du Tome présent, on ne distingue pas les deux directions possibles des lignes en question par un signe différent, il est parfaitement vrai que la solution comprend deux sections coniques complètes.

²⁾ Consultez les lettres du 25 juillet et du 27 juillet 1656 de Huygens à van Schooten et à de Roberval, pp. 460—462 et 464—465 du T. I.

³⁾ Voir les p. 466—470 du T. I.

⁴⁾ Voir la lettre du 6 décembre 1656, p. 519—524 du T. I.

⁵⁾ Voir sa lettre du 12 décembre, p. 526—527 du T. I.

⁶⁾ Comparez p. e. le „Problema” de la p. 180 de la „Geometria” à celui de Huygens de la p. 523 du T. I.

⁷⁾ Voir la note 2 de la p. 500 du T. VII.

⁸⁾ Voici le passage en question: „Cæterum ne quid hic desideretur, sed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutissimus noster Huddenius olim adinvenit, mihique coram communicavit”.

Huygens de lui communiquer ce qu'il avait imaginé à ce sujet ⁹⁾. En réponse, Huygens exposa ¹⁰⁾ à van Schooten une méthode pour la résolution de l'équation $x^3 \pm px - q = 0$ qui ne diffère pas essentiellement de celle qu'on trouve aux p. 367—368 de la „Geometria”.

La conjecture d'Uylenbroek semble donc bien plausible. Toutefois nous devons faire observer qu'une méthode tout-à-fait analogue fut développée par Hudde lui-même aux p. 499—501 de l'„Epistola prima de Reductione Aequationum” d'avril 1658; épître qui fut insérée par van Schooten dans la nouvelle édition de la „Geometria”. Et Hudde ne manque pas d'observer, à l'endroit cité, que la règle de Cardan „aurait pu être trouvée de la manière indiquée, quoique peut-être elle fût découverte par d'autres considérations” ¹¹⁾. On voit donc que Hudde s'était occupé du même sujet. Il est vrai que le mot „olim” dans le passage en question ¹²⁾ paraît exclure une communication si récente qu'avril 1658 et s'accorde mieux avec la date du 5 juin 1655 de la lettre de Huygens, mais il est possible que Hudde eût expliqué verbalement sa méthode à van Schooten bien avant 1658.



⁹⁾ „Rem autem omnium gratissimam præstiteris, si modum quo Cardani regulæ inventæ fuerint perscribere haud graveris”; voir la p. 329 du T. I.

¹⁰⁾ Voir sa lettre du 5 juin 1655, aux p. 330—331 du T. I.

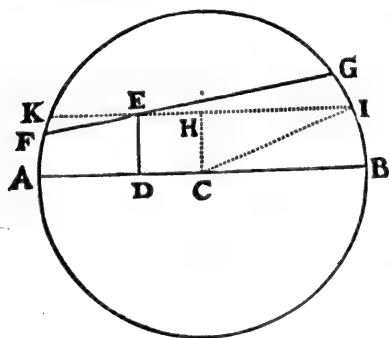
¹¹⁾ „Ubi tandem id advertendum, Regulam hanc in resolvendis æquationibus trium & quatuor dimensionum eandem esse cum illa Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit; ita ut ex superiori calculo manifestum sit quòd ea Regula, quamvis ille author ex alio fortè fundamento eam eruerit, hoc tamen etiam modo inveniri possit”; voir la p. 501 de l'édition de 1659 de la „Geometria”.

¹²⁾ Voir la note 8 de la p. 414.

I².

1649.

Alterum exemplum ²⁾, quod hic afferendum duxi, desumpti ex inventis Nobilissimi & præclari Iuvenis D. Christiani Hugonii, quibus sibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non nisi magna quæque ab eo expectanda esse affirmare non veriti fuerint ³⁾.



Dato Circulo AGB, dataque positione diametro AB: invenire extra ipsam punctum E, à quo si ad AB demittatur perpendicularis ED, & per idem punctum agatur recta quædam linea FG utrinque à circumferentiâ terminata, ut rectangulum FEG, sub segmentis ejus FE, EG comprehensum, unà cum quadrato perpendicularis demissæ ED, æquetur rectangula ADB, sub segmentis diametri AD, DB.

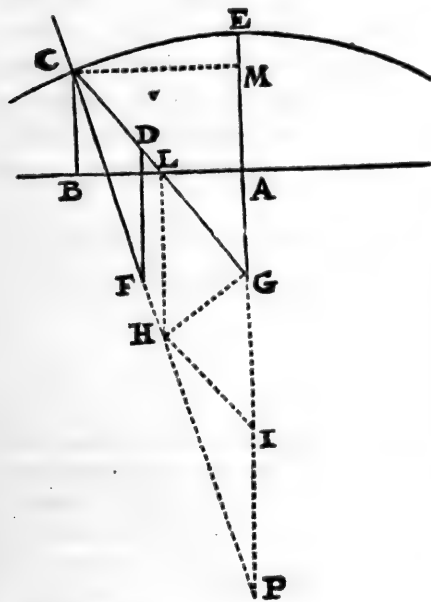
¹⁾ Nous empruntons ce premier passage aux p. 203—205 de la première édition, de 1649, par van Schooten, de la „Geometria à Renato Des Cartes”, ouvrage cité dans la note 1, p. 218 de notre T. I. Le passage fut reproduit avec des modifications peu importantes aux p. 230—231 de l'édition de 1659. L'„invention” de Huygens qu'on y trouve insérée datait déjà de 1644, lorsque Huygens avait l'âge de quinze ans; comparez la p. 412 de l'Avertissement qui précède.

²⁾ Il s'agit d'exemples qui doivent servir à élucider le passage suivant de la Géométrie de Descartes: „Et s'il manque deux conditions à la détermination de ce point, le lieu où il se trouve est une superficie, laquelle peut estre, tout de mesme, ou plate ou spherique ou plus composée” (p. 407 du T. VI de l'édition d'Adam et de Tannery). Comparez encore la p. 16 du T. XI au § 8.

³⁾ Remarquons qu'en 1649, lorsque cette prédiction fut faite, Huygens n'avait encore rien publié.

Ductâ per E rectâ KI parallelâ ipsi AB, deducatur ex centro C in eam perpendicularis CH, jungaturque CI. Positâ igitur AC vel CB $\propto a$, CD $\propto x$, & DE $\propto y$: erit HI $\propto \sqrt{a^2 - y^2}$, EI $\propto \sqrt{a^2 - y^2} + x$, & EK $\propto \sqrt{a^2 - y^2} - x$. Unde si multiplicavero EK $\propto \sqrt{a^2 - y^2} - x$ per EI $\propto \sqrt{a^2 - y^2} + x$ fiet rectangulum KEI seu FEG $\propto a^2 - y^2 - x^2$. Cui si addatur quadratum ex ED $\propto y^2$: erit summa $a^2 - x^2 \propto a^2 - x^2$, rectangulo ADB, utpote æqualis ei, quod fit ex $a - x$ in $a + x$. 35 Tertii Elem.⁶⁾

Quia igitur hîc utrique eâdem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla ampliùs inveniri potest æquatio, quâ innotescat utraque incognita quantitas x & y : liquet eas ad libitum sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Defectus itaque duarum in hâc quæstione conditionum, ad determinandum punctum E, ostendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere posse, & locum ejus esse ad superficiem Circuli. Id quod facilè demonstrari potest⁵⁾.

II⁶⁾.

1659.

Porro, ut constructio⁷⁾ adhuc brevior evadat, operæ pretium est considerare, rectam ab H ad G ductam ipsi GC esse perpendicularem. Id quod, ab acutissimo nostro Hugenio primùm observatum⁸⁾, deinde sic verum deprehendi⁹⁾:

Hinc talis emergit constructio:

Ductâ CG, secante AB in L, aga-

⁴⁾ Nous avons cité cette proposition d'Euclide dans la note 7 de la p. 251 du T. XI.

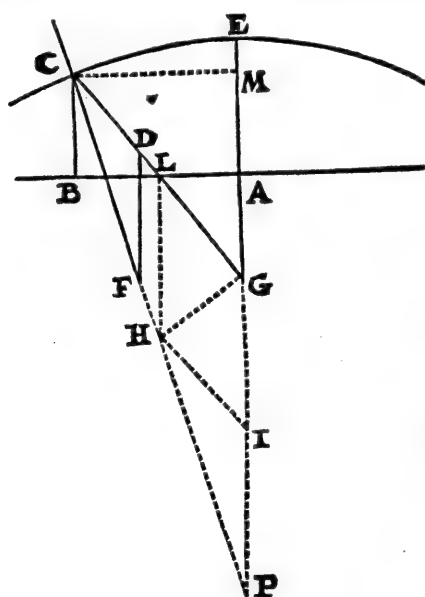
⁵⁾ Nous ne reproduisons pas cette démonstration qui fut rédigée probablement par van Schooten lui même.

⁶⁾ On trouve ce passage aux p. 253—255 de l'édition de 1659 de la „Geometria”.

⁷⁾ Il s'agit de la construction, inventée par Descartes, de la normale à la conchoïde CE pour un point quelconque de cette courbe dont G est le pôle et AB la base, de sorte qu'on a CL = AE. On retrouve cette construction de Descartes à la p. 18 de notre T. XI.

⁸⁾ Comparez le premier alinéa de la p. 305 du T. I.

⁹⁾ Nous supprimons cette vérification analytique par van Schooten de l'observation de Huygens.



tur ex L ipfi AG parallela LH, donec occurrat perpendiculari GH in H: erit'que recta HC, quæ ex H per C ducitur, secans quæfita ¹⁾.

Verùm enimverò quoniam lineæ CP alio quoque modo investigari queunt; beneficio Methodi de Maximis & Minimis, cujus Author est Vir Clarissimus D. de Fermat, in Parlamento Tolosano Confiliarius, quam Herigonius in supplemento Cursus sui Mathematici exemplis aliquot illustravit ²⁾, atque ibidem etiam ad inveniendas tangentes adhibere docuit ³⁾: haud abs re fore duxi, si hoc loco viam, quâ lineæ CP ope ejusdem Methodi sint inveniendæ, sequenti

calculo exposuero ⁴⁾). Ubi sciendum, calculum multò abbreviari posse, si in secunda hac operatione multiplicationes, quibus ad ee aut e^3 ascenditur, continuè omittantur.

Atque hæc quidem via est, quam & Hugenum secutum fuisse confido ⁵⁾, prout tangentes curvarum linearum se aliter quàm Fermatius ope hujus ipsius Methodi quæfivisse mihi affeveravit ⁶⁾.

¹⁾ On ne trouve, ni dans la Correspondance, ni dans les Manuscrits aucun renseignement sur la manière dont cette construction a été trouvée par Huygens. Elle est identique, comme on le voit, avec la construction moderne la plus simple qu'on obtient facilement par la considération du centre instantané de rotation du segment CL, lequel centre coïncide avec le point H de la figure.

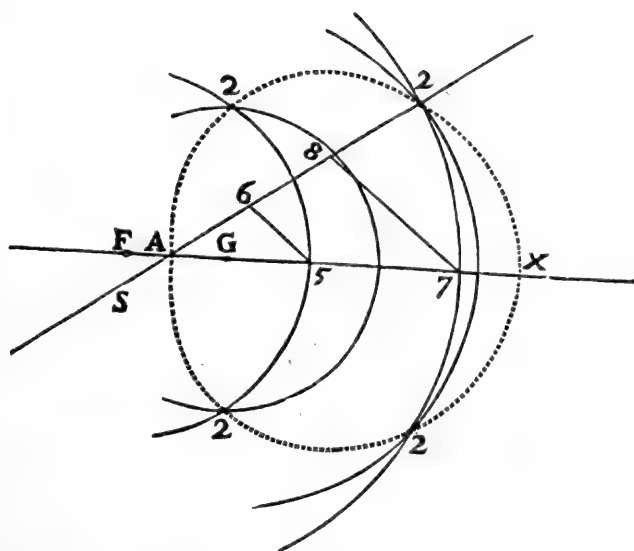
²⁾ On peut consulter sur cette méthode la p. 19 du T. XI et les p. 60—61 du T. XII.

³⁾ Comparez les p. 19—20 du T. XI.

⁴⁾ Nous supprimons ce calcul, dont voici le résumé: Posant $GA = b$, $EA = CL = c$, $BC = MA = y$, $AP = v$, on trouve $PC^2 = \frac{b^2c^2 + 2bc^2y + c^2y^2}{y^2} - b^2 - 2by + v^2 + 2vy$; expression que nous représenterons par $\varphi(y)$. Or, puisque PC doit être normale à la conchoïde, van Schooten se propose de déterminer la condition sous laquelle cette expression, considérée comme fonction de y , est un minimum. A cet effet il applique la méthode de Fermat, citée dans la note 2; c'est-à-dire, il suppose $\varphi(y) = \varphi(y + e)$, divise par e l'équation qui en résulte après réduction, et pose $e = 0$. De cette manière il trouve $v = b + \frac{bc^2}{y^2} + \frac{b^2c^2}{y^3}$. Or, l'abréviation indiquée se rapporte au calcul de $\varphi(y + e)$.

III⁷⁾.

1659.



Notavit hic⁸⁾ Clarissimus Hugenus, secundam hanc Ovalem⁹⁾ (quod animadversione dignum est) uno casu Circulum perfectum evadere, cum nempe FA ad AG eandem rationem habet, quam 5A ad A6¹⁰⁾. Adeoque radios lucis, ad punctum aliquod tendentes, ope superficiei Sphaericae ad datum aliud punctum omnes accuratè cogi posse¹¹⁾. Quod se apertius in tractatu de Dioptriciis demonstraturum suscepit, in quo multa egre-

gia ac ingeniosè à se inventa, quæ huc spectant, brevi, si volet Deus, est exhibiturus¹²⁾.

⁵⁾ Comparez la note 11 de la p. 48 du T. XI et la Seconde Partie de la Pièce N°. XIV, p. 65—67 du T. XII.

⁶⁾ Comparez les premières lignes de la Seconde Partie, citée dans la note précédente.

⁷⁾ Voir la note OO, p. 270 de la „Geometria” de 1659.

⁸⁾ Comparez le deuxième alinéa de la p. 305 de notre T. I.

⁹⁾ Il s'agit des ovales de Descartes, sur lesquels on peut consulter les p. 424—439 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes ou les p. 50—65 de l'édition de 1659 de la „Geometria”. Comme on sait, Descartes avait découvert que ces courbes pourraient servir à la construction de lentilles aplanatiques. Dans le cas présent l'équation de l'ovale peut s'écrire, en coordonnées bipolaires, $r - f = n(r' - g)$, où $r = F2$, $r' = G2$, $f = AF$, $g = AG = AS$ et où $n = \frac{A5}{A6}$ représente l'indice de réfraction.

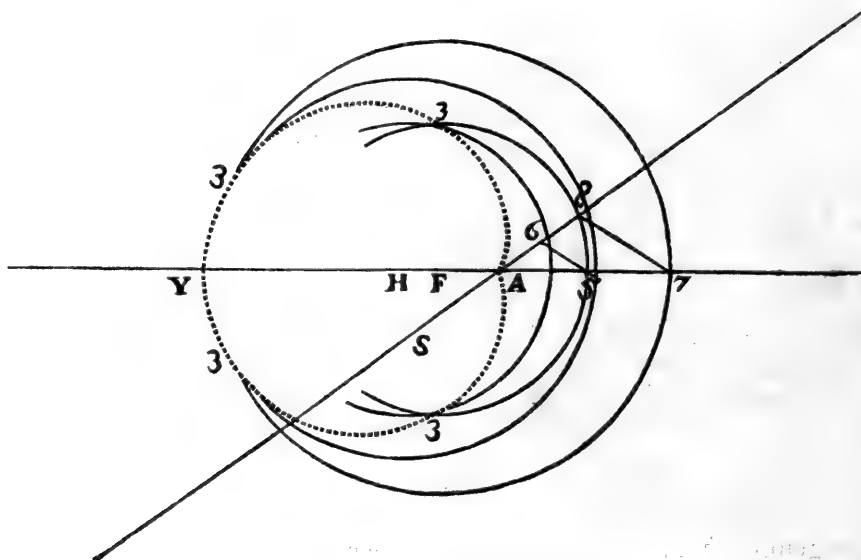
¹⁰⁾ En effet, on a alors $f = ng$. Par suite, l'équation se réduit à $r = nr'$, ce qui représente un cercle.

¹¹⁾ C'est cette découverte de Huygens, faite en octobre 1652, qui donna la première impulsion à ses recherches dioptriques; voir au T. XIII les p. XLVI—XLVII de l'Avertissement.

¹²⁾ Voir les p. 64—67 du T. XIII.

IV¹⁾.

1659.



Ubi ²⁾ etiam sciendum, ex positione punctorum H & F, quamadmodum Nobilissimus Hugenus notavit ³⁾, contingere posse, ut versùs A convexa existat ⁴⁾.

V⁵⁾.

1659.

Hujus rei ⁶⁾ elegans exemplum suggerere potest Problema Apollonii de Parabola, lib. 5 Conicorum, de quo meminit Pappus Alexandrinus in Scholio Prop.^{nis}

¹⁾ Voir la note PP, p. 276 de la „Geometria” de 1659.

²⁾ C'est-à-dire dans le troisième des cas que Descartes distingue dans la discussion de ses ovales. Ce cas est représenté dans la „Geometria” par la présente figure. Cette fois encore (voir la

30 libri 4^{ti} Collectionum Mathematicarum ⁷⁾). In cujus solutionem eos, qui id per Conica vel Linearia ⁸⁾, hoc est, per improprium genus solvere quæfiverunt, dum illud pro Plano Problemate habet, meritò reprehendit. Quoniam autem vir doctissimus ac de Mathematicis studiis perinde meritis Alexander Anderfonus ⁹⁾ in exercitatione sua 5^{ta} dictum Problema non levibus indiciis sequentis argumenti fuisse innuit, se'que ibidem scribit Analyticâ suâ duce tandem reperisse absque solida inclinatione (ut Pappus loquitur) non posse definiri: visum fuit id ipsum hîc loci, in hoc rationum æquilibrio autoribus istis dissentientibus, cuivis inquirendum proponere.

PROBLEMA.

Parabolâ datâ, è puncto, intra vel extra eam dato, rectam lineam ducere, quæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.

Etenim si in hujus Problematis solutione investiganda, rectam, quæ ad axem è puncto in Parabola, ad quod quæsitâ recta duci debet, perpendicularis demittitur, pro incognita quantitate accipiamus: incidemus in æquationem Cubicam, quæ nullo modo erit reducibilis, & tamen secundum regulam generalem p. 85 ¹⁰⁾

note 9 de la p. 419) l'équation de la courbe peut être mise sous la forme $r - f = n(r' - g)$, où maintenant $r = F_3$, $r' = H_3$, $f = AF$, $g = AH = AS$, $n = A_5 : A_6$.

³⁾ Voir le troisième alinéa de la p. 305 du T. I.

⁴⁾ Cette circonstance se présentera toutes les fois qu'on a $nf > g$. Or, au lieu cité dans la note précédente, Huygens formule cette même condition, puisqu'on y lit : „Imo etiam versus A convexa erit quoties HA ad AF minorem rationem habebit quam A5 ad A6”.

⁵⁾ Voir la p. 322 de l'édition de 1659 de la „Geometria”. Le passage qui va suivre fait partie de la note S qu'on trouve déjà dans l'édition de 1649 (p. 278), mais sans le passage en question qui fut ajouté évidemment à propos de la lettre de Huygens à van Schooten du 20 septembre 1653 (p. 242—243 du T. I).

⁶⁾ Van Schooten avait fait remarquer dans la première partie de la note S que lorsque dans l'énoncé d'un problème on suppose qu'une conique soit donnée, et que l'analyse du problème amène une équation du troisième ou quatrième degré, il est toujours possible de résoudre le problème en question par la règle et le compas en utilisant la conique donnée. Un tel problème peut donc être considéré en quelque sorte comme un problème plan, quoique ce soit au fond un problème solide.

⁷⁾ Nous avons reproduit le passage en question dans la note 5 de la p. 82 du T. XII.

⁸⁾ C'est-à-dire, par des lignes plus compliquées que les coniques.

⁹⁾ Consultez sur Anderson et sur son ouvrage la note 3, p. 243 du T. I.

¹⁰⁾ Il s'agit de la „Façon generale pour construire tous les problemes solides, reduits a vne Equation de trois ou quatre dimensions” (voir les p. 464—469 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes ou les p. 85—90 de l'édition de 1659 de la „Geometria”) où Descartes enseigne à résoudre ces problèmes à l'aide d'une parabole et d'un cercle.

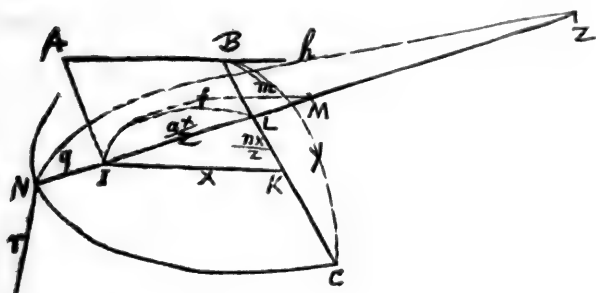
ope ejusdem datæ Parabolæ quàm facillimè construi poterit, utendo tantùm rectis lineis & circulo. Cujus porrò demonstrationem universalem, quam sibi vulgari modo Geometrarum, continuæ contemplationi figuræ obnoxiam, acutissimus pariter atque eruditissimus noster Chr. Hugenus concinnavit ¹⁾, cum ipsa jam pridem nobis aliis²⁾que ab eo communicata fuerit ²⁾, nec illa etiam hujus loci existat eandem hîc prætereundam duximus.

¹⁾ Voir les p. 81—82 du T. XII.

²⁾ Voir la lettre du 20 septembre 1653 à van Schooten, déjà mentionnée dans la note 5 de la p. 421, et celle du 1 juin 1656 à de Carcavy, p. 429 du T. I. Ajoutons que la question de savoir si un problème comme celui qui est traité ici doit être considéré comme plan, ou comme solide, est encore discutée dans la Correspondance aux pp. 61 du T. III et 160 du T. X.

AUX CONTRIBUTIONS AUX COMMENTAIRES DE
VAN SCHOOTEN SUR LA „GEOMETRIA RENATI DESCARTES”.

Ad pag. 33, 34 et 35 Geom. Cartesij. Edit. latinæ 3).



fit $r \propto$ latus rectum; $q \propto$ NI

$y = m - \frac{nx}{z}$; comme aussi pour trouver la distance IM qui détermine la situation du centre M de la conique, ou bien, dans le cas de la parabole, la distance IN. Il est vrai qu'un peu plus loin (p. 36—38 de l'édition de 1649, p. 32—34 de celle de 1659) il démontre, après coup,

$$m[\text{ult.}] \begin{cases} \frac{1}{2}h - f + \frac{ax}{z}NL \\ \frac{1}{2}h + f - \frac{ax}{z}LZ \end{cases}$$

$$h[\text{ad}]r[\text{ut}] \square NLZ \left(\frac{1}{4}hh + \frac{2fax}{z} - ff - \frac{aaxx}{zz} \right) [\text{ad}] \text{qu. LC } ^2)$$

$$\frac{2rfax}{z} - rff - \frac{raaxx}{zz} \quad \frac{1}{4}rh + \frac{rff}{h} \propto mm + ox - \frac{p}{m}x^2$$

hinc tres æquationes

$$\text{prima } \frac{2rfax}{zh} \propto ox \quad 2. \text{da } \frac{raaxx}{zzh} \propto \frac{pax}{m} \quad 3. \text{a } \frac{1}{4}rh - \frac{rff}{h} \propto mm \text{ restit. val. } ff \text{ fit}$$

$$f \propto \frac{zho}{2ar} \quad h \propto \frac{mraa}{pzz} \quad \frac{1}{4}rh - \frac{zzhoo}{4raa} \propto mm$$

Restitutis valoribus h et r

infra inventis ³⁾ erit $\frac{zho}{2ar}$ hoc

$$\text{est } f \propto \frac{oma}{2pz} \text{ IM } ^4).$$

$$h \propto \frac{4raamm}{rraa - zzoo}$$

$$\frac{mraa}{pzz} \propto \frac{4raamm}{rraa - zzoo}$$

$$rraa \propto 4mpzz + oozz$$

$$\text{lât. rect. } r \propto \frac{z}{a} \sqrt{4pm + oo} \text{ vel } r \propto \sqrt{\frac{oozz + 4mpzz}{aa}} ^4)$$

$$\text{restituto valore } r \text{ erit } \frac{mraa}{pzz} \text{ hoc est } h \propto \frac{ma}{pz} \sqrt{4pm + oo}$$

$$\text{latus transversum vel } h \propto \sqrt{\frac{mmaaoo}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} ^5)$$

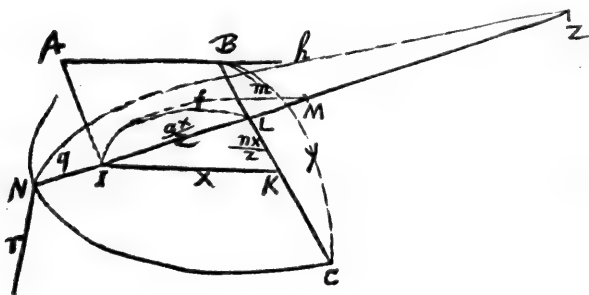
Si mm fuerit $\propto 0$ erit tertia æquatio $\frac{1}{4}rh - \frac{rff}{h} \propto 0$ unde $r \propto \frac{oz}{a}$ ut Cartesius

²⁾ D'après la „Prop. XXI” du „Lib. I” des „Con.” d'Apollonius que nous avons reproduite dans la note 12 de la p. 300 de notre T. XI.

³⁾ Voir plus bas les expressions $\frac{ma}{pz} \sqrt{4pm + oo}$ et $\frac{z}{a} \sqrt{4pm + oo}$ pour h et r .

⁴⁾ Formule qu'on retrouve à la p. 34 de l'édition de 1649, p. 30 de celle de 1659.

⁵⁾ Cette formule se retrouve respectivement aux pp. 35 et 31 des éditions de 1649 et 1659.



ait ¹⁾. At si $ox \propto 0$ erit in ter-
tia ²⁾ æquatione etiam $f \propto \frac{zho}{2ar}$
five nihilo. ergo in prima ³⁾
æquatione tantum $\frac{1}{4}rh \propto mm$ et
 $r \propto \frac{4mm}{h}$: sed inventum fuit
 $h \propto \frac{mraa}{pzz}$ in secunda æqua-
tione. igitur $r \propto \frac{4mmpzz}{mraa}$ et $rr \propto \frac{4mpzz}{aa}$, et $r \propto \sqrt{\frac{4mppzz}{aa}}$ ut refert Cartesius.
ibidem ⁴⁾.

Quod pro fractione $\frac{mn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ scribit $\frac{p}{m}$ ⁴⁾ id quidem facilitatis causa in
sequentibus facit quod denominatorem ponit m , eandem quantitatem cujus est
quadratum mm , verum et difficultatem aliquam idem affert cum termino $\frac{pxx}{m}$
nulla fractio adhæret etenim tum nusquam quidem apparet p et tamen in terminis
qui centrum et latera docent reperitur neque pro nihilo istic habendum sed cogi-
tandum quod $p \propto m$ ut recte notat Florim. de Baune ⁵⁾. Sed, quidni loco fractio-
nis prioris posuit $\frac{2n}{m}$ potius quam $\frac{2n}{z}$ ⁶⁾, nam et hoc magno usui fuisset in sequen-
tibus? Exprimeretur enim ea ratione linea IN per $\frac{am}{o}$ quæ prius erat $\frac{amm}{oz}$ ⁷⁾. Et
IM per $\frac{ao}{2p}$ ⁸⁾ quæ fuerat $\frac{aom}{2pz}$ latus rectum per $\sqrt{\frac{oomm + 4pm^3}{aa}}$ (sed hoc parvum
quidem prodest) latus transversum per $\sqrt{\frac{aaoo}{pp} + \frac{4aam}{p}}$. vel per $\frac{a}{p} \sqrt{oo + 4mp}$.
In parabola latus rectum erit $\frac{om}{a}$.

Ego itaque formulam universalem ⁹⁾ hanc ponerem $y \propto q - \frac{nx}{m} +$
 $+ \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$ ubi hoc tantum observandum quod si terminus $\frac{nx}{m}$ defue-
rit, erit $a \propto m$ ¹⁰⁾ et m ubique illius loco substituendum. Alterum autem ibidem ut
in Cartesiana tormula observandum, nempe si termino $\frac{p}{m}xx$ fractio desit, quod

tunc $p \propto m$ et m illius quoque loco substituendum. At hisce observationibus non erit opus si formula universalis hæc statuatur $y \propto q - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{l}xx}$.

Erit vero lat. rectum $\sqrt{\frac{4pzzmm + zzoal}{aal}}$ sive $\frac{z}{a} \sqrt{\frac{4pmm}{l} + oo}$, transversum $\frac{al}{pz} \sqrt{\frac{4pmm}{l} + oo}$ ratio horum quæ pzz ad aal . Si pro termino $\frac{nx}{z}$ habeatur x , oportet sumere $KL \propto IK$ vel AB et ducere IL . Ratio autem lineæ IK vel KL ad IL tunc erit ea quæ z ad a . Itaque in terminis qui centrum et latus rectum transversumque docent retinendæ z et a , pro quibus quælibet duæ lineæ sumendæ quæ rationem habeant quam IK ad IL . Si terminus $\frac{nx}{z}$ desit delendum ubique z et a ¹¹⁾.

¹⁾ Voir respectivement les pages citées dans la note précédente.

²⁾ Lisez: prima.

³⁾ Lisez: tertia.

⁴⁾ Voir la p. 31 de l'édition de 1649 (p. 27 de celle de 1659). Descartes, après avoir trouvé la solution du problème de Pappus à quatre lignes sous la forme: $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{mxx}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$, y pose $\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz} = 0$ et $\frac{mn}{z} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz} = [-] \frac{p}{m}$, afin de réduire cette équation à la forme plus simple $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$; voir sur le problème de Pappus la note 1 de la p. 210.

⁵⁾ Il s'agit évidemment du cas où l'expression sous le signe radical prend la forme $mm - ox - xx$, comme de Beaune le suppose dans l'„Observatio quarta” de ses „In geometriam Renati des Cartes notæ breves” qui furent insérées par van Schooten dans les éditions de la „Geometria”; voir la p. 137 de l'édition de 1649 (p. 122—123 de celle de 1659).

⁶⁾ Voir la page de la „Geometria” mentionnée dans la note 4. Afin de donner au deuxième terme du second membre de l'équation citée dans cette note la forme simple $\frac{nx}{z}$, Descartes avait posé auparavant $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz} = \frac{2n}{z}$. Remarquons d'ailleurs que la longueur z n'est introduite dans les formules de Descartes qu'afin de pouvoir représenter certains coefficients numériques par des rapports de longueurs; on peut donc lui supposer une grandeur arbitraire p. e. $z = m$.

⁷⁾ Il s'agit du cas de la parabole; voir p. 424 la formule pour $q = 1N$.

⁸⁾ Savoir dans le cas de l'ellipse; voir p. 425 la formule pour $f = 1M$.

⁹⁾ La formule est, en effet, plus générale que celle de Descartes, qui représente une conique passant par l'origine des coordonnées.

¹⁰⁾ Puisqu'alors la droite NZ est parallèle à l'axe AB de sorte que les lignes IL et IK coïncident; on a donc $a = z = m$.

¹¹⁾ Savoir en remplaçant le quotient $\frac{a}{z}$ par l'unité.

229

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1661 À 1666.

RECHERCHES SUR LE CALCUL DES LOGARITHMES ET SUR LA COURBE LOGARITHMIQUE.

QUADRATURE DE L'HYPÉROLE PAR LES LOGARITHMES. APPLICATION À LA DÉTERMINATION DE L'ALTITUDE PAR LA HAUTEUR DE LA COLONNE BAROMÉTRIQUE ET RÉCIPROQUEMENT.

CONSTRUCTION DE L'HEPTAGONE RÉGULIER.

COURBE DE GUTSCHOVEN. QUADRATURE ET CUBATURE DE L'UN DE SES SOLIDES DE RÉVOLUTION.

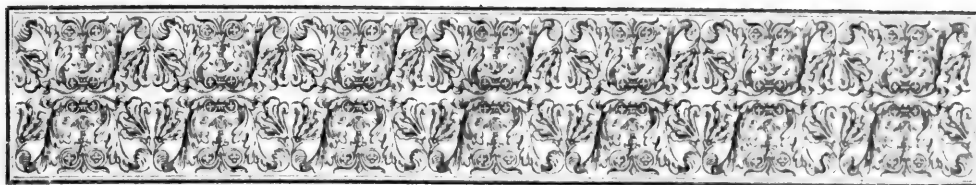
RÈGLES POUR TROUVER LES TANGENTES AUX COURBES ALGÈBRIQUES.

TROUVER PAR CONSTRUCTION LE DIAMÈTRE D'UNE SURFACE SPHÉRIQUE.

RECHERCHES SUR LES CUBIQUES.

CALCUL DU PLUS PETIT NOMBRE QUI, APRÈS DIVISION PAR DES NOMBRES DONNÉS, LAISSE DES RESTES DONNÉS.

EXAMEN D'UNE RECTIFICATION APPROCHÉE DE LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.



Avertissement.

Recherches de 1661 et 1662 sur le calcul des logarithmes et sur la quadrature de l'hyperbole par les logarithmes. Application à la détermination de l'altitude qui correspond à une hauteur donnée de la colonne barométrique et réciproquement.

En 1868, Joseph Bertrand découvrit ¹⁾ dans le „Registre des procès verbaux de l'Académie des Sciences” une „règle pour trouver les logarithmes”, communiquée par Huygens à cette Assemblée, en 1666, dans l'une de ses premières réunions. Bertrand jugea cette règle „remarquable et élégante en elle-même et la démonstration que Huyghens ne donne pas” lui parut „difficile à faire sans recourir à la série logarithmique de Mercator ²⁾”, publiée seulement en 1668 ³⁾ et présentée à cette date par Huyghens lui-même dans l'une des séances de l'Académie ⁴⁾”.

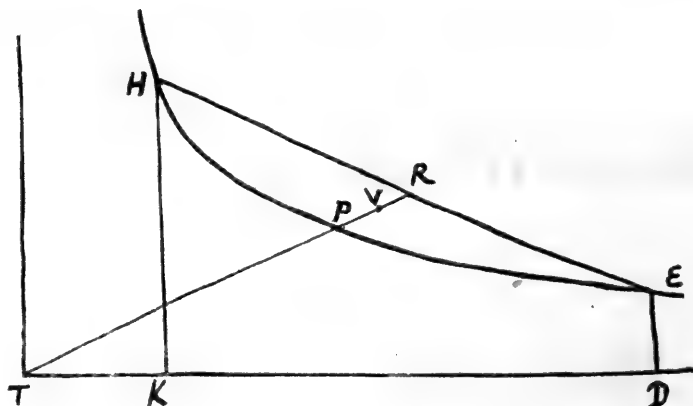
¹⁾ Comparez les p. 565—567 du T. 66 des „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences”.

²⁾ La série bien connue $1(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$

³⁾ Dans la „Logarithmo-Technia” de Mercator, ouvrage cité dans la note 5 de la p. 276 du T. VI.

⁴⁾ Dans la séance du 17 octobre 1668.

Or, la Pièce N°. I (p. 451—457), datée d'août 1661, nous donne la solution de cette énigme. Elle nous fait connaître la méthode suivie par Huygens pour trouver la règle; méthode qui, en effet, n'a rien à faire avec la série de Mercator, puisqu'elle s'appuie sur une quadrature approchée de l'hyperbole, déduite par Huygens d'un théorème qu'il avait publié en 1651 dans ses „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro”.



Suivant ce théorème¹⁾ on peut calculer l'aire d'un segment hyperbolique HPERH²⁾ pourvu qu'on connaisse la situation du centre de gravité V sur le diamètre PR.

Si donc, on remplace, par première approximation, le

segment hyperbolique par un segment parabolique construit sur le même diamètre PR et sur la même base HE, il est facile de trouver une valeur approchée pour l'aire du segment HPE (et, par suite, aussi pour celle de la figure mixtiligne HKDEPH³⁾), puisqu'on fait que dans un segment parabolique le centre de gravité divise le diamètre PR dans la raison de 3 à 2.

Considérons maintenant la figure suivante, qui correspond à celle de la p. 451 du texte qui suit. Par un théorème dû à Grégoire de St. Vincent⁴⁾ Huygens savait que les aires des figures mixtilignes ABDEA et FGDEF sont

¹⁾ Voir la note 6 de la p. 453.

²⁾ Nous empruntons cette figure à celle de la p. 453 du texte après en avoir ôté les lignes dont nous n'avons pas besoin ici.

³⁾ Comparez les p. 453—455.

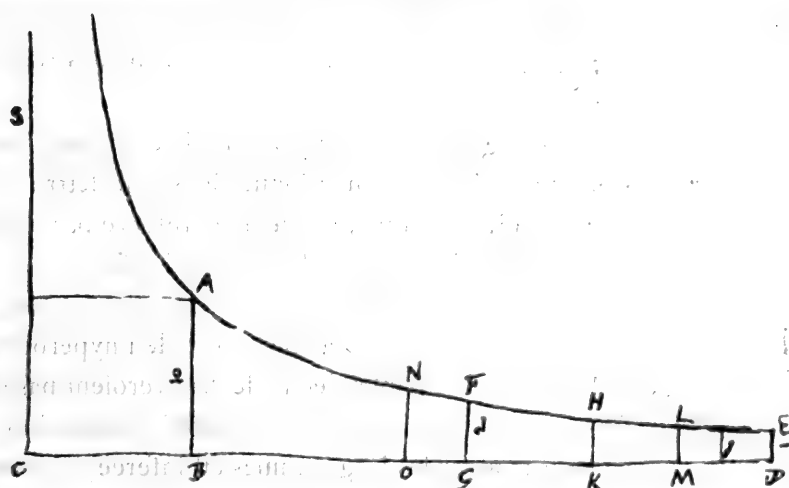
⁴⁾ Voir la note 3 de la p. 452.

⁵⁾ Dans le cas de $\beta = 2$ on trouve $\log 2 = 0,3029$ au lieu de $0,3010$.

⁶⁾ Comparez la note 1 de la p. 456.

⁷⁾ Voir les p. 307—308 du T. III.

⁸⁾ Voir aux p. 169—174 de notre T. X la „Lettre de Mr. Huygens à l'Auteur touchant le Cycle Harmonique” et consultez encore la p. 100 du T. V.



proportionnelles aux logarithmes des rapports des ordonnées extrêmes. Posant donc $DE = 1$, $AB = 10$, $FG = \beta$, on a :

$$\log \beta = \frac{\text{aire FGDEF}}{\text{aire ABDEA}}.$$

Si Huygens avait appliqué directement sa quadrature approximative aux aires FGDEF et ABDEA, le résultat aurait été très peu satisfaisant ⁵⁾, mais l'approximation devient évidemment meilleure à mesure qu'on rapproche les ordonnées extrêmes AB et FG de DE sans changer le rapport des aires. Afin de profiter de cette circonstance, Huygens divise l'aire ABDE en deux parties égales par l'ordonnée NO, moyenne proportionnelle entre AB et DE, et il agit de la même façon avec l'aire FGDE. Répétant cinq fois ces opérations, il obtient des figures, limitées à droite par l'ordonnée DE, dont les aires sont la trente-deuxième partie respectivement des aires ABDE et FGDE. Or, c'est à celles-ci qu'il applique sa méthode.

Pour vérifier ensuite l'efficacité de sa règle, il l'emploie au calcul de $\log 2$, avec le résultat qu'il trouve „10 caractères vrais et l'unzième qui surpasse le vrai de l'unité” ⁶⁾.

Entièrement satisfait de ce résultat, il annonce sa découverte le 1 août 1661 à Moray dans les termes suivants ⁷⁾: „Je me suis occupé pendant quelques jours à étudier la musique, et la division du monochorde à la quelle j'ay appliqué heureusement l'algebre ⁸⁾. J'ay aussi troué que les logarithmes y font de grand usage, et de la je me suis mis à considérer ces merveilleux nombres et admirer

l'industrie et la patience de ceux qui nous les ont donnez. Que si la peine n'en estait desja prise, j'ay une regle pour les trouver avec beaucoup de facilité, et non pas la vingtieme partie du travail qu'ils ont cousté".

Comme nous l'avons vu, Huygens communiqua sa règle en 1666 à l'Académie des Sciences. En novembre 1667 il la mentionne dans une lettre au Prince Léopoldo de Medicis ¹⁾ parmi les travaux qu'il tient en réserve parce qu'il n'y a pas encore mis la dernière main. Enfin, dans le Journal des sçavans du 2 juillet 1668 ²⁾, il fait allusion à sa Règle en faisant remarquer, à propos de ce qui est dit sur le rapport entre les logarithmes et la dimension de l'hyperbole dans un livre de Gregory „que Messieurs de l'Assemblée ne le trouveroient pas nouveau, puisqu'ils pourroient se souvenir qu'il leur a desja proposé la même chose, & que la regle qu'il a donnée pour trouver les Logarithmes est inferée il y a longtemps dans leur Registre".

Onze mois après la découverte de sa règle, Huygens aperçut que la quadrature approchée de l'hyperbole, qu'il y avait appliquée, était encore susceptible d'une autre application non moins importante. Il s'agit de la quadrature de



l'hyperbole par les logarithmes ³⁾. Du théorème de Grégoire de St. Vincent, que nous avons cité plus haut ⁴⁾, il suit que le rapport de l'espace hyperbolique TVDE ⁵⁾ au carré caractéristique AC est proportionnel à la différence des logarithmes de TV et de ED. On a donc :

¹⁾ Voir la p. 162 du T. VI.

²⁾ Voir la note 1 de la p. 231 du T. VI.

³⁾ Voir la Pièce N°. III (p. 474—482), datée du 16 juillet 1662.

⁴⁾ Voir le dernier alinéa de la p. 432.

⁵⁾ La figure est identique à celle de Huygens qu'on trouve à la p. 474.

$$(1) \quad \log. \frac{TVDE}{q^2} = \log (\log TV - \log ED) + C,$$

où q représente le côté AB du carré caractéristique, et où C est une constante.

Afin d'obtenir une formule commode pour calculer l'aire d'un espace hyperbolique comme TVDE, il suffit donc de déterminer, une fois pour toutes, la valeur de la constante C . À cet effet Huygens applique la quadrature approchée à l'espace

HKDE où $\frac{HK}{DE} = \sqrt[32]{\frac{AB}{DE}} = \sqrt[32]{10}$. Profitant des calculs qu'il avait déjà accomplis en 1661, il trouve pour cet espace $719557838,5^6$), savoir, en supposant $DE = 10^4$ et $AB = q = 10^5$. Il l'en suit :

$$\log (719557838,5 : 10^{10}) = -\log 32 + C,$$

ce qui permet de calculer la valeur de C , pour laquelle Huygens, se servant des tables de Vlacq à dix mantisses⁷⁾, trouve $0,3622156868$; nombre qu'il a remplacé plus tard par $0,3622156887$ ⁸⁾ à la suite d'un nouveau calcul que nous ne connaissons pas.

Or, on fait par l'analyse moderne qu'on a :

$$\frac{TVDE}{q^2} = l. TV - l. ED = \frac{1}{M} (\log TV - \log ED),$$

où M est le module du système ordinaire des logarithmes. Il en résulte $C = -\log M = -\log \log e = 0,362215688699 \dots$, ce qui prouve l'exactitude des calculs de Huygens et surtout du dernier calcul dont les détails nous sont inconnus.

Ayant trouvé ainsi la règle pour la quadrature de l'hyperbole par les logarithmes, il l'applique d'abord à quelques exemples numériques⁹⁾ et il montre ensuite comment elle peut servir au calcul de l'aire d'un segment hyperbolique quelconque¹⁰⁾ et à la rectification de la parabole¹¹⁾, qu'il avait apprise à réduire, cinq ans plus tôt¹²⁾, à la quadrature de l'hyperbole.

⁶⁾ Voir la p. 475.

⁷⁾ Voir sur ces tables la note 1 de la p. 478.

⁸⁾ Consultez le troisième alinéa de la note 1 de la p. 476.

⁹⁾ Voir les p. 477—480.

¹⁰⁾ Voir les p. 480—481.

¹¹⁾ Voir les p. 481—482.

¹²⁾ Voir les p. 234—235.

Puis, le lendemain de la rédaction de la Pièce N°. III que nous venons d'analyser, une application bien autrement intéressante se présenta à lui ¹⁾.

Quelques mois auparavant, en mars 1662 ²⁾, Moray l'avait averti de la relation simple, récemment découverte par Boyle, d'après laquelle le volume d'une quantité donnée d'air est inversement proportionnel à la pression à laquelle on la soumet. À la description succincte de l'une des expériences de Boyle, Moray avait ajouté la phrase un peu énigmatique : „Je crois que vous comprendrez assez bien par cette courte description que cecy en veut à l'Atmosphère, mais comme que ce soit J'ay trop de besogne de reste, pour m'y arrester plus long temps”. En réponse ³⁾, Huygens demanda des renseignements sur un point important qui lui était resté douteux ; du reste il ne voyait pas encore qu'il fût fort aisé de déduire des expériences de Boyle la hauteur de l'atmosphère, il croyait que pour cela on aurait besoin encore d'autres expériences, comme celles qu'on avait fait en France sur les montagnes d'Auvergne ⁴⁾. Cependant, avant d'avoir obtenu l'éclaircissement demandé ⁵⁾, Huygens reçut le 12 juillet l'ouvrage de Boyle ⁶⁾ où celui-ci donne en détail les résultats de deux séries d'expériences touchant la condensation et la raréfaction de l'air. Ayant pris connaissance de ces résultats „qui prouvent” comme il s'exprime ⁷⁾ „assez clairement cette propriété remarquable [de l'air] à sçavoir que la force de son ressort suit la proportion contraire des espaces ou il est réduit”, Huygens ne doutait plus de l'exactitude approximative ⁸⁾ de la loi de Boyle. Quelques jours après ⁹⁾, il se mit à l'œuvre pour chercher la relation qui devait exister entre l'altitude au-dessus de la mer

¹⁾ Voir aux pp. 474 et 483 les dates des Pièces N°. III et N°. IV.

²⁾ Voir aux p. 84—85 du T. IV la lettre de Moray à Huygens du 13 mars 1662.

³⁾ Voir la lettre de Huygens du 9 juin 1662, p. 150 du T. IV.

⁴⁾ Consultez sur ces expériences la „Lettre de Monsieur Perier”, mentionnée dans la note 4 de la p. 492.

⁵⁾ Moray le lui fournit dans une Pièce qui accompagna sa lettre du 17 juillet 1662 et qu'il avait copiée de l'ouvrage de Boyle mentionné dans la note suivante; voir les p. 176—178 du T. IV.

⁶⁾ Voir la p. 171 du T. IV. Il s'agit de la „Defensio Doctrinae de Elatere et Gravitate Aeris”, citée dans la note 2 de la p. 171 du T. IV.

⁷⁾ Voir sa lettre du 14 juillet 1662, p. 171 du T. IV.

⁸⁾ Voir à la p. 485 qui suit ses réserves sur l'exactitude absolue de la loi de Boyle dans le cas des très petites pressions.

⁹⁾ Voir, à la p. 483, la date de la Pièce N°. IV.

¹⁰⁾ Huygens ne semble s'être douté aucunement de l'influence de l'abaissement de la température qui accompagne l'augmentation de l'altitude. Il n'en dit pas un mot, ni dans la Pièce en question, ni ailleurs.

et la hauteur de la colonne barométrique, dans l'hypothèse que la diminution de la pression dans les couches diverses de l'atmosphère se conforme entièrement à la loi récemment découverte ¹⁰⁾).

En effet, par un raisonnement subtil, pour lequel nous renvoyons au texte de la Pièce N°. IV¹¹⁾, Huygens trouve une relation qui est équivalente à la formule, en notation moderne :

$$(2) \quad \frac{-\int_{p_0}^p v dp}{v_0 p_0} = \frac{h}{h_0},$$

où h_0 désigne la hauteur fictive jusqu'à laquelle l'atmosphère s'étendrait si sa densité était partout égale à celle de la couche d'air qui se trouve au niveau de la mer, où h indique l'altitude du lieu, v le volume d'une particule d'air à cette altitude, p la pression à laquelle elle y est soumise, et enfin v_0 le volume de cette même particule transportée au niveau de la mer où la pression est p_0 .

Or, puisque, d'après la loi de Boyle, on a $v = \frac{v_0 p_0}{p}$, il est évident que la détermination de $-\int_{p_0}^p v dp$ se réduit à la quadrature d'un espace hyperbolique auquel la formule (1), p. 435, est applicable lorsqu'on y remplace q^2 par $p_0 v_0$. De cette façon on trouve :

$$(3) \quad \log (\log p_0 - \log p) + C = \log h - \log h_0,$$

où C représente la constante de Huygens que nous avons trouvée égale à $-\log \log e$.

C'est là, à part une petite complication sur laquelle nous n'insistons pas ici ¹²⁾, la formule qui correspond au calcul de la p. 486 du texte; mais puisque h_0 est une constante (du moins lorsque l'unité de longueur qu'on emploie à mesurer les altitudes est donnée) on peut écrire :

$$(4) \quad \log (\log p_0 - \log p) + C_1 = \log h$$

où

$$C_1 = C + \log h_0.$$

¹¹⁾ Voir les p. 484—485.

¹²⁾ En vérité ces calculs sont conformes à la formule :

$$\log h = \log (\log p_0 - \log p) + \log v_0 p_0 + C - (\log v_0 p_0 - \log h_0),$$

où $v_0 p_0$ est posé égal à 100000.

Pour supputer la valeur de h_0 , Huygens devait connaître la hauteur de la colonne barométrique au niveau de la mer, qu'il suppose égale à 30 pouces anglais¹⁾, et le rapport du poids spécifique du mercure à celui de l'air²⁾.

Il trouve de cette façon 32640 pieds anglais pour la hauteur fictive h_0 de l'atmosphère supposée homogène, nombre qu'il remplace par le nombre rond 33000. À l'aide de cette donnée on trouve $C_1 = 4,88073$; mais, par suite de la complication mentionnée, les calculs abrégés, que Huygens fait suivre³⁾, sont mieux représentés par la formule:

$$(5) \quad (\log(\log p_0 - \log p) + 5) - 0,11927 = \log h,$$

où 0,11927 est le „numerus perpetuus” qui entre dans tous les calculs.

Ayant appliqué la règle qu'il venait d'obtenir à plusieurs exemples⁴⁾, il communique, le 17 août 1662, à son frère Lodewijk les résultats de deux d'entre eux⁵⁾, le priant d'en faire part au duc de Roanez⁶⁾, un de ses amis parisiens. Le lendemain il exposa sa règle, appliquée à trois exemples, à Moray⁷⁾, sans toutefois en faire connaître la démonstration.

Si dans la Pièce N°. IV, dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, Huygens discute des exemples fictifs, dans l'Appendice I (p. 491—494), de date inconnue, que nous avons ajouté à cette Pièce, il discute les célèbres expériences faites par Perier au Puy de Dôme en Auvergne sur l'instigation de Pascal.

À cet effet il devait commencer par changer le „numerus perpetuus” pour l'adapter à l'emploi du pied de Paris, qui remplace le pied anglais des calculs précédents⁷⁾; ensuite il applique sa règle aux données fournies par Perier, pour en

¹⁾ Voir les premières lignes de la p. 483.

²⁾ Voir la p. 483 et surtout la note 4 de cette page.

³⁾ Voir les p. 486—490.

⁴⁾ Voir la p. 198 du T. IV.

⁵⁾ Voir sur Artus Gouffier, duc de Roanez et sur ses relations avec Huygens la p. 238 du T. III et les pp. 7, 33, 53, 71 et 180 du T. IV.

⁶⁾ Voir les pp. 202 et 205—206 du T. IV. On trouve la réponse de Moray à la p. 217 du même Tome. Moray y mande que „tous nos Messieurs” (savoir les membres de la Royal Society) „sont très satisfaits de votre Reigle”.

déduire entre autres l'altitude du sommet du Puy de Dôme. Il trouve pour cette altitude une valeur qui, même après la correction notable que nous y avons apportée⁸⁾, est trop forte; conséquence nécessaire de l'hypothèse dont il part⁹⁾.

Enfin, beaucoup plus tard, en 1673, Huygens s'est occupé encore une dernière fois du même sujet à propos d'une expérience de Cassini faite sur une montagne près de Toulon¹⁰⁾.

La courbe logarithmique.

Il y a lieu de s'étonner que les recherches sur la courbe logarithmique qu'on trouve dans la Pièce N°. II (p. 460—471) (quoiqu'elle n'y soit pas encore indiquée sous ce nom) portent une date si ancienne que celle de septembre 1661. En effet Huygens ne mentionne ces recherches, ni dans sa lettre à Leopoldo de Medici¹¹⁾, du 19 novembre 1667, où il énumère ses travaux encore inédits, ni dans le reste de sa correspondance antérieure à sa lettre à Leibniz du 23 février 1692¹²⁾, ni dans l'„Horologium oscillatorium” de 1673, où il donne tant de résumés de ses travaux mathématiques pas encore publiés¹³⁾.

Cependant la date en question est inscrite en tête de la Pièce N°. II, d'une manière tout-à-fait distincte, ne permettant aucun doute. Il s'en suit que, lorsque les résultats concernant une ligne courbe qu'il avait „examinée longtemps auparavant” et qu'il proposa d'appeler „Logarithmique” ou „Logistique”, furent publiés enfin, sans leurs déductions, dans son „Discours de la cause de la pesanteur”¹⁴⁾, ils avaient été connus à Huygens pour la grande majorité, et quant aux plus importants, depuis presque trente ans.

Les déductions qui manquent dans ce „Discours”, on les trouve, pour la plupart, dans la Pièce N°. II. Commençons par observer que chez la „Logarith-

⁷⁾ Consultez la p. 494 et surtout la note 3 de cette page.

⁸⁾ Voir les notes 9 de la p. 493 et 1 de la p. 494.

⁹⁾ Consultez la note 12 de la p. 493.

¹⁰⁾ Voir l'Appendice II, p. 495—497.

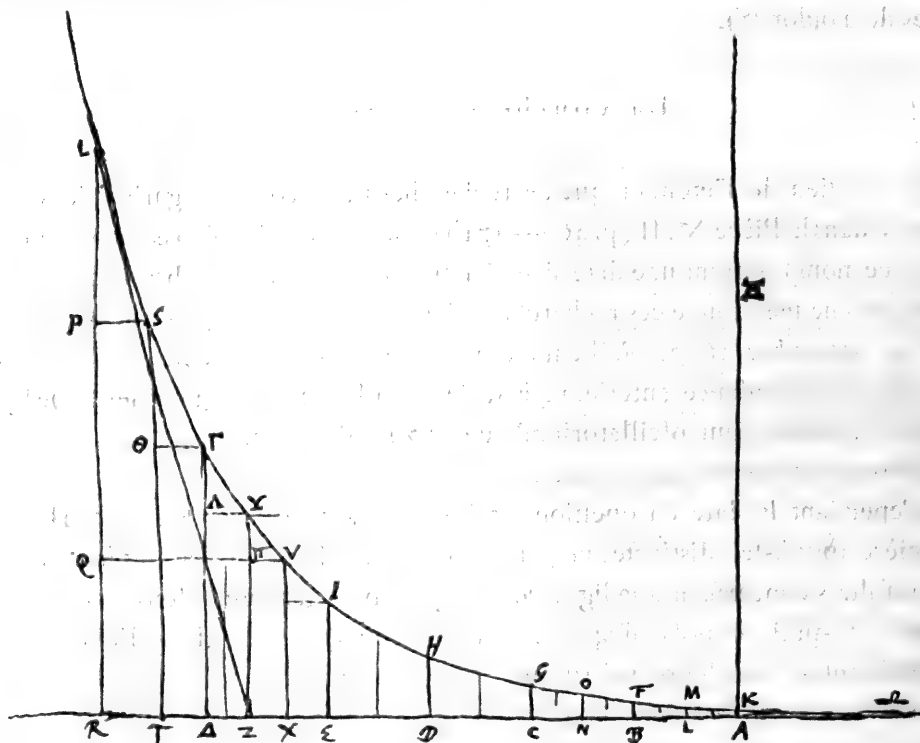
¹¹⁾ Voir les p. 160—163 du T. VI.

¹²⁾ Voir la p. 21 du T. X.

¹³⁾ Voir les pp. 192, 195, 198, 206 et 207 du Tome présent, comme aussi la note 2 de la p. 347 et la note 2 de la p. 476.

¹⁴⁾ Voir la p. 169 de l'édition originale.

mique" les abscisses, comme AD^1), sont proportionnelles aux logarithmes des ordonnées HD , pourvu qu'on prenne AK pour unité de longueur des ordonnées. Cette courbe peut donc servir à exécuter graphiquement toutes les opérations auxquelles on emploie les logarithmes ²). Or, ce qu'il y a de remarquable, c'est



qu'on peut construire la logarithmique par points sans recourir à une table de logarithmes. Huygens, à cet effet, porte sur l'axe des x successivement les segments égaux AB , BC , CD , etc. et il prend chaque fois l'ordonnée, qui correspond à l'extrémité d'un tel segment, égale au double de celle du point de division qui précède; de sorte qu'on a $BF = 2AK$, $GC = 4AK$, $HD = 8AK$, etc. Ensuite, afin d'interpoler d'autres points entre les points K , F , G , H , etc., il

¹) La figure est identique à celle de la p. 460 du texte.

²) Comparez la p. 461. Huygens s'y borne au problème d'interpoler entre deux segments donnés un nombre quelconque de segments continûment proportionnels; problème auquel il avait été conduit par ses recherches sur le „Cycle Harmonique”; voir la note 8 de la p. 432.

suffit de diviser chaque segment en deux parties égales par les points L, N, etc., d'y ériger des ordonnées qui sont les moyennes proportionnelles entre celles des points extrêmes du segment, et de répéter cette opération sur les nouveaux segments, toujours plus petits, autant de fois qu'on le désire ³⁾.

C'est de cette construction que Huygens se sert pour formuler la définition de la courbe ⁴⁾. Il en conclut d'abord que les abscisses peuvent être considérées comme les logarithmes des ordonnées et que deux ordonnées dont la distance de l'une à l'autre est donnée sont partout dans le même rapport ⁵⁾. Partant de cette dernière propriété, il fait en déduire, par voie géométrique, plusieurs autres, parmi lesquelles nous signalons l'invariabilité de la longueur de la sous-tangente ⁶⁾ dont le rapport à la distance entre deux ordonnées dont l'une est le double de l'autre, est trouvé égal à celui de 0,434294481903251804 ⁷⁾ à $\log 2$. Il trouve par la même voie la quadrature de l'espace compris entre deux ordonnées ⁸⁾, la situation du centre de gravité de l'espace qui s'étend à l'infini entre la courbe et l'asymptote depuis une ordonnée donnée ⁹⁾, puis les cubatures des solides engendrés par la révolution d'un tel espace respectivement autour de l'asymptote ¹⁰⁾ et autour de l'or-

³⁾ Dans le „Discours de la cause de la pesanteur”, p. 169—170 de l'édition originale, cette construction est généralisée, puisqu'on y lit (après avoir adapté les notations à celles de la présente figure): „Cette ligne infinie étant IGK, elle a une ligne droite pour Asymptote, comme DA; dans la quelle si on prend des parties égales quelconques qui se suivent, comme ED, DC, & que l'on tire des points E, D, C, des perpendiculaires jusqu'à la courbe, sçavoir EI, DH, CG, ces lignes seront proportionnelles continues. D'où l'on voit qu'il est aisé de trouver autant de points qu'on veut dans cette courbe”.

Ajoutons qu'on rencontre la même construction dans un manuscrit de Torricelli, qui mourut en 1647. Ce manuscrit fut publié en 1900 par Gino Loria dans la „Bibliotheca Mathematica”, Dritte Folge, Band 1, p. 80—89. Torricelli appelle la courbe „Hemihyperbola”, parce qu'elle ne possède qu'une seule asymptote, mais plus loin il propose aussi de l'appeler „linea logarithmica sive Neperiana”. Il prouve l'invariabilité de la longueur de la sous-tangente et il donne de plus la quadrature de la courbe et la cubature du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'asymptote.

⁴⁾ Voir le premier alinéa de la p. 461.

⁵⁾ Voir le deuxième alinéa de la p. 461.

⁶⁾ Voir la p. 463.

⁷⁾ Le mérite d'avoir calculé en tant de décimales ce nombre qui est égal à $\log e$, n'appartient pas à Huygens, puisqu'il pouvait l'emprunter à l'„Arithmetica Logarithmica” de Briggs; consultez la note 3 de la p. 465.

⁸⁾ Voir les pp. 462—463 et 466.

⁹⁾ Voir les pp. 467—470 et, pour le cas plus général où l'espace est limité par deux ordonnées, la p. 471.

¹⁰⁾ Voir la p. 467.

donnée¹⁾. Enfin Huygens ajoute, sans démonstration, deux théorèmes qui font connaître la situation du centre de gravité dans l'un et dans l'autre de ces solides²⁾.

Affurément la Pièce que nous venons d'analyser est un des plus beaux exemples de ce que les meilleurs géomètres du dix-septième siècle savaient accomplir avant l'invention de l'algorithme du calcul différentiel et intégral.

Détermination de la tangente à une courbe algébrique.

La règle pour déterminer les tangentes d'une courbe algébrique quelconque donnée par son équation cartésienne $f(x, y) = 0$, telle qu'elle fut exposée par Huygens dans le manuscrit qui accompagna sa lettre à Johan de Witt du 25 février 1663³⁾, semble être une extension si naturelle de la méthode de Fermat, surtout après la simplification que Huygens y avait apportée⁴⁾, qu'on croirait que Huygens a dû la découvrir aussitôt qu'il se fut posé le problème en question. Cependant les manuscrits nous montrent qu'il en a été tout autrement. Dans le fait, Huygens, avant d'arriver à la solution que nous connaissons, en avait trouvé d'autres assez intéressantes, mais beaucoup plus compliquées.

L'impulsion à de nouvelles recherches sur les tangentes lui fut donnée par une lettre de de Sluse datée du 18 août 1662⁵⁾. Dans cette lettre celui-ci annonça qu'il avait perfectionné une méthode, inventée il y avait plusieurs années, de telle façon qu'il pouvait trouver les tangentes d'une courbe, presque sans calcul, par la seule inspection des termes de son équation⁶⁾. Comme un exemple des

¹⁾ Voir le premier alinéa de la p. 471.

²⁾ Voir la p. 471. Nous avons trouvé dans le Manuscrit G une démonstration du premier théorème, de date beaucoup plus récente que la Pièce N°. II; voir l'Appendice, p. 472—473. Quant à l'autre théorème concernant le centre de gravité du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'ordonnée, les manuscrits n'en contiennent pas la démonstration; mais consultez la note 7 de la p. 470.

³⁾ Voir les p. 311—317 du T. IV.

⁴⁾ On peut consulter sur la méthode de Fermat et sur la simplification que Huygens y apporta les pp. 20 du T. XI; 65—66 du T. XII et 297 du Tome présent.

⁵⁾ Voir la p. 207 du T. IV où l'on lit: „Nuper tamen methodum tangentium ex notâ applicatarum ad partes axis qualicunque ratione, quam ante plures annos inueneram, ad facilitatem maximam deduxi, ita ut inspectâ solum in terminis analyticis æquatione quæ curvæ proprietatem ostendit, fere absque calculo tangentem ducam. Vnam hæc meâ methodo inuentam addo, in curvâ quam olim Clarissimus Gutisconius mihi proposuit”.

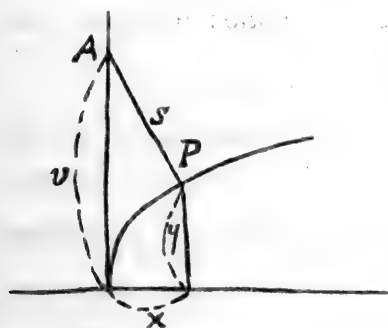
⁶⁾ La méthode fut publiée, sans démonstration, dans le N°. 90 des „Philosophical Transactions”

résultats auxquels cette méthode pouvait conduire, il décrit la construction de la tangente à une certaine courbe qui lui fut proposée jadis par van Gutschoven ⁷⁾.

L'équation de cette courbe peut s'écrire $y^4 + y^2x^2 - d^2x^2 = 0$. Elle est facilement résoluble par rapport à x^2 , de sorte qu'on a $x^2 = \frac{y^4}{d^2 - y^2}$. Or, quoique Huygens ne pût pas croire que la méthode de de Sluse fût basée sur cette particularité ⁸⁾, il commença toutefois par chercher les moyens de déterminer les tangentes d'une courbe $x^2 = f(y)$, au cas où $f(y)$ représente une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire ⁹⁾.

Pour des raisons qu'il est difficile de deviner, Huygens n'appliqua pas à ce problème la méthode de Fermat telle qu'il l'avait simplifiée, mais il chercha d'autres méthodes par lesquelles le problème est réduit à celui de trouver le maximum ou minimum d'une fraction algébrique $\frac{\varphi(y)}{\psi(y)}$; problème qui avait été résolu par Hudde ¹⁰⁾.

La première de ces méthodes rappelle fortement celle inventée par Descartes pour déterminer les tangentes, ou plutôt les normales, d'une courbe donnée ¹¹⁾.



Soit, afin d'exposer cette méthode, s la ligne qui joint le point A de l'axe des y à un point P de la courbe, de sorte qu'on a :

$$AP^2 = s^2 = (y - y')^2 + x^2 = y^2 - 2yy' + y'^2 + f(y).$$

Si, ensuite, nous déplaçons le point P le long de la courbe, cette expression pour s^2 sera stationnaire (c'est-à-dire elle sera en général maxi-

du 20 janvier 1673, p. 5143—5147; elle ne diffère pas essentiellement de celle de Huygens exposée dans l'appendice à sa lettre à de Witt. Dans le N°. 95 du 23 juin 1673, p. 6059 de Sluse donna quelques indications sur la manière dont il savait démontrer sa règle.

⁷⁾ Consultez sur cette courbe la p. 501.

⁸⁾ On peut consulter la lettre de Huygens à de Sluse du 25 septembre 1662, p. 238 du T. IV; mais nous citerons le passage en question plus loin à la p. 445.

⁹⁾ Voir les p. 504—508.

¹⁰⁾ Voir la note 4 de la p. 505.

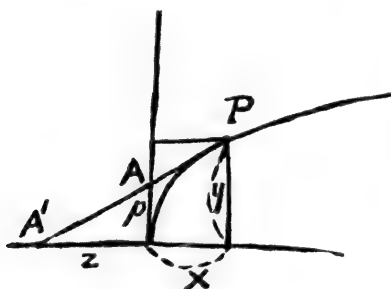
¹¹⁾ Il y a toutefois cette différence, qu'au lieu de chercher la grandeur minimum du segment AP ,

mum ou minimum) à l'instant où la ligne s devient normale à la courbe. L'application de la méthode de Hudde amène donc dans ce cas une équation, qui, en notation moderne, s'écrit :

$$-2y + 2y + f'(y) = 0,$$

et dont on déduit $y = y + \frac{1}{2}f'(y)$; ce qui permet de construire la normale AP et, par suite, aussi la tangente du point P¹⁾.

La deuxième méthode est plus originale. Cette fois Huygens choisit le point fixe A sur la tangente elle-même, savoir à son point d'intersection avec l'axe des



y . C'est alors l'expression $\frac{x}{y-p}$, ou si l'on veut

$$\frac{x^2}{(y-p)^2} = \frac{f(y)}{(y-p)^2}, \text{ qui doit devenir un maximum ou minimum au cas où la ligne AP, qui joint le point fixe A au point mobile P de la courbe, est tangente en P à cette courbe. Par cette condition on trouve } p = y - \frac{2f(y)}{f'(y)}.$$

Évidemment on peut varier cette dernière méthode en fixant un autre point de la tangente, p. e. le point d'intersection A' avec l'axe des x . Dans ce dernier cas il s'agit de rendre un maximum ou un minimum la fraction $\frac{y}{z+x}$. Huygens applique cette méthode à des cas où $y^2 = f(x)$ ²⁾. On trouve alors, par la condition du maximum ou minimum de $\frac{y^2}{(z+x)^2}$, l'équation $z = -x + \frac{2f(x)}{f'(x)}$.

on doit, suivant la méthode de Descartes, commencer par déduire l'équation en x , ou en y , qui détermine les points d'intersection de la courbe avec le cercle qui a pour centre le point A et pour rayon la ligne AP. Ensuite on doit introduire la condition que cette équation possède deux racines égales qui correspondent au point P. Voir les p. 413—423 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes sous l'article: „Façon générale de trouver les lignes droites qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, à angles droits”.

¹⁾ Voir, pour les applications de cette première méthode, les pp. 504, 506 et 515.

Ces méthodes n'exigent que des calculs très simples dans les cas où Huygens les emploie; mais elles ne sont pas applicables lorsque la courbe est donnée par une équation algébrique quelconque $f_{\mu}(x, y) = 0$, irrésoluble par rapport à x et à y . Pour ce cas Huygens imagina deux autres méthodes ⁴⁾ dont toutefois il n'était nullement satisfait. En effet, le 25 septembre 1662, il manda à de Sluse ⁵⁾: „J'aurais déjà répondu plus tôt à votre avant-dernière ⁶⁾, n'était-ce que je me proposais d'examiner quelques choses concernant votre nouvelle invention, à quoi j'ai eu à peine le loisir, il y a seulement quelques jours. Car j'ai été surpris de ce que vous écrivez de la concision de la méthode trouvée par vous pour les tangentes des courbes; j'ai travaillé beaucoup pour découvrir en quoi elle pouvait consister, mais en vain. Il est vrai que j'ai trouvé sans difficulté la tangente, que vous proposez, de la courbe de Gutschoven, et cela de plusieurs manières ⁷⁾ et par un calcul très bref qui occupe à peine deux de ces lignes-ci. Et je suis tombé aussi sur votre construction ⁸⁾; mais pourtant il me semble, d'après vos paroles, que vous avez inventé une règle de plus grande portée, s'étendant à toutes les courbes dont la nature est exprimée par une

²⁾ Voir sur cette méthode la p. 505.

³⁾ Voir les pp. 507—508 et 514.

⁴⁾ Voir les p. 509—513 et consultez pour un ample exposé de ces méthodes les notes 5 de la p. 508, 11 de la p. 509 et 2 de la p. 511.

⁵⁾ Voir les p. 237—238 du T. IV, où l'on lit: „Jam enim ante ad penultimas tuas respondissem, nisi quædam circa novem inventum tuum prius expendenda mihi proposuissem, ad quæ vix demum paucis hisce diebus liberum otium concessum est. Miratus enim quod scribis de brevitate methodi ad tangentes curvarum abs te repertæ, qualis nam ea esset invenire allaboravi sed frustra. Nam illius quidem curvæ Gutschovianæ quam proponis tangentem nullo negotio investigavi varijs modis calculoque brevissimo, qui vix duos hujusmodi versiculos occupet. Atque in tuam constructionem quoque incidi; veruntamen quantum ex verbis tuis conjicio, majus etiamnum compendium reperisti, quodque ad omnes curvas spectet quarum proprietates æquatione expressa sit, nempe ad has quoque quarum implicita quodammodo est æquatio, ut $x^3 + y^3 - xyn \propto 0$ quæ est curvæ illius quam tu in Schotenij commentarijs ad Cartesium forsan vidisti. . . Hujus tangentem in dato puncto ego quidem non nisi mediocriter prolixo calculo inveni (ex hac nempe æquatione, nam potest alioqui ad aliam multo compendiosorem res deduci) plurimumque mirabor methodum tuam, si absque ullo pene, ac tantum inspectis characteribus istis reperire eam doceat”.

⁶⁾ La lettre du 18 août 1662 dont il est question à la p. 442.

⁷⁾ Voir les pp. 504, 505 et 513.

⁸⁾ Celle décrite par de Sluse dans sa lettre du 18 août 1662 (p. 207 du T. IV); mais on ne la rencontre pas dans les manuscrits de Huygens, quoiqu'elle se laisse déduire aisément des résultats obtenus par lui.

équation; savoir aussi à celles dont l'équation est en quelque façon implicite, comme $x^3 + y^3 - xyn = 0$, ce qui est l'équation de la courbe que vous avez peut-être rencontrée dans les commentaires de van Schooten sur Descartes ¹⁾. . . Je n'ai trouvé la tangente à cette courbe que par un calcul médiocrement prolix ²⁾ (savoir en me servant de cette équation-là, car la chose peut être accomplie beaucoup plus commodément par une autre voie ³⁾) et j'admire beaucoup votre méthode si elle enseigne à trouver cette tangente presque sans aucun calcul et par la seule inspection des termes de l'équation".

En réponse, de Sluse écrivit, le 6 octobre ⁴⁾, que sa méthode avait, en effet,

¹⁾ Voir à ce propos la note 1 de la p. 238 du T. IV.

²⁾ Voir les p. 509—512.

³⁾ Voir les p. 506—508.

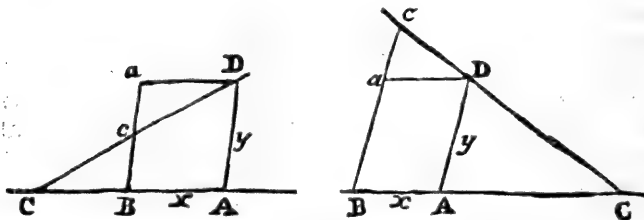
⁴⁾ Voir les p. 246—247 du T. IV.

⁵⁾ Dans une lettre du 10 décembre 1662, que nous ne connaissons que par la réponse de de Sluse (voir les p. 291—292 du T. IV), Huygens fit savoir à celui-ci que Hudde et lui-même avaient découvert une méthode semblable à la sienne.

⁶⁾ On retrouve cet algorithme, tel qu'il fut formulé par Hudde, dans l'„Extrait d'une Lettre de feu M. Hudde à M. van Schooten, professeur en Mathématiques à Leyde. Du 21. de Novembre 1659. Traduit du Hollandois". Cet „Extrait" fut publié p. 465—469 du „Journal littéraire de juillet & août, M.DCC.XIII. T. I. Seconde partie. A la Haye, Chez T. Johnson".

Puisque ce journal n'est pas aisément accessible, nous en empruntons la „Règle générale" qui suit: „Rangez tous les termes de l'équation qui exprime la nature de la Courbe, de manière qu'ils soient $\propto 0$, & *ôtez de cette équation toutes les fractions qui ont x ou y dans leurs diviseurs. Multipliez le terme dans lequel y a le plus de dimensions, par un nombre pris à discrétion, ou même par 0, & multipliez le terme dans lequel y a une dimension de moins, par le même nombre diminué d'une unité, & continuez de même à l'égard des autres termes

de l'équation. De même multipliez par un nombre pris à volonté ou par 0. le terme où x a le plus de dimensions: le terme où x a une dimension de moins, doit être multiplié par le même nombre moins l'unité, & ainsi des autres. Quand on divise le premier de ces produits par le second, le quo-



tient multiplié par $-x$ est $\propto AC$. Au contraire si on divise le second de ses produits par le premier, le quotient multiplié par $-y$ sera $\propto ac$.

À cette règle le correspondant inconnu du Journal ajoute la remarque: „*Cette préparation

la portée que Huygens lui supposait et il ajouta, comme preuve, la construction de la tangente à la courbe en question.

Or, quelques semaines après, probablement au commencement de décembre⁵⁾, Huygens apprit que Hudde était en possession d'une méthode semblable. Alors, ayant pris connaissance de l'algorithme employé par Hudde⁶⁾, Huygens ne tarda pas à en découvrir l'origine, qu'il exposa dans la lettre à de Witt de février 1663 dont nous avons déjà parlé⁷⁾. En effet, on trouvera au § 6 de la Pièce N°. VII (p. 516—517), ce que nous supposons être la première recherche instituée par Huygens sur le problème en question en partant de la méthode de Fermat. Elle lui fit connaître enfin la règle qu'il avait cherchée si ardemment. De plus, on rencontre sur les mêmes pages du manuscrit de petits calculs⁸⁾ qui se rapportent à l'algorithme plus général de Hudde, dont celui de Huygens constitue un cas particulier.

Ajoutons que Huygens communiqua sa méthode le 13 avril 1667 à l'Académie des Sciences dans un discours dont nous publierons le résumé dans un autre Tome, où nous réunirons tout ce qui concerne la participation de Huygens aux travaux de cette Académie.

Enfin, en 1693, cette méthode fut publiée dans les „Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique”⁹⁾. À cette occasion Huygens ne manqua pas de constater la priorité de de Sluse et de Hudde dans l'invention de la règle¹⁰⁾.

n'est pas nécessaire. Il faut que M. Hudde dans le temps qu'il a écrit cette Lettre, n'ait pas connu l'avantage de sa méthode à cet égard. On voit par ses Papiers qu'il l'a connu depuis”.

Voici d'ailleurs comment Huygens dix ans après s'exprime dans une lettre à Oldenburg, du 24 juin 1673 (p. 315 du T. VII), sur la part de Hudde et de lui-même dans l'invention de la méthode: „Quand est ce que nous verrons la démonstration de la méthode des Tangentes de Monsieur Sluse?” (comparez la note 6 de la p. 442) „C'est cette même que je vous ay mandé que Monsieur Hudde et moy avions aussi. C'est pourtant Monsieur Hudde qui m'en a montré la pratique, et j'en ay cherché depuis l'origine et démonstration à ma façon, laquelle en cas qu'elle soit différente de celle de Monsieur Sluze, je pourray donner aussi”.

⁷⁾ Voir la p. 442.

⁸⁾ Voir la note 4 de la p. 516.

⁹⁾ Voir l'article „Regula ad inveniendas Tangentes linearum curvarum”, p. 330—335 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 91 du T. IX.

¹⁰⁾ „Præcipuum verò operæ pretium tunc fuit compendiosa hujusce regulæ contractio, quam,

Notons encore que lors de la publication, en 1667, du troisième volume des „Lettres de Descartes” éditées par Clerfeliier ¹⁾, et de celle, en 1679, des „Varia Opera” de Fermat ²⁾, Huygens aperçut ³⁾ que la théorie de la détermination des tangentes des courbes algébriques avait été poussée plus loin par Fermat et Descartes ⁴⁾ qu’il ne l’avait su.

S’il avait pu prendre connaissance également de la „Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée” (en juin 1638) „par M. Fermat à M. Descartes” ⁵⁾, Huygens aurait vu que Fermat était en possession d’une méthode équivalente à la sienne pour trouver les tangentes d’une courbe algébrique quelconque $f(x, y) = 0$ ⁶⁾ et qu’il l’avait appliquée, comme Huygens l’avait fait lui-même, et avec un succès égal, au folium de Descartes.

Les autres travaux mathématiques de 1661—1666.

Nous avons encore à signaler quelques autres travaux de Huygens de moindre étendue que ceux nous venons d’analyser.

Il y a en premier lieu la Pièce N°. V de 1662 (p. 498—500) où Huygens déduit par voie géométrique d’une manière aussi simple qu’élégante, une

quoad potui, prosecutus, tandem in ipsas illas insignes Huddenii, Slusitque regulas desinere inveni, quas mihi Viri hi Clarissimi uterque fere eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum”.

¹⁾ „Lettres de Mr. Descartes. Où il répond à plusieurs difficultez qui luy ont esté proposées sur la Dioptrique, la Geometrie, & sur plusieurs autres sujets. Tome troisieme, et dernier. A Paris chez Charles Angot, rue S. Jacques, au Lion d’Or. M.DC.LXVII. Avec privilege du Roy”.

²⁾ Voir l’ouvrage cité dans la note 1 de la p. 326 du T. I.

³⁾ Voici comme il s’exprime à ce sujet dans le premier alinéa de l’article cité dans la note 9, p. 447: „Idem Fermatius linearum curvarum Tangentes regulâ sibi peculiari inquirebat, quam Cartesius suspicabatur non satis ipsum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epistolis ejus hac de re scriptis apparet. Sanè in Fermatii operibus post mortem editis, nec bene expositus est regulæ usus, nec demonstrationem ullam adjectam habet. Cartesium verò in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus assecutum inveno, nec tamen tam perspicuè eam explicuisse quàm per hæc quæ nunc trademus fiet, quæ jam olim, multò ante istas literas vulgatas conscripsimus”.

⁴⁾ En ce qui concerne Descartes, Huygens doit avoir eu en vue surtout la lettre à Hardy de 1638, p. 332—335 du T. III de Clerselier (p. 170—173 du T. II de l’édition d’Adam et Tannery des Œuvres de Descartes), où Descartes explique à sa manière la méthode

équation cubique dont dépend la construction de l'heptagone régulier. Ensuite on a de cette même année la Pièce N°. VI (p. 501—503) qui contient une quadrature et une cubature se rapportant à la courbe de Gutschoven et à un de ses solides de révolution.

Puis, la Pièce N°. VIII de 1664 (p. 518) nous fait connaître une méthode ingénieuse pour trouver le diamètre d'une surface sphérique appartenant à quelque objet, tandis que la Pièce N°. IX de l'année suivante (p. 519—520) nous montre que Huygens a eu un instant l'idée de discuter l'équation générale du troisième degré en coordonnées cartésiennes, comme Descartes l'avait fait pour celle du deuxième degré.

Enfin, il y a encore deux Pièces qui doivent dater de 1666. La première,

des tangentes de Fermat, qu'il avait fini par comprendre après y avoir fait des objections dans des lettres précédentes; voir encore les p. 328—331 de Clerselier (Adam et Tannery, T. II, p. 128—131) et sur les objections de Descartes les pp. 300—303, 305—311 et 336—337 de Clerselier (Adam et Tannery, T. I, p. 486—491, T. II, pp. 2—11 et 174—176).

Quant à la méthode des tangentes de Fermat, Huygens la trouvait exposée dans l'article „Methodus ad disquirendam maximam et minimam” suivi de „De tangentibus linearum curvarum” (p. 133—136 du T. I de l'édition des „Œuvres de Fermat” de 1891—1896, citée p. 3 du Tome présent), article dont une copie avait été envoyée à Descartes, et dans d'autres articles des „Varia opera” (pp. 144—147 et 159—165 du T. I de l'édition de 1691—1896) qui étaient inconnus à Descartes; mais la méthode n'y est appliquée à des courbes algébriques que dans des cas où l'on a $y^2 = f(x)$, $f(x)$ représentant une fonction rationnelle entière ou fractionnaire.

- 5) La Pièce fut publiée en 1879 par Charles Henry, d'après un manuscrit inédit, dans le „Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche” (T. XII, p. 658—663). Elle a été réimprimée dans le T. II, p. 154—162, de l'édition de 1891—1896 des „Œuvres de Fermat”.
- 6) Exprimée en notation moderne la méthode consiste dans la résolution, par rapport à la sous-tangente a , de l'équation:


$$f\left(x - e, \frac{a - e}{a} y\right) - f(x, y) = 0,$$

où l'on néglige les puissances de e au-dessus de la première.

Elle est basée chez Fermat sur la remarque que le point $\left(x - e, \frac{(a - e)y}{a}\right)$ de la tangente peut être quasi-considéré comme un point de la courbe.

Évidemment la méthode donne: $a = -\frac{y \frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$.

N°. VIII (p. 521—523) s'occupe d'un problème de l'analyse indéterminée du premier degré, problème qui trouve son application dans la science de la chronologie, lorsqu'il s'agit de déterminer l'année du Cycle Julien introduit par Joseph Justus Scaliger. Dans la deuxième (p. 524) Huygens vérifie une quadrature approchée du cercle, proposée par un certain Oudart.



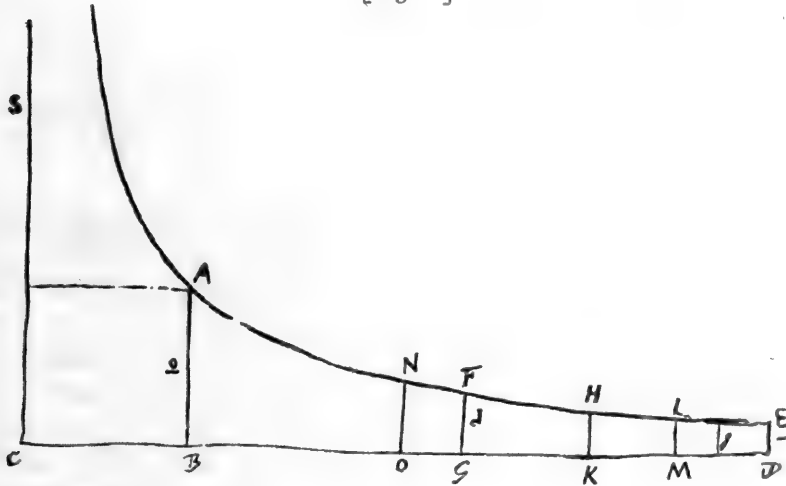
I¹⁾.

1661.

aug. 1661.

Fundamentum regule nostræ ad invenienas logarithmos ²⁾.

[Fig. 1.]



¹⁾ La Pièce est empruntée aux p. 17—19 du Manuscrit B.

²⁾ Voici, en notation moderne et sous sa forme la plus générale, la règle qu'on peut déduire des indications qui suivent: Posant $AB = a$, $FG = b$, $ED = d$, $a = \alpha^{2-\nu} d^{1-2-\nu}$, $b = \alpha^{2-\nu-1} d^{1-2-\nu-1}$, $f = \beta^{2-\nu} d^{1-2-\nu}$, $g = \beta^{2-\nu-1} d^{1-2-\nu-1}$, on a approximativement, pour des valeurs de ν suffisamment grandes:

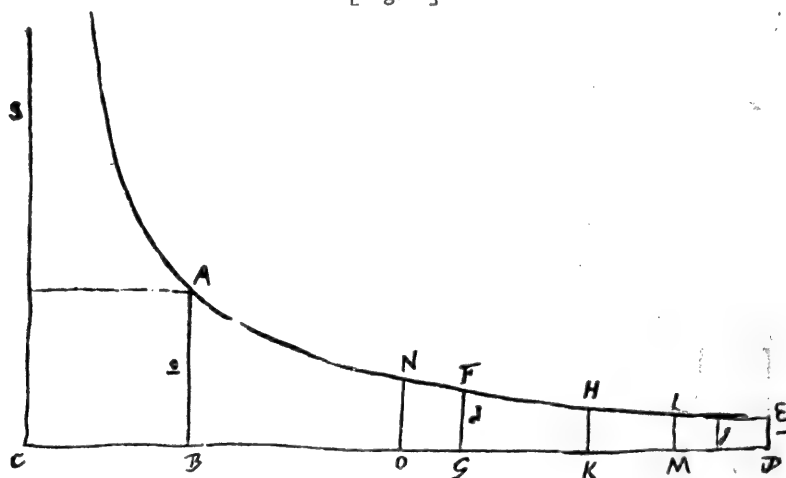
$$(1) \quad \frac{\log b - \log d}{\log a - \log d} = \frac{\frac{100fd}{81f + 81d + 108g} + \frac{20}{27}g - \frac{1}{18}f - \frac{1}{18}d}{\frac{100ad}{81a + 81d + 108b} + \frac{20}{27}b - \frac{1}{18}a - \frac{1}{18}d} \times \frac{a-d}{a-f}.$$

Prenant $a = 10$, $d = 1$, $\nu = 5$, on trouve donc pour le calcul des logarithmes de Briggs la formule:

$$(2) \quad \log \beta = \frac{\frac{100f}{81f + 108g + 81} + \frac{20}{27}g - \frac{1}{18}f - \frac{1}{18}}{\frac{100a}{81a + 108b + 81} + \frac{20}{27}b - \frac{1}{18}a - \frac{1}{18}} \times \frac{a-a}{a-1}.$$

où $a = \sqrt[32]{10}$, $b = \sqrt[64]{10}$, $f = \sqrt[32]{\beta}$, $g = \sqrt[64]{\beta}$.

[Fig. 1.]



Vide librum C
ante medium ubi
de his agitur ¹⁾.

Sit AFE hyperbole cujus asymptoti SC, CD rectum angulum comprehen-
dentes. sitque AB æquidistans SC partium 10, qualium ED 1, et FG 2, siquidem
volo invenire logarithmum numeri 2. Quoties igitur spatium ABDE continet
spatium FGDE, toties ratio AB ad ED continet rationem FG ad ED ²⁾, per
inventam Gregij a S. Vincentio ³⁾. hoc est toties excessus logarithmi numeri AB
supra logarithmum numeri ED continet excessum logarithmi numeri FG supra
logarithmum numeri ED. notus autem est logarithmus numeri AB quem ponimus
esse 10000000000 et logarithm. numeri ED sive 1, qui est 0. Ergo excessus loga-
rithmi utriusque notus est nempe 10000 &c. idem videlicet qui logar. numeri AB.

Si ergo noscatur quam rationem habeat spatium ABDE ad spatium FGDE,
notus erit excessus logarithmi num. FG supra logar. numeri ED, adeoque loga-
rithmus ipse numeri FG.

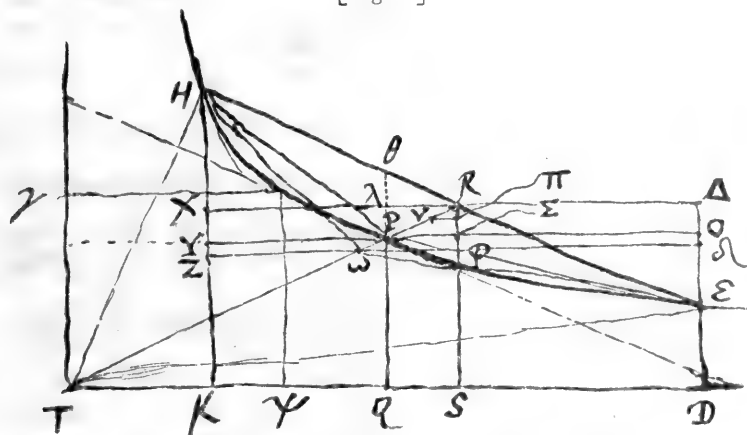
¹⁾ Il s'agit des p. 110 – 111 du Manuscrit C, qui contiennent le résumé d'une communication présentée par Huygens à l'Académie des Sciences en novembre 1666. Nous reproduirons ce résumé dans un autre Tome de notre publication, qui contiendra les discours tenus par Huygens dans cette Académie. On y rencontrera un exposé de la „methode pour trouver les logarithmes”, à peu près dans la même forme que dans la présente Pièce mais sans aucune indication sur la manière dont la règle en question a été déduite. Joseph Bertrand a publié en 1868, p. 566–567 du T. 66 des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, un résumé moins complet de la même communication. Ce dernier résumé fut emprunté aux Procès-verbaux conservés au Secrétariat de l'Académie.

²⁾ En notation moderne: $\frac{AB}{ED} = \left(\frac{FG}{ED} \right)^{\frac{\text{aire ABDE}}{\text{aire FGDE}}}$.

³⁾ Voir la „Prop. CXXIX”, p. 596 de l'„Opus geometricum”, ouvrage cité dans la note 6, p. 53 du T. I. Voici cette proposition, où nous avons remplacé les notations par celles de la Fig. 1: „Sint SC, CD asymptoti hyperbolæ AFE, & AB, FG, ED parallelæ asymptoto:

Ad inquirendam rationem dictorum spatiorum divido utrumque bifariam primo, quod sit inveniendū mediam proportionalem inter lineas extremas, veluti inter AB, ED constituta media NO, ea bifariam dividet spatium ABDE. Rursus medietates quæ versus ED eadem ratione biseco, et harum medietates denuo atque id aliquoties continuo, prout accurate logarithmum invenire lubet. Ponamus exempli gratia HKDE spatium per 5^{am} bisectionem inventum esse, ideoque 32^{nam} partem spatij ABDE, ac similiter spatium LD ex 5^{ta} bisectione spatij ED ortum esse, ac proinde 32^{nam} partem dicti spatij FD. Si igitur nota sit ratio spatij HD ad spatium LD, ea erit ipsa ratio spatij ABDE ad FGDE.

[Fig. 2.]



□XD æqu. trapezio HKDE. et necessario □XO ∝ triangulo HPE. nam quia Pθ dupla Pλ⁵⁾ erit Δ^mPHθ æqu. □PX et Δ^mPEθ æqu. □PΔ. Auferenda autem est portio hyperbolæ HPE à trapezio HKDE sive à □XD ut habeatur spatium HKDEP. quæ portio per nostra theoremata de quadr. hyperbolæ⁶⁾ sic

plano autem ABGF, incommensurable sit planum FGDE” [le cas de la commensurabilité est traité par Grégoire dans la Prop. CXXV, p. 594 de son livre]. „Dico rationem AB ad FG, toties multiplicare rationem FG, ad ED, quoties quantitas ABGF continet quantitatem FGDE.”

On a donc, d'après cette proposition, $\frac{AB}{FG} = \left(\frac{FG}{ED}\right)^{\frac{ABGF}{FGDE}}$, où la multiplication des deux membres par $\frac{FG}{ED}$ amène la relation indiquée dans la note précédente.

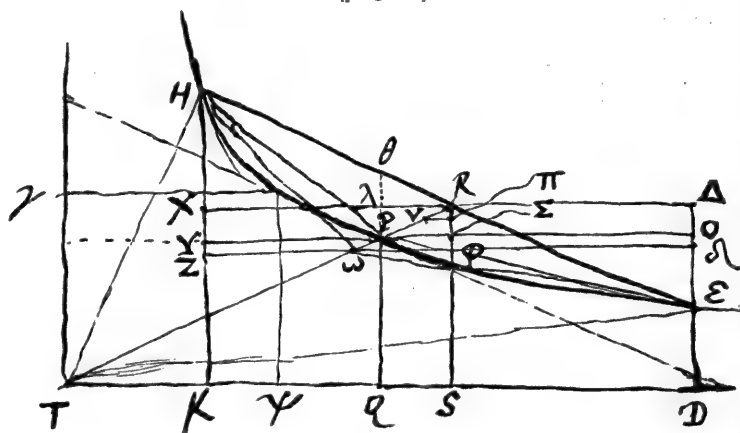
Comparez encore le dernier alinéa de la p. 457.

⁴⁾ Comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 457.

⁵⁾ À cause de l'égalité, au cas de l'hyperbole équilatère, des angles HRX et TRX. Comparez le début de l'avant-dernier alinéa de la p. 457.

⁶⁾ Voir (p. 305 du T. XI) le „Theorema VI” des „Theoremata de quadratura hyperbolæ, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro”. D'après ce théorème on a la pro-

[Fig. 2.]



proximè invenitur.

Sit $RV \propto \frac{2}{5}RP$ ¹⁾,jam V erit proximè
centr. gr. portionis
HPE. Unde sicutVT ad $\frac{2}{3}$ totiusRTP ²⁾ ita $\triangle^m HPE$ ad por-
tionem HPE. hoc
est, si ut VT ad $\frac{2}{3}RTP$ ita fiat PR

ad Rω erit $\triangle^m H\omega E$ æquale proxime portioni HPE. vel ducta VII parall. $X\Delta$,
si ut IIS ad $\frac{2}{3}R\S\S$ ita fiat $R\S$ ad Rφ ducaturque $Z\phi\delta$, erit $\square X\delta \propto$ portioni

HPE ³⁾, ideoque $\square ZD \propto$ spatio HKDE quæsito. datis autem HK, ED et inter
ipfas mediâ PQ, data erit φS ducenda in KD ut habeatur $\square ZD$. Veluti si HK
vocetur a, ED voc. d, PQ voc. b $\propto \sqrt{ad}$, fit $RS \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$, $\Sigma R [\infty] \frac{1}{2}a +$

$+\frac{1}{2}d - b$. cujus $\frac{3}{5} [\infty] \Sigma\P [\infty] \frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d - \frac{3}{5}b$.

$\Pi\S$ ⁴⁾ $\left(\frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d + \frac{2}{5}b\right) [\text{ad}] \frac{2}{3}R\S\S \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}b\right) [\text{ut}] R\S \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - b\right) [\text{ad}]$

$R\phi \left(\frac{\frac{1}{6}aa - \frac{1}{3}bb + \frac{1}{6}dd}{\frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d + \frac{2}{5}b}\right)$. hic consideravi bb esse $\propto ad$.

ex RS $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$

Sφ $\frac{\frac{19}{3}bb - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{6}dd + 2ab + 2db}{3a + 3d + 4b}$

portion, segm. hyp. HPE: $\triangle HPE = \frac{2}{3}(2TP + PR):TV$, où V représente le centre de
gravité du segment hyperbolique.

hoc est $\frac{100ad}{81a+81d+108b} + \frac{20}{27}b - \frac{1}{18}a - \frac{1}{18}d [\infty]$ $S\varphi$. ducenda in KD.

Similiter data LM [Fig. 1] $\propto f$ et ED $\propto d$, interque ipsas media prop.ⁱ $\propto g \propto \sqrt{fd}$. invenietur altitudo ducenda in MD, daturaque sic rectangulum æquale proximè spatio LD; ea inquam altitudo invenietur $\frac{100fd}{81f+81d+108d} + \frac{20}{27}g - \frac{1}{18}f - \frac{1}{18}d$; mutatis nempe tantum a in f et b in g , in terminis qui inventi sunt pro quantitate $S\varphi$ [Fig. 2].

Vocetur altitudo $S\varphi$, p . Et altera quam dixi ducendam in MD [Fig. 1] vocetur n . Quadratum vero hyperbolæ $\gamma\psi$ [Fig. 2] sit qq . fit igitur KD $\propto \frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$. Et MD [Fig. 1] $\propto \frac{qq}{d} - \frac{qq}{f}$. Itaque ratio spatij HD ad spatium LD erit ea quæ p in $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$ ad n in $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{f}$. Sed ratio $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$ ad $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{f}$ est eadem quæ $\frac{a-d}{a}$ ad $\frac{f-d}{f}$ sive $a-d$ ad $a - \frac{ad}{f}$. Ergo ratio spatij HD ad spatium LD erit ea quæ p in $a-d$ ad n in $a - \frac{ad}{f}$.

Ad inveniendos logarithmos numerorum primorum ab unitate ad centenarium, d sit unitas, AB 10. Itaque p in $a-d$, hoc est, numerus exprimens spatium HD (quod pars nota est spatij ABDE) semel tantum inveniendus est ad logarithmos omnium numerorum primorum infra centenarium reperiendos; imo ad omnes omnino. Sicut p in $a-d$ ad n in $a - \frac{ad}{f}$ ita erit logarithmus denarij (quia idem quoque est excessus logarithmi denarij supra logar.^m unitatis) ad logar.^m numeri propositi quia hic quoque excessus est logarithmi numeri propositi supra logarithmum unitatis qui est 0.

Radix quæ quinto extrahitur ex 10 est 10746078283213⁵), hæc est a .

¹) Formule exacte, dans le cas d'un segment parabolique, pour déterminer la situation du centre de gravité V.

²) RTP représente $RT + TP = 2TP + PR$.

³) On a trouvé Port, $HPE = \triangle H\omega E$; mais $\triangle H\omega E = \frac{\omega R}{TR} \triangle HTE = \frac{R\varphi}{RS} \triangle HTE$. Or, $\triangle HTE = \text{trap. HKDE}$ (à cause de l'égalité des triangles HTK et ETD) = $\square XD$. Par suite $\triangle H\omega E = \frac{R\varphi}{RS} \square XD = \square X\delta$.

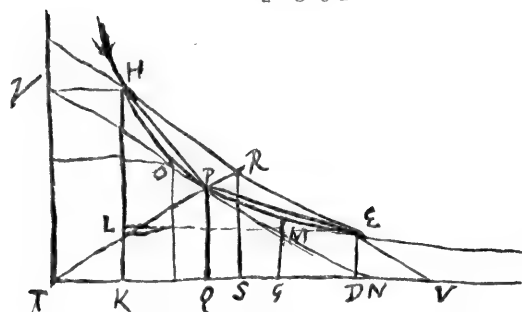
⁴) Lisez : IIS.

⁵) On retrouve cette donnée et la suivante (avec 15 chiffres de plus) à la p. 10 de la première édition (de 1624) de l'„Arithmetica Logarithmica” de Briggs; ouvrage cité dans la note 4 de la p. 477 du T. I.

Radix quæ sexto extrahitur ex 10 est 10366329284377, hæc est b .
unitas 10000000000000, est d ¹⁾.

Hinc invenitur S_p five p , in $a-d \propto 77324248946607$, qui est numerus,
semel tantum inveniendus ut diximus ²⁾.

[Fig. 3.]



HPE hyperbole. asymptoti
 γT , TD . HK , PQ , ED paral-
lelæ asymptoto $T\gamma$. PQ media
prop. inter HK , ED . Ost. trape-
zium $HPQK$ æquale trape-
zio $PEDQ$.

qu. hyp. $TO \propto aa$; $TK \propto b$; $TD \propto$
 $\propto c$; $\frac{aa}{b} HK$; $\frac{aa}{c} DE$; $\sqrt{\frac{a^4}{bc}} PQ$

five $\frac{aa}{\sqrt{bc}}$; $TQ \propto \sqrt{bc}$; $\sqrt{bc} - b KQ$; $c - \sqrt{bc} QD$.

$$\frac{\frac{aa}{b} + \frac{aa}{\sqrt{bc}} HK + PQ}{\sqrt{bc} - b KQ} \left\{ m[ult]. \right.$$

$$\frac{aa \sqrt{bc}}{b} + aa - aa - \frac{aab}{\sqrt{bc}}$$

$$\frac{\frac{aa}{c} + \frac{aa}{\sqrt{bc}} PQ + ED}{c - \sqrt{bc} QD} \left\{ m[ult]. \right.$$

$$aa + \frac{caa}{\sqrt{bc}} - \frac{aa \sqrt{bc}}{c} - aa$$

¹⁾ Remarquons que par l'introduction de cette nouvelle unité $d = 10^{13}$, la formule (2) de la note 2 de la p. 451 est remplacée par la suivante:

$$(3) \quad \log \beta = \frac{\frac{100fd}{81f + 108g + 81d} + \frac{20}{27}g - \frac{1}{18}f - \frac{1}{18}d}{\frac{100ad}{81a + 108b + 81d} + \frac{20}{27}b - \frac{1}{18}a - \frac{1}{18}d} \times \frac{a - \frac{ad}{f}}{a - d},$$

où maintenant $a = d \sqrt[32]{10}$, $b = d \sqrt[64]{10}$, $f = d \sqrt[32]{\beta}$, $g = d \sqrt[64]{\beta}$, tandis que d peut être choisi égal à une puissance quelconque de 10.

Ajoutons que les p. 11—16 du Manuscrit B contiennent des calculs qui se rapportent à l'application de la règle à la détermination du „logar. numeri 2”. Après avoir trouvé à la p. 11 les mantisses 301029994, Huygens reprend une partie des calculs, et trouve 30102999567; résultat „ou il y a 10 caracteres vrais et l'unzieme qui surpasse le vray de l'unité”, comme il s'exprime dans sa communication à l'Académie des Sciences.

Quant aux valeurs de f et g , employées dans ces calculs, on les trouve à la p. 458 qui suit. Huygens les a calculées à l'aide de tables de logarithmes à 14 mantisses de 1, „Arithmetica

$aabcc - aabbc \propto aabcc - aabbc$ bon. Demonstratio adscripta est hac eadem pagina ³⁾).

HK ad PQ ut PQ ad ED. HK + PQ ad PQ ut PQ + ED ad ED et HK + PQ ad PQ + ED ut PQ ad ED sed ut PQ ad ED ita DQ ad QK (quia ut PQ ad ED ita DT:QT:KT ⁴⁾). Ergo HK + PQ ad PQ + ED ut DQ ad QK. unde quod fit ab HK + PQ in KQ æquale quod fit ab PQ + ED in DQ. Ideoque et utriusque dimidia æqu.^a. nempe trapez. HKRS trapez. RSDE ⁵⁾).

$$\text{Oft. } TQ (\sqrt{bc}) [ad] QP \left(\frac{aa}{\sqrt{bc}} \right) [ut] EL (c-b) [ad] LH \left(\frac{aa}{b} - \frac{aa}{c} \right)$$

$$aac - aab \propto aac - aab \text{ bon}$$

cum ergo anguli RTS, REL five RVS sint æquales, fiet RV æqu. RT, duc-
taque γ PN parall. RV, etiam PN æq. PT five etiam ipsi γ cum $\triangle \gamma$ PT isosc.
Ergo γ PN tangit hyperb. in P. Ergo P vertex portionis HPE, ideoque TPR ex
centro hyperb. T educta secat basin portionis HE bifariam in R. ipsamque portio-
nem in duo æqualia, e quibus auferendo \triangle^a æqualia HPR, EPR etiam segmenta
reliqua æqualia erunt HP, PE. quibus ablatis a trapezijs æqualibus HPQK,
PQDE relinquentur spatia mixtilinea HOPQK, PMEDQ inter se æqualia ⁶⁾).

Hinc jam facile ostenditur ⁷⁾ Rationem HK ad ED toties multiplicem esse
rationis MG ad ED, (sumpta MG ad libitum inter HK, ED,) quoties spatium
HKDEP mixtilineum, multiplex est spatij MGDE. Ut si MG sit media prop.
inter PQ, ED, fit ratio HK ad ED quadrupla rationis MG ad ED, sicut et
spatium HKDEP quadruplum spatij MGDE.

Logarithmica" en divisant log 2 respectivement par 32 et 64 et en cherchant les nombres
correspondant à ces logarithmes. Cela était évidemment permis puisqu'il ne s'agit que d'une
vérification de l'exactitude de la règle en question.

²⁾ Ainsi se termine la description de la règle. Ce qui suit se rapporte aux propriétés de la Fig. 3
et à la proposition de Grégoire de St. Vincent, citée dans la note 3 de la p. 452.

³⁾ Voir la démonstration qui suit.

⁴⁾ Huygens veut dire qu'on a $PQ : ED = DT : QT = QT : KT$.

⁵⁾ Lisez : „trapez. HPQK trapez. PQDE”.

⁶⁾ Ce résultat est identique avec la „Prop. CVIII”, p. 585 de l'ouvrage de Grégoire, mais la
démonstration est différente.

⁷⁾ Comparez la démonstration de Grégoire de la Prop. CXXV, mentionnée dans la note 3 de
la p. 452.

APPENDICE ¹⁾ À LA PIÈCE N^o I.

[1668?]

Regula ad inveniendos Logarithmos.

Habeantur primum radices continuè à denario extractæ, usque ad sextam vel septimam, atque eæ characterum 14. Et radix ultimo extracta vocetur *b*; quæ vero penultimò, sive illam præcedens vocetur *a*. Unitas vero dicatur *d*. Omniaque in 10¹³ ducta intelligantur ut radicum fractio evanescat.

Radix quinta ex 10 est 10746078283213, *a*.

Radix sexta ex 10 est 10366329284377²⁾, *b*.

Unitas ——— 10000000000000, *d*.

Jam inveniatur numerus æqualis istis simul $\frac{200.da}{3d+3a+4b} + 40.b - 3a - 3d$; qui numerus vocetur *p*, est autem 559661035184532, idemque ducatur in *a*—*d*, ac productus inde vocetur *v*. Qui numerus ad omnes logarithmos inveniendos adhibebitur, estque 4175509443116778, &c, sed hos priores characteres adhibere sufficit.

Si igitur ex. gr. inveniendus sit logarithmus binarij; habeantur et hujus radices quinto sextoque extractæ sicut de denario diximus, et

Radix quinta ex 2, 10218971486541 vocetur *f*

Radix sexta ex 2, 10108892860517³⁾ vocetur *g*

Unitas 10000000000000 *d*

Similiter quoque inveniatur numerus æqualis istis simul $\frac{200.df}{3d+3f+4g} + 40.g -$

¹⁾ L'Appendice est emprunté aux p. 21—22 du Manuscrit N^o. 13 dont il est question dans le dernier alinéa de la note 5 de la p. 235.

²⁾ Consultez sur ces données la note 5 de la p. 455.

³⁾ Consultez le dernier alinéa de la note 1 de la p. 456.

$-3f-3d$, qui numerus vocetur n . (In hoc exemplo est 545869542830178.)

Hic numerus n ducatur in $a - \frac{ad}{f}$ productusque inde vocetur s , qui hic est 12569535892606 &c. Jamque erit sicut numerus v ad s , ita logarithmus denarij ad logarithmum propositi numeri ⁴⁾, nempe hic, 0,30102999567. Pro characteristica præponendum scimus 0, quia datus num. minor est denario.

Si dati numeri, qui denario major sit, invenire logarithmum libeat, extrahatur toties continuè radix ejus, donec ultimo extracta minor sit radice sexta ex 10 nempe 10366 &c. voceturque ultimo extracta g , penultima f , sicut prius; omnia deinceps eodem modo peragantur, et invenietur hac ratione logarithmus radice quæ septima ab ultimâ numeratur, sive quæ sex locis ultimam præcedit; idque æque accurate atque modo logarithmum binarij invenimus, nempe ad 10 characteres veros. Inventum deinde logarithmum duplicando existet logarithmus radice octavæ ab ultima; et rursus duplicando, nonæ; atque ita porro, donec existit ipsius numeri propositi logarithmus, duplicatio continuabitur.

In vulgari logarithmorum inventione, necesse erat ex 32 characteribus cum totidem zero adjunctis, quadragies circiter radicem extrahere ⁵⁾, ut fieret logarithmus 10 verarum notarum. sed et aliâ multa præterea peragenda erant summæ prolixitatis.

Demonstratio horum in libro B ⁶⁾.

⁴⁾ On a donc d'après cette règle :

$$(4) \quad \log \beta = \frac{\left(\frac{200df}{3d+3f+4g} + 40g - 3f - 3d \right) \left(a - \frac{ad}{f} \right)}{\left(\frac{200da}{3d+3a+4b} + 40b - 3a - 3d \right) (a-d)},$$

formule dont il est facile de constater l'identité avec celle de la note 1 de la p. 456.

⁵⁾ Voir, à la p. 10 de l'„Arithmetica Logarithmica” de 1624, la table des racines $\sqrt[n]{10}$, jusqu'à $n = 54$, dont Briggs s'est servi pour le calcul de ses logarithmes. Dans la racine qui correspond à $n = 40$ l'unité est suivie de onze zéros.

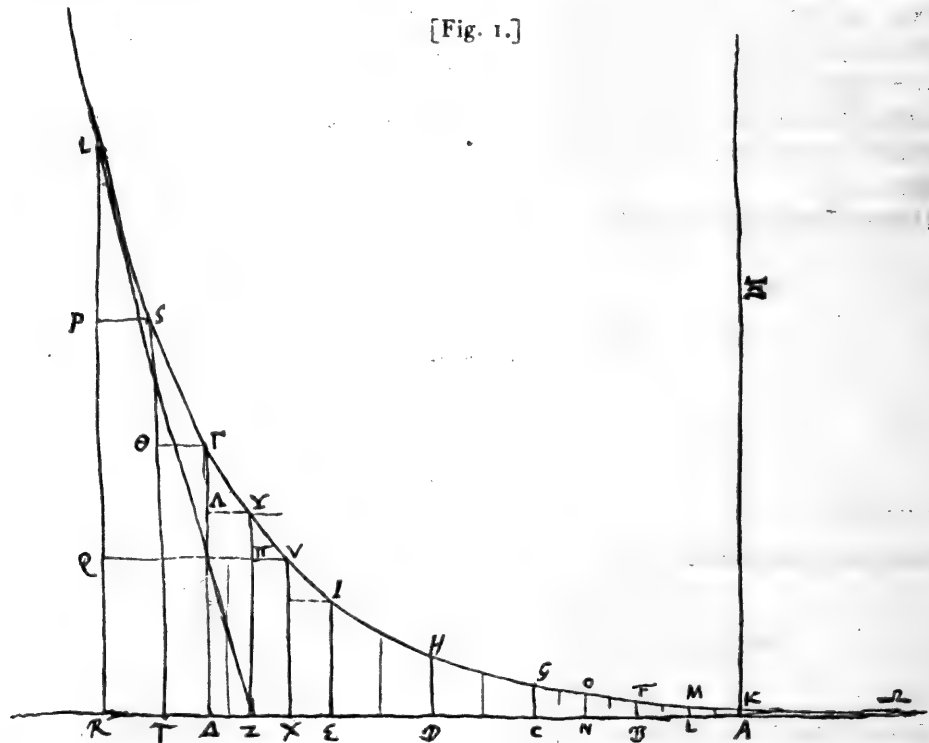
⁶⁾ Voir la Pièce N^o. I, p. 451—457, qui est précédée dans le Manuscrit B par des calculs préparatoires qui avec des modifications légères auraient pu amener la formule pour $\log \beta$ sous la forme (4) de la note 4; toutefois on ne la rencontre pas dans ce Manuscrit sous cette forme.

II.¹⁾

1661.

10 Sept. 1661.

[Fig. 1.]



¹⁾ La Pièce est empruntée aux p. 175—183 du Manuscrit B. Avec l'Appendice qui l'accompagne, elle a été publiée par Uyenbroek dans ses „Christiani Hugonii aliorumque seculi XVII virorum celeberrimorum exercitationes mathematicae et philosophicae”, ouvrage cité dans la note 2, p. 500 du T. VII. Elle y occupe les p. 172—183 du „Fasciculus II.”

La Pièce traite des propriétés de la courbe appelée plus tard par Huygens „Logarith-

In recta AE sunt partes æquales sumtæ AB, BC, CD &c. et erectæ perpendiculares AK, BF, CG, DH, EI &c. quarum unaquæque est præcedentis dupla. transit autem curva KGIL per extrema dictarum perpendicularium, quæ eadem per extrema etiam transit perpendicularium LM, NO &c. quæ e punctis bisectionum partium AB, BC &c. erectæ sunt, ac mediæ proportionales inter binas utrimque proximas. crescunt autem et hæ secundum duplam proportionem. ac rursus per extrema aliarum perpendicularium quæ bisequant partes ultimo effectas in recta AE, suntque item proximarum suarum mediæ proportionales et in dupla proportionem crescentes; atque ita in infinitum per omnes enim ejusmodi perpendicularium extremitates linea curva versus AE convexa transit ²⁾. Et patet quotlibet puncta per quæ describenda sit in linea facile invenire. Habet autem proprietates insignes. Primo ad inveniendas quotcunque medias proportionales inter duas datas. Sint ex. gr. PR, QR. Statuantur ad curvam perpendiculares ijs æquales ST, VX, et intervallum TX quo inter se distant dividatur in partes æquales unâ plures quam quot medias quærimus. Veluti si duas, oportet dividi in tres partes, ut hic punctis ΔZ, e quibuseductæ ad lineam perpendiculares ΔΓ, ZY erunt mediæ duæ quæsitæ inter ST, VX sive LR ³⁾, QR. Quod facile demonstratur quia inter XV, TS cadit series infinita proportionalium ex natura lineæ, earumque totidem inter XV, ZY quot inter ZY, ΔΓ, ac inter ΔΓ, TS; totidem inquam, quia partes XZ, ZΔ, ΔT sunt æquales, innumeræque illæ proportionales æqualibus intervallis a se mutuo distant.

TA, XA considerandæ sunt ut logarithmi linearum TS, XV ⁴⁾, et intervallum TX ut differentia logarithmorum. Ubicumque binæ perpendiculares intervallo eodem distitæ erunt, habebunt eandem inter se rationem. Sic sicubi duæ distiterint intervallo æquali AB earum major minoris dupla erit, quia nempe BF est dupla AK.

mique" ou „Logistique"; voir la p. 169 de l'édition originale de 1690 du „Discours de la pesanteur", qui accompagne le „Traité de la lumière". Les résultats obtenus furent publiés sans démonstrations aux p. 176—178 du même „Discours".

²⁾ Prenant AR pour l'axe des x et AΞ pour celle des y , on a donc pour l'équation de la courbe

$$y = AK \times 2^{\frac{x}{AB}}, \text{ ou, si l'on veut, } y = ka^x, \text{ où } k = AK, a = \sqrt[AB]{2}.$$

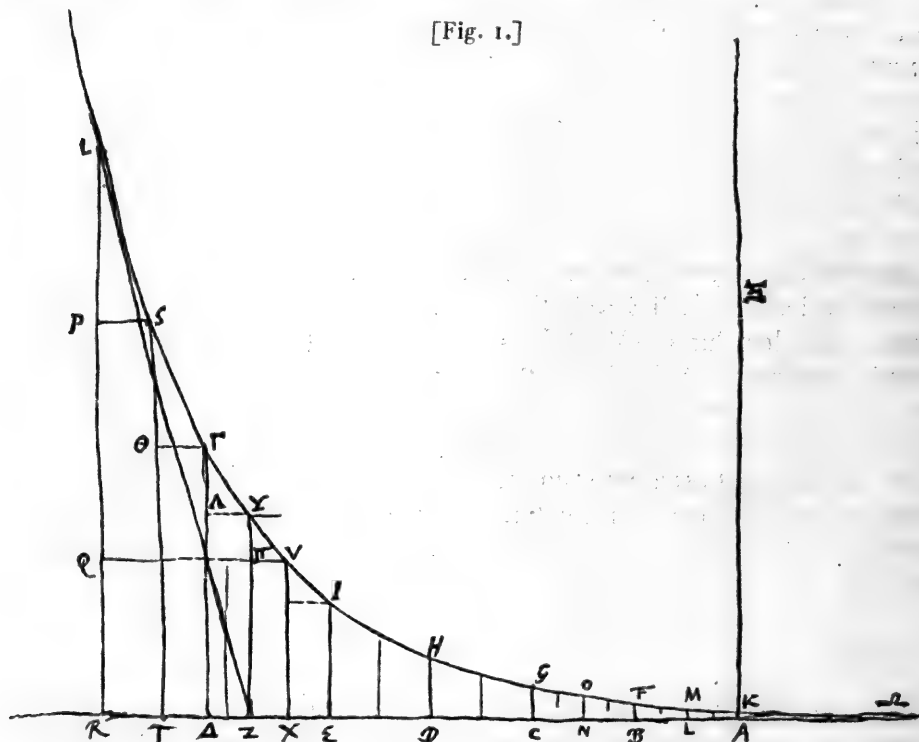
³⁾ Lisez: PR.

⁴⁾ Posant $AK = 1$, et prenant pour base du système des logarithmes le nombre $b = 2^{\frac{AK}{AB}}$, on a, en effet, $\log TS = AT$; mais la conception de Huygens est un peu différente. D'après les calculs qui suivent il considère les abscisses AT non pas comme égales mais seulement comme proportionnelles aux logarithmes des ordonnées TS. Soit donc $\log TS = m \cdot AT$. Or, puisque l'addition de AB aux abscisses double les ordonnées on aura nécessairement $\log 2 = m \cdot AB$ et, par suite, $AT = \frac{\log TS}{\log 2} \cdot AB$, ou bien, si l'on suppose AB égal à $10^n \log 2$, $AT = 10^n \log TS$.

Recta RA est curvæ asymptotos.

Spatia duo quævis a binis perpendicularibus intercepta quæ æqualibus intervallis distant ut sunt spatia $T\Gamma\Delta$, $YZXV$, eam inter se rationem habent quam major unius perpendicularis ad majorem perpendicularem alterius vel quam minor ad minorem facillime demonstratur.

Spatium quodvis a binis perpendicularibus interceptum est ad spatium deinceps decrescens in infinitum ut differentia perpendicularium ad perpendicularem minorem. Sic spatium $ST\Delta\Gamma$ est ad spatium infinitum $\Gamma HK\Omega\Delta$ ut $S\Theta$ ad $\Gamma\Delta$. Si enim

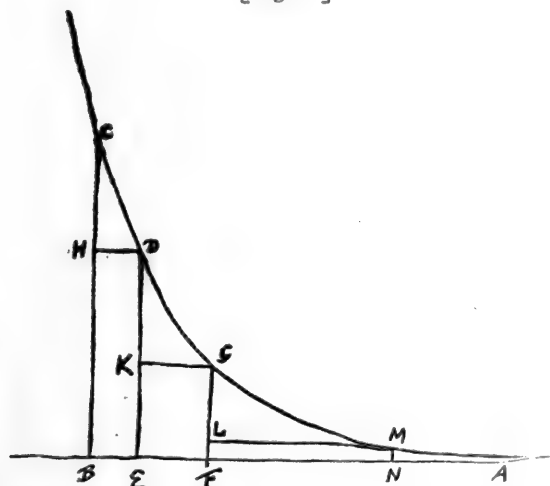


æqualibus intervallis ipsi $T\Delta$ constituentur perpendiculares YZ , VX , IE &c. in infinitum. Quia spatium $ST\Delta\Gamma$ ad spatium ΓZ ut ST ad $\Gamma\Delta$ per præced.^m hoc est ut $S\Theta$ ad $\Gamma\Delta$ quia tres ST , $\Gamma\Delta$, YZ sunt prop.^{es}; Et rursus spatium ΓZ ad YX sicut $\Gamma\Delta$ ad $Y\Pi$, Ideoque spatium $S\Delta$ ad YX sicut $S\Theta$ ad $Y\Pi$; atque ita porro, Erit proinde spatium $S\Delta$ ad omnia spatia ΓZ , YX , &c. in infinitum ut $S\Theta$ ad omnes $\Gamma\Delta$, $Y\Pi$ &c. quæ simul efficiunt ipsam $\Gamma\Delta$. Ergo &c.

Spatia quævis duo a duabus perpendicularibus intercepta ut CE [Fig. 2], GN sunt inter se sicut perpendicularium differentia, hoc est hic ut CH ad GL , ducatur enim et GK parall. AB .

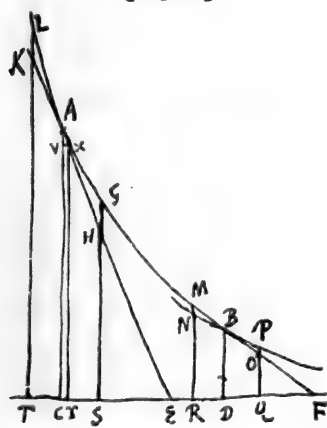
Quia ergo per præced. spatium CE est ad spatium infinitum DEA ut CH

[Fig. 2.]



afymptoti inter perpendicularem et tangentem intercepta, eidem semper lineæ rectæ æqualis.

[Fig. 3.]



GS major quam HS. ergo et PQ major quam OQ. Unde apparet punctum O esse a parte convexa curvæ AB. Eodem modo autem et punctum N sumtum ab altera parte puncti B ostendetur cadere ad partem convexam curvæ AB. Ergo tangit eam recta NBOF in puncto B. quod erat dem.

Longitudo lineæ CE vel DF cujus ope tangens in quovis puncto duci posset,

ad HB. Spatiumque similiter DF ad spatium infinitum GFA ut DK ad KE, Et invertendo et componendo spatium infinitum GFA una cum spatio DF, hoc est spatium infinitum DEA ad spatium DF ut DE live HB ad DK, Erit ex æquo spatium CE ad spatium DF ut CH ad DK. Eodem modo autem ostenditur spatium DF ad spat. GN ut DK ad GL. Ergo ex æquo erit spatium CE ad spatium GN ut CH ad GL. quod erat ost.

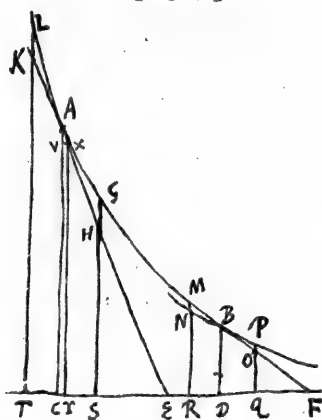
Si curvam linea recta contingat et a puncto contactus in afymptoton perpendicularis ducatur; erit pars

Sint hic [Fig. 3] tangentes AE, BF, et a punctis A, B perpendiculares in afymptoton, AC, BD. dico partes CE, DF esse æquales. Vel potius sic; sit AE tangens, sitque ipsi CE æqualis DF; dico et FB tangentem esse in B.

Sumatur enim in recta BF quodlibet punctum præter B, ut O, per quod ducatur perpendicularis POQ, et, sumta ipsi DQ æquali CS in eandem partem, erigatur perpendicularis SHG, secans tangentem AE in H, curvam vero in G. Erit itaque GS major quam HS ¹⁾. Est autem ut AC ad HS hoc est ut CE ad SE, five ut DF ad QF, ita BD ad OQ. Et invertendo est HS ad AC ita OQ ad BD. Sed ut AC ad GS ita est BD ad PQ, propter intervalla æqualia CS, DQ. Ergo ex æquo erit ut HS ad GS ita OQ ad PQ. Erat autem

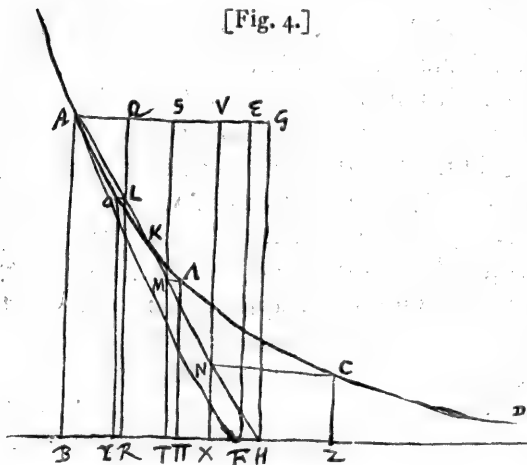
¹⁾ Puisque la courbe est partout convexe du côté où se trouve l'axe TF; voir la p. 461.

[Fig. 3.]



non potest ratione ulla geometrica, ut puto, inveniri ¹⁾ sed ex logarithmis quamlibet proximè. Nam si consideremus triangulum minimum AVX, cujus latus AX tam curvæ AB quam tangentis AE portio censendum est, et perpendiculares AC, XY duos numeros esse putemus minimo quodam excessu sese superantes ut 100000 et 99999. Erit VX vel CY, logarithmorum ipsorum differentia ²⁾ quæ inter istos est 43430, ut patet ex tabulis. Jam si igitur fiat ut AV quæ est 1 ad VX 43430 ita AC 100000 ad CE, fiet hæc 4343000000, qualium nempe differentia inter logarithmos numerorum 100000 et 99999 est 43430, qualiumque logarithmus binarij est 3010299957. linea autem quæ referat logarithmum binarij facile invenitur, applicando tantum duas perpendiculares inter curvam et asymptoton quarum altera sit alterius dupla velut GS, MR, nam SR intervallum referet logarithmum binarij. Ergo si fiat ut 30102 ad 43430 hoc est proxime ut 3 ad $4\frac{1}{3}$ ita SR ad aliam ea erit linea CE vel DF, quam *latus rectum curvæ hujus* appellabimus. Invenitur autem adhuc accuratius si loco numerorum 100000 et 99999, quæritur per numeros 1 et $1\frac{1}{10000000000000000000}$, fit enim CE 434294481903251804 ³⁾ qualium logarithmus binarij est 301029995663981195 ⁴⁾. Patebit autem usus hujus lateris recti in sequentibus.

[Fig. 4.]



in A, quia BF ponitur esse latus rectum. Unde pars quædam lineæ AH cadet intra curvæ cavam partem, puta AK. dividatur AH in partes tot æquales punctis

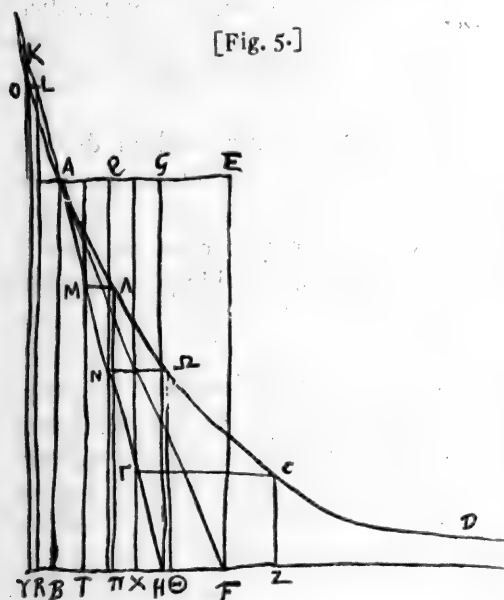
Si a puncto quolibet in curva sumpto ut A [Fig. 4] demittatur in asymptoton perpendicularis, AB, dico rectangulum ab AB et latere recto BF comprehensum nempe ABFE æquari spatio infinito inter curvam, perpendicularem AB et asymptoton BZ interjecto.

Fiat enim primò in eodem latere AB, rectangulum quoddam AH quod majus sit rectangulo AF. dico illud majus quoque esse dicto spatio infinito. Ductis enim diagonijs AF, AH rectangulorum utrorumque, constat quidem AF tangere curvam

L, M, N, ut earum quælibet sit minor quam AK. Et ductis per ea puncta rectis parallelis AB, dividunt eæ rectang.^m AH in rectangula æqualia ut sunt AR, QT &c. ab iisdem vero punctis si ducantur parallelæ asymptoti lineæ LO, MA, NC, et a punctis ubi hæ occurrunt curvæ AC, demittantur perpendiculares in asymptoton velut OY, $\Lambda\Pi$, CZ, fient etiam spatia inter binas quasque earum interjecta inter se æqualia ut sunt AOYB, O $\Lambda\Pi$ Y, Λ CZ Π ac denique etiam infimum spatium infinitum CZD, ut constat ex præcedentibus ⁵⁾, quia nempe differentie duarum perpendicularium dicta spatia comprehendunt sunt ex constr.^c æquales. Jam vero rectang.^m AR majus esse liquet spatio AOYB, cum hoc illius pars sit, nam OY necessario cadet inter AB et LR. Ergo et \square SR majus erit spatio OY Π Λ , quippe quod æquale est spatio AOYB. Item \square VT majus erit spatio $\Lambda\Pi$ ZC atque ita singula rectangula si plura forent, singulis sequentibus spatijs quum par utrorumque sit numerus, ac denique ultimum \square VH majus quoque spatio infimo ac infinito CZD. Itaque omnia rectangula omnibus simul spatijs;

hoc est rectangulum ABHG spatio infinito ABDC majus erit.

Esto rursus \square quoddam ABHG [Fig. 5] quod sit minus rectangulo ABFE; dico illud minus quoque esse spatio infinito ADB. Ductis enim ut ante diagonijs AF, AH, cum AF tangat curvam in A, secabit eam recta HA versus A producta; productaque pars cadet intra cavitatem curvæ ut AK. Dividatur AH in tot partes æquales ut earum unâ appositâ in producta HA, velut AL, non pertingat ad K. Constructis porro reliquis ut prius. patet rectangulum AR minus nunc esse spatio AOYB cujus nempe pars est, nam LR manifesto nunc cadit inter OY et AB. Hinc ergo et rectang. AT minus



[Fig. 5.]

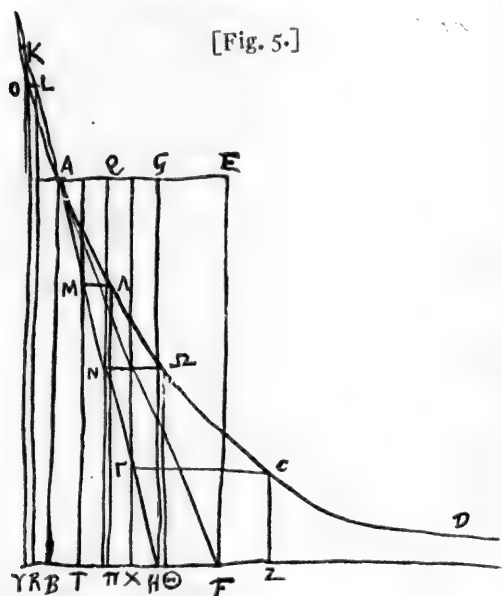
¹⁾ On a $CE = \frac{\log e}{\log 2} \cdot AB$, où e représente la base des logarithmes népériens et AB (voir la Fig. 1, p. 460) la différence des abscisses qui correspond au rapport de 2 à 1 des ordonnées.

²⁾ Voir la note 4 de la p. 461. On a ici $n = 10$.

³⁾ On retrouve cette donnée, avec le même nombre de chiffres, à la p. 11 de l'„Arithmetica Logarithmica”, ouvrage mentionné dans la note 5 de la p. 455. Ajoutons qu'on a $\log e = 0,434294481903251827$ (Adams, Proc. Roy. Soc. of London, vol. 42, 1887, p. 25).

⁴⁾ Ce nombre, qui indique les premiers 18 mantisses de $\log 2$, se retrouve à la p. 14 de l'„Arithmetica Logarithmica”.

⁵⁾ Voir les p. 462—463.



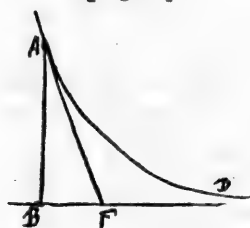
[Fig. 5.]

erit spatium $A\Lambda\Pi B$, cum et rectangulum rectangulo et spatium spatio priori sit æquale. eadem ratione rectang.^m QT minus erit spatio $\Lambda\Omega\Theta\Pi$, et $\square^m QX$ spatio $\Omega CZ\Theta$, et $\square GX$ spatio CDZ infinito, quod nempe et ipsum reliquis spatijs æquale est. Itaque totum rectang.^m $ABHG$ minus esse patet spatio omni $\Lambda\Omega CDBA$ infinito.

Cum igitur ostensum sit rectangulum quodlibet quod majus est rectangulo $ABFE$, majus quoque esse spatio $ACDB$ infinito; item rectangulum quodvis quod minus est rectangulo $ABFE$ minus quoque esse prædicto spatio; necesse est rectangulum ipsum $ABFE$ eidem spatio infinito æquale esse. quod erat dem.

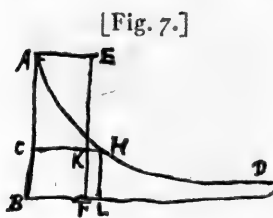
Nota vero hunc modum demonstrandi sine deductione ad absurdum, quæ videtur hoc pacto alibi quoque devitari posse¹⁾.

Si ergo ab eodem puncto curvæ perpendicularis in asymptoton, et tangens ducatur ut sunt hic [Fig. 6] AB , AF , erit semper triangulum ABF dimidium spatij totius infiniti ABD .



[Fig. 6.]

Spatium quodvis inter duas perpendiculares interceptum ut $ABLH$ [Fig. 7], æquale erit rectangulo sub latere recto et differentia dictarum perpendicularium, ut hic rectangulum AK . Nam cum spatium infin. ABD sit æquale $\square^{lo} AF$; spatium vero infin. HLD æquale $\square^{lo} CF$; erit reliquum spatium $ABLH$ æquale \square^{lo} reliquo AK .



[Fig. 7.]

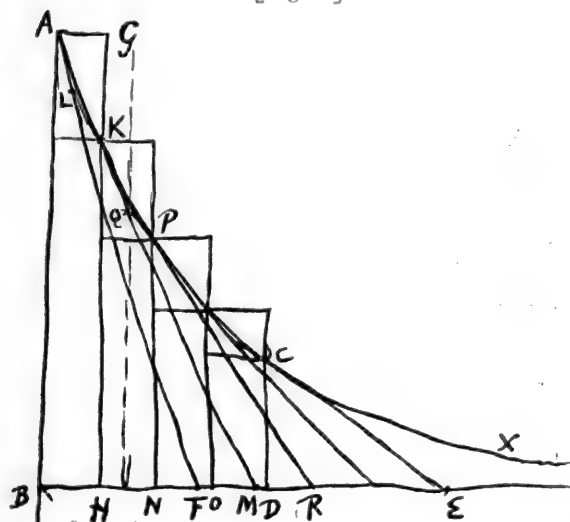
Alia præcedentis demonstratio datur, ostendendo $ABDC$ [Fig. 8] terminatum duabus perpendicularibus AB , CD , duplum semper esse spatij inter duas tangentes AF , CE , ab iisdem punctiseductas, intercepti.

Basis BD in partes æquales dividatur BH , HN &c. unde perpend.^{es} ad curvam

¹⁾ Comparez, à la p. 338 du Tome présent, la description de Huygens de la méthode archimédienne de la réduction à l'absurde; il lui semble donc que cette méthode peut être remplacée quelquefois par celle suivie dans la démonstration qu'il vient d'achever.

erigantur, HK, NP &c. Et a punctis A, K, P &c. tangentes ducantur AF, KM &c.

[Fig. 8.]



et compleantur rectangula BG, BK, KN, PH &c. et tangentes binæ quæque proxime sibi occurrant in punctis L, Q &c. Jam quia BF, HM, NR &c sunt æquales fient et FM, MR, &c æquales et singulæ singulis BH, HN, NO &c.

Itaque triang. FLM minus erit $\frac{1}{2}$

rectang.° AH, majus vero $\frac{1}{2}$ \square^{lo} KB.

Itidem triang.° MQR, minus

erit $\frac{1}{2}$ \square^{lo} KN, majus vero $\frac{1}{2}$ \square^{lo} PH.

Atque ita composita figura

ex omnibus triang. minor erit $\frac{1}{2}$

figurâ ex circumscriptis rec-

tang.° major vero dimidia figura ex rectangulis inscriptis. Unde facile ostenditur spatium ACEF dimidium esse spatij ACDB. Quod cum ubique contingat, ubicunque perpend.° CD statuatur patet cum CD infinite parva erit, spatium ACEF, fore infinitum inter curvam et asymptoton interjacens rectaque AF terminatum; spatium vero ACDB, fore infinitum inter curvam et asymptoton, atque linea AB terminatum. Itaque illud spatium infinitum hujus infiniti spatij dimidium erit, ac proinde et triangulum reliquum AFB ejusdem spatij infiniti ACXEBA dimidium esse constabit.

Hinc et de solido spatij infiniti circa axem BE demonstrabitur, esse sequaliterum coni ex conversione trianguli AFB circa BF.

Nempe cum solidum a triang.° FLM fit minus quam $\frac{1}{3}$ cylindri a \square^{lo} AH, majus vero quam $\frac{1}{3}$ cylindri a \square^{lo} KB, atque ita de ceteris; facile ostendetur

solidum a spatio ACEF, esse $\frac{1}{3}$ solidi a spatio ACDB idque ubicunque terminus

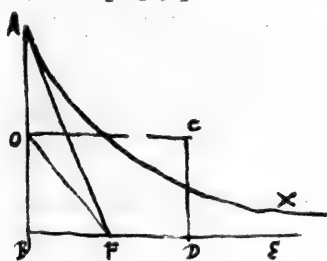
CD statuatur. Unde solidum ab infinito spatio ACXEFA erit $\frac{1}{3}$ solidi ab infinito

spatio ACXEBA. ac proinde conus a reliquo triangulo AFB æquabitur $\frac{2}{3}$ solidi ab eodem spatio ACXEBA.

Hinc porro et distantia centri grav.° spatij infiniti ABEXA, ab asymptoto BE ostenditur esse quarta pars perpendicularis AB.

Sumta enim BD [Fig. 9] \propto duplæ BF et $BO \propto \frac{1}{2} AB$, et completo \square^{10}

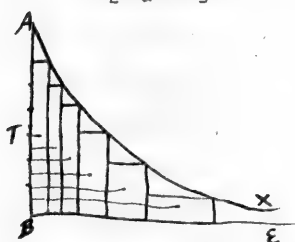
[Fig. 9.]



BOCD, erit hoc duplum trianguli ABF ac proinde æquale spatio infinito ABEXA. Sed et cylindrus a \square BOCD circa BD æquabitur solido ex conversione spatij dicti infiniti circa BE. Est enim cylindrus e conversione \square BOCD sexcuplus conij a conversione triang.ⁱ OFB circa BF, ideoque sesquialter conij à triang.^o AFB circa eandem BF, cujus conij et solidum a spatio infinito ABEX sesquialterum ostendimus. Itaque centra gr. solidi infiniti et \square BOCD æqualiter distare necesse est a linea BE ¹⁾;

utraque igitur distat dimidiâ BO, hoc est quarta parte AB. q. e. d.

[Fig. 10.]



Potest idem hoc de centro gr.^{is} aliter quoque ostendi descriptis intra spatium infinitum ABEX [Fig. 10] rectangulis quorum unumquodque æquali altitudinis excessu sibi proximum superet. hæc enim si multitudine infinita imaginemus poterunt haberi pro æqualibus inter se ²⁾, altissimi autem centrum gr. distabit ab asymptoto BE per dimidiam AB, et sequentium deinceps centra gr. æqualibus semper intervallis propiora fient ipsi BE, quæ scilicet, intervalla erunt dimidia

excessus altitudinum proximorum rectangulorum. Cum igitur æqualium magnitudinum centra gravitatis in æqualia intervalla dividant lineam BT, dimidiam ipsius AB: erit commune omnium gravitatum centrum in medio ipsius BT, hoc est, distabit per $\frac{1}{4} AB$ ab asymptoto BE.

Nullius spatij a curva et asymptoto et duabus perpendicularibus comprehensi centrum grav. ulterius distat a majori earum perpendicularium quam est longitudo lateris recti.

Sit ejusmodi spatium ABCD [Fig. 11], dico ejus centr. gr. non alterius distare ab AB quam est longitudo lateris recti ³⁾. Si enim fieri potest sit ejus centr. gr. in G ita ut GM major sit latere recto. possum ergo ab ea abscindere particulam ut MR ut residua RG adhuc major sit latere recto. ducatur MRO ⁴⁾

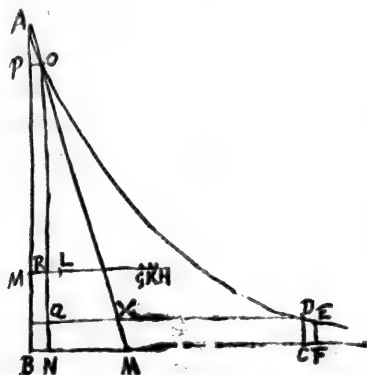
¹⁾ D'après le théorème de Guldin.

²⁾ Voir l'avant-dernier alinéa de la p. 462.

³⁾ L'analyse moderne nous donne facilement pour cette distance: $r = \frac{CD}{AB - CD} \times BC$, où r représente le „latus rectum” de la courbe. C'est d'ailleurs le résultat obtenu plus loin par Huygens lui même; voir le troisième alinéa de la p. 471.

⁴⁾ Lisez: NRO.

[Fig. 11.]



parall. BA, et per O ubi occurrit curvæ, agatur AOM recta ⁵⁾). fietque necessario NM minor latere recto, quia OM non tangit sed secat curvam in O. Sit OP parall. BC. et ipsi OP vel BN sumatur æqualis CF versus partem acutam spatij infiniti, et ducatur FE parall. BA. quia igitur portionis OEFN basis FN æqualis est basi CB portionis ADCB, erit quoque ON ad EF ut AB ad DC ⁶⁾). unde quum portio utraque constare concipi possit ex innumeris rectang.^{is} æquales bases habentibus atque eadem proportionem decreascentibus, manifestum est (sed et accurate ostendi posset) utriusque centra grav. similiter dividere

distantiam utriusque extremarum perpendiculariarum; quæ distantia cum sit utro-
 bique æqualis, æqualiter ergo utriusque centra gr. aberunt a perpendicularibus
 majoribus AB, ON. Ergo cum centr. gr. spatij ADCB ponatur G, erit (sumpta
 RH \propto MG) punctum H centr. gr. spatij ONFE ⁷⁾. a quo si auferatur spatium
 DEFC, cujus intra seipsum est centr. gr.; apparet spatij reliqui ODCN centr. gr.
 inter H et G cadere, puta in K. Jam vero quia spatium AONB est ad spatium ODCN
 ut AP ad OQ, ex præcedentibus ²⁾, hoc est ut OP ad XQ; si fiat ut OP ad XQ ita
 KG ad GL, erit L centr. gravitatis spatij AONB, quia nempe G ponitur centr. gr.
 spatij totius ABCD et K centr. gr. spatij ONCD. Erit autem GL minor quam XQ
 cum et KG sit minor quam OP; nam tota HG ipsi OP æqualis erat. atqui XQ
 minor est quam MN, et hæc minor latere recto, ut supra dictum fuit. Ergo GL
 omnino minor erit latere recto. Sed GR ipso major erat: Ergo GL minor quam
 GR. Itaque L centr. gr. spatij AONB caderet extra spatium ipsum, atque ita
 ut ducta per L linea recta ⁸⁾ totum caderet ad partem unam quod esse non potest.

Hinc itaque patet, ubicunque CD perpend.^{is} statuatur, etsi in infinitum distans ab AB, semper spatij ab utraque terminati centr. gr. non ulterius ab AB remotum fore, quam longitudine lateris recti atque adeo recte de spatio infinito concluditur esse ei centr. aliquod gr., idque non alterius quam dictum est distare ab AB.

Ostendam autem neque minus distare ab AB, dicta longitudine lateris recti, ac proinde ipsa hac longitudine inde abesse ⁹⁾).

5) Remarquez le double emploi de la lettre M dans la figure. Il s'agit cette fois du point M situé sur l'asymptote BC.

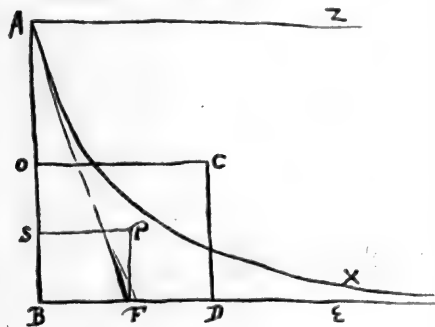
⁶⁾ Consultez, p. 461, le premier alinéa de la présente Pièce.

7) En vérité on doit considérer H, K et L non pas comme les centres de gravité eux mêmes des espaces en question, mais comme les projections de ces centres sur la droite MG.

8) Savoir une droite parallèle à AB .

²⁾ Comparez la note 3. En effet, on constate facilement que le deuxième terme de l'expression

[Fig. 13.]



Hinc et de solido spatij infiniti ex conversione ejus circa perpendicularem pronuntiare poterimus. Etenim si intra angulum perpendicularis cum asymptoto rectangulum applicetur, ut OBDC [Fig. 13], cujus altitudo OB dimidia sit AB, basis vero BD dupla lateris recti, manifestum est ejus rectanguli centrum gr. P incidere in centr. gr. spatij infiniti ABEX; cui spatio quoque dictum rectangulum æquale est ²). Unde constat conversione ejus circa OB cylindrum gigni æqualem solido infinito ex conversione spatij

infiniti circa eundem axem AB. Sicut de cylindro qui sit ejusdem rectanguli conversione circa BD, ostensum antea est ³), esse eum æqualem solido alteri infinito ex circumvolutione spatij ABEX circa asymptoton BE.

Est ergo solidum ex spatio infinito ABEX circa asymptoton BE ad solidum infinitum ex eodem spatio circa AB perpendicularem, sicut PF ad PS, hoc est sicut $\frac{1}{4}$ perpend.^{is} AB ad latus rectum lineæ AX. ad solidum vero circa rectam AZ asymptoto parallelam ut 1 ad 3. Quod postremum solidum calicem refert infinitæ capacitatis, licet exigui ponderis, quod et in Cissoide contingit ⁴).

Portionis a binis perpendicularibus terminatæ centrum gravitatis distat a perpendiculari majore longitudine lateris recti demta linea quæ se habeat ad basin portionis sicut minor perpendicularis ad excessum quo ipsa a majori superatur ⁵). Si igitur detur portionis cujusvis terminatæ centrum grav. inveniri poterit latus rectum.

Centrum gr. solidi infiniti circa asymptoton distat a perpendiculari sive a basi ipsius solidi per dimidium lateris recti ⁶).

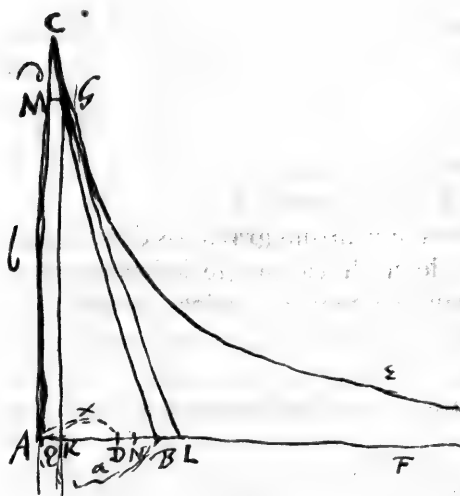
Ergo et centr. gr. solidi infiniti circa perpendicularem distabit per $\frac{1}{8}$ ipsius perpendicularis, quæ est axis solidi ⁷).

* dans un des quadrants du système XOY de coordonnées rectilignes rectangulaires; soit Q_x le solide engendré par la rotation de cette figure autour de l'axe des x , Q_y celui qui résulte de la rotation de la même figure Q autour de l'axe des y ; la distance du centre de gravité de Q_x à l'axe des y est alors à la distance du centre de gravité de Q à l'axe des x , comme la distance du centre de gravité de la figure Q à l'axe des y à la distance de ce même centre à l'axe des x .

Afin de démontrer ce théorème, considérons en premier lieu l'anneau décrit par la révolution d'un élément dQ de la figure Q autour de l'axe des x . Évidemment le moment de cet

APPENDICE À LA PIÈCE N^o. II.

[1689] 1).



Invenitur centrum gr. solidi à spatio infinito rectis CA, Al' et Logistica CE comprehenso, circa AF conversi.

AB latus rectum. Conus a triang.^o CAB
circa AB est $\frac{2}{3}$ solidi illius infiniti ut ostensum lib. B²).

Si solidi à CAFE centr. gr. D. Et solidi à GKFE centr. gr. N Erunt æquales AD, KN: quod facile ostenditur ex sectione in orbes proportionales quorum omnium eadem altitudo in recta AF ³).

$$AC \propto b; \text{ lat. r. } AB \propto a; AK \propto c;$$

$$AD \propto x; CM \propto d \propto \frac{cb}{a}.$$

Solid. à CAFE [proportionalis] $\left(\frac{3}{2}bb\right)$; solid. à GKFE $\left(\frac{3}{2}bb - 3bd + \frac{3}{2}dd\right)$;
 folid. à CGKA $\left(+ 3bd - \frac{3}{2}dd\right)$.

anneau par rapport à un plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par l'axe des y est égal à $2\pi xy \, dQ$. Or, on trouve la même expression pour le moment de l'anneau décrit par dQ autour de l'axe des y , pris par rapport à un plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par l'axe des x . Il en résulte que le moment du solide Q_x par rapport au plan passant par l'axe des y est égal au moment du solide Q_y par rapport au plan passant par l'axe des x . Par suite, les volumes des solides Q_x et Q_y sont en raison inverse des distances de leurs centres de gravité respectivement à l'axe des y et à l'axe des x . Mais, en vertu du théorème

solid. à GKFE $\left(\frac{3}{2}bb - 3bd + \frac{3}{2}dd\right)$ [ad] solid. à CGKA $\left(3bd - \frac{3}{2}dd\right)$ [ut]

$$DQ\left(x - \frac{1}{2}c\right) \text{ ad DN } (c)$$

$$\frac{3}{2}b - 3d^4) \text{ [ad] } 3d \text{ [ut] } x - \frac{1}{2}c \text{ [ad] } c$$

$$\frac{3}{2}b - \frac{3bc}{a} \text{ [ad] } \frac{3bc}{a} \text{ [ut] } x - \frac{1}{2}c \text{ [ad] } c$$

$$\frac{3}{2}a - 3c \text{ [ad] } 3c \text{ [ut] } x - \frac{1}{2}c \text{ [ad] } c$$

$$3a - 6c \propto 6x - 3c$$

$$a - 3c^5) \propto 2x; c \text{ minimum } \propto 0.$$

$$\frac{1}{2}a \propto x.$$

de Guldin, ces mêmes volumes sont en raison directe des distances du centre de gravité de la figure Q aux axes des x et des y ; d'où s'ensuit le théorème en question.

Or il n'y a rien dans cette démonstration qui, sous une forme un peu modifiée, n'ait été facilement accessible à Huygens. On peut donc présumer que le théorème lui était connu; comme la dernière phrase du texte le semble prouver.

Ajoutons qu'on retrouve le même théorème dans l'ouvrage suivant de Guido Grandi, qu'il publia en 1701: „Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam, seu logarithmicam lineam, Qua occasione plures Geometricæ Methodi exhibentur circa Tangentes, Quadraturas, Centra gravitatis, Solida, &c. variarum curvarum, uti infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, &c. Aliæque Geometricæ Veritates illustrantur. Addita epistola geometrica ad P. Thomam Cevam S. J. Auctore D. Guidone Grando Cremonensi, Monacho Camaldulensi, & in Almo Pisano Lyceo Publ. Philosophiæ Professore”.

Cet ouvrage fut réimprimé par G. J.'s Gravesande dans les „Christiani Hugonii Zuilichemi Dum viveret. Zelhemi Toparchæ. Opera reliqua. Tomus primus. Amstelodami, Apud Janssonio-Waesbergios, M.DCC.XXVIII”, p. 137—315.

Guido Grandi, né à Crémone en 1671, mort à Pise en 1742, démontre le théorème d'une manière analogue à celle que nous avons suivie, quoiqu'un peu plus compliquée, et il l'emploie de même pour démontrer la conclusion à laquelle Huygens était arrivée, voir les p. 266—268 de la réimpression de son ouvrage.

¹⁾ D'après le lieu (p. 17 verso) que cet Appendice occupe au Manuscrit G.

²⁾ Voir le deuxième alinéa de la p. 467.

³⁾ Comparez le raisonnement analogue qu'on trouve au milieu du premier alinéa de la p. 469.

⁴⁾ C'est-à-dire en négligeant le terme $\frac{3}{2}dd$.

⁵⁾ Lisez: $a-c$.

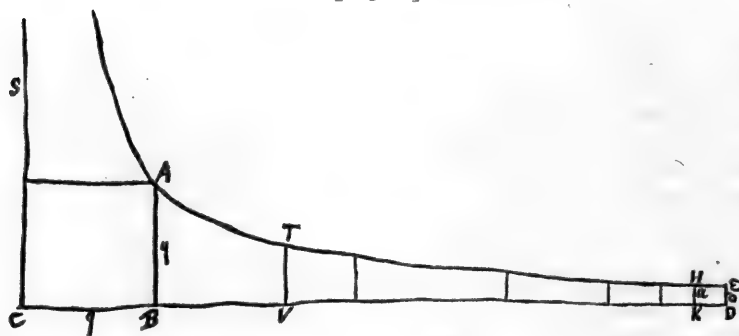
III¹⁾.

1662.

16 Jul. 1662.

Hyperbolæ dimensio ope Logarithmorum.

[Fig. 1.]



AHE est hyperbola. asymptoti SC, CD. quadratum hyperbolæ AC. AB decupla ED. Spatium HD ex quinta bisectione spatij ABDE. $AB \propto q$. $HK \propto a$. $ED \propto d$. Ergo $KD \propto \frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$. vide

quæ supra ²⁾ ubi de inventione logarithmorum, ubi ostenditur quod ductâ KD in Sq 10364093244158 ³⁾ fit productum æquale spatio hyperbolico HD.

Quod si velim jam invenire magnitudinem spatij cujuslibet ABVT cujus data fit laterum ratio AB ad TV (omnia enim, in quibus hæc ratio eadem est, sunt æqualia) oportet facere ut sicut differentia logarithmorum HK et ED, ad differentiam logarithmorum AB et TV, ita fit spatium HD ad aliud quod æquabitur ipsi ABVT quæsito.

¹⁾ La Pièce est empruntée aux p. 92—95 du Manuscrit B.

²⁾ Voir la Pièce N°. I aux p. 451—455.

³⁾ On retrouve ce nombre dans les calculs qui, dans le Manuscrit B, précèdent la Pièce N°. I citée dans la note précédente. Il a été supputé à l'aide de la formule qu'on trouve à la première ligne de la p. 455.

Sit AB 100000. Ergo ED 10000; sit TV 50000. $\frac{qq}{d} \propto 1000000$

log. AB 5,00000,00000

log. ED 4,00000,00000

9,00000,00000

fume dimidium $\propto \sqrt{qd}$ five medio prop. inter

4,50000,00000 AB, ED.

a[dde] log. ED $\left\{ \begin{array}{l} 4,50000,00000 \\ 4,00000,00000 \end{array} \right.$

8,50000,00000

4,25000,00000

log. ED 4,00000,00000

8,25000,00000

4,12500,00000

log. ED 4,00000,00000

8,12500,00000

4,06250,00000

log. ED 4,00000,00000

8,06250,00000

f. $\left\{ \begin{array}{l} \text{log. HK } a \quad 4,03125,00000 \\ \text{ex log. } \frac{qq}{a} \quad 10,00000,00000 \end{array} \right.$

log. $\frac{qq}{a}$ 5,96875,00000

hinc $\frac{qq}{a} \propto 930572,0409$

$\frac{qq}{d} \propto 1000000,0000$

$\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a} \propto \text{KD} \propto 69427,9501$

69427,9591 KD

10364,0932 Sp inventa in superioribus

719557838,5 ⁴⁾ spatium HD.

log. HK. 4,03125,00000

log. ED. 4,00000,00000

0,03125,00000 diff.

5,00000,00000 log. AB

4,69897,00043 log. TV

0,30102,99957 diff. log.^m AB et TV quæ hic est log. 2.

⁴⁾ Nous supprimons dans le texte cette multiplication. Primitivement elle fut exécutée comme

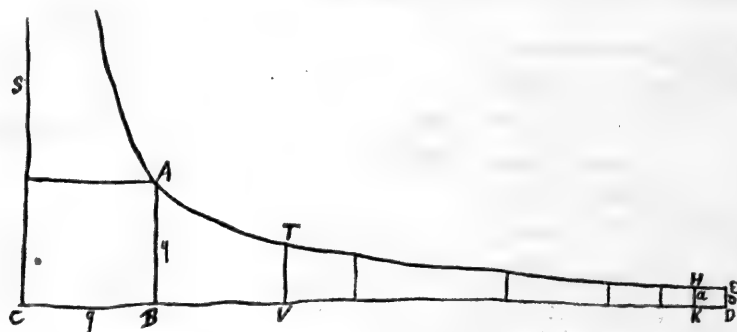
694279591
103640932
138
2082
62478
2777116
41656770
208283877
694279591
719557837

ici à côté; ensuite Huygens, pour obtenir un résultat plus exact, ajouta à chaque ligne des produits partiels le chiffre qui aurait suivi s'il avait admis dans cette ligne un chiffre de plus, tout en intercalant les dixièmes entre les lignes déjà écrites. De cette manière les premières quatre lignes devenaient comme il suit:

1388
20826
624783
6
27771160
2
etc.;

ce qui menait au résultat reproduit dans le texte.

[Fig. 1.]



$$\begin{array}{l} 1.^{\text{us}} \text{ ad [de]} \left\{ \begin{array}{l} 8,85706,57085 \text{ log. spatij HD.} \\ 9,47860,97724 \text{ log. diff. \& log. orum AB, TV }^1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$3.^{\text{us}} \quad f. \left\{ \begin{array}{l} 8,33567,54809 \\ 8,49485,00217 \text{ log. diff. \& log. orum HK, ED.} \end{array} \right.$$

9,84082,54592 log. 69314,71776, spatium ABVT qualium partium quadratum AC, 100000,00000.

Potuiſſet et 3^{tius} à primo ſubtrahi, et reſiduo addi ſecundus. Illudque reſiduum ad quamvis hyperbolæ portionem quadrandam uſui fore ſciendum eſt, nempe 0,36221,56868.

Hinc itaque Regula facilis oritur ad hujusmodi portionem quamlibet hyperbolicam quadrandam.

Data enim proportionē linearum portionem terminantium in numeris, capiatur differentia logarithmorum utriusque numeri, et quærat^{ur} ejus differentię logarithmus, quo addito ad 0,36221,56868, hoc eſt, ad reſiduum illud modo dictum quod ſemper idem eſt, fiet logarithmus ſpatij quæſiti, unde et ſpatium numero dabitur²⁾.

¹⁾ C'eſt-à-dire après multiplication par AB^2 ; voir les formules de la note 2.

²⁾ Cette règle corrépond à l'emploi de la formule moderne :

$$\log \frac{\text{spat. TVDE}}{AB^2} = \log (\log TV - \log DE) + (-\log \log e).$$

Or, Huygens ſavait (voir la p. 452) que l'aire d'un eſpace hyperbolique comme TVDE eſt proportionnelle à la fois à l'aire du carré AC et à la différence des logarithmes de AB et de DE.

Il pouvait donc poſer $\frac{\text{spat. TVDE}}{AB^2} = C (\log TV - \log DE)$ où C représente une conſtante, et en déduire :

$$\log \frac{\text{spat. TVDE}}{AB^2} = \log (\log TV - \log DE) + \log C,$$

où il ſ'agit de calculer la valeur de log C. À cet effet il applique ſa méthode d'approximation

[Fig. 2.]



Sit ex. gr. data ratio linearum AB ad TV quæ
36 ad 5³).

1,55630,25008 log. 36

0,69897,00043 log 5

0,85733,24965 diff. log. orum

ad[de] { 9,93314,92856 log. diff. x
0,36221,56868 num. perpetuus

10,29536,49724 hujus logarithmi nu-

merus erit area spatij ABVT in partibusqualium
quadratum hyperbolæ est 100000,00000. Habebit autem numerus ille 11 cha-
racteres, quum characteristica logarithmi ejus sit 10, quæratum itaque primo
numerus proximus dato logarithmo conveniens neglecta characterica 10; inve-
nitur 19740; deinde ex differentia logarithmorum proximorum reliqui charac-
teres eliciantur 81018, scribendi post priores ut fiat 19740,81018,0, addito
ad finem zero ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo 1,97408,10180 area
spacij ABVT.

à la détermination de l'aire de l'espace HKDE; après quoi la formule

$$\log \frac{\text{spat. HKDE}}{AB^2} = \log (\log HK - \log DE) + \log C$$

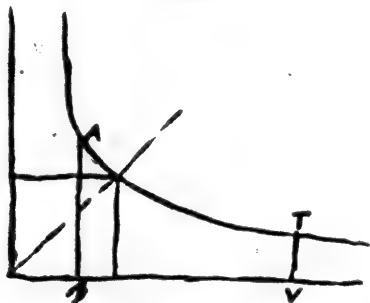
lui permet de calculer la valeur cherchée de log C, pour laquelle il trouve 0,3622156868.

Ajoutons qu'on retrouve la même règle dans le Journal des Sçavans de juillet 1668 (voir la p. 231 de notre Tome VI), à la p. 23 du Manuscrit N^o. 13, cité dans la note 5 de la p. 235, et dans l'„Horologium oscillatorium”, p. 78—79 de l'édition originale. Seulement, Huygens remplace dans le Manuscrit N^o. 13 et dans l'„Horologium oscillatorium” le „numerus perpetuus” de la présente règle par 0,3622156887; sans doute par suite d'un nouveau calcul que nous ne connaissons pas. Or, on a, en effet, $-\log \log e = 0,362215688699$.

Remarquons encore que l'emploi de l'ancienne valeur dans le Journal des Sçavans prouve que la Pièce qu'on trouve dans le Manuscrit N^o. 13 doit être postérieure au 2 juillet 1668.

- 3) On retrouve le même exemple dans le Journal des Sçavans, dans le Manuscrit N^o. 13 et dans l'„Horologium oscillatorium” aux lieux indiqués dans la note précédente; toutefois, dans ce Manuscrit et l'„Horologium oscillatorium” les résultats sont un peu différents de celui obtenu dans le texte à cause de la valeur différente assignée au „numerus perpetuus”. C'est le seul exemple traité dans l'„Horologium oscillatorium”; mais le Manuscrit N^o. 13 suit d'assez près jusqu'à la fin le texte de la Pièce présente à l'exception de la valeur employée pour le „num. perp.”.

[Fig. 2.]



Sit rursus proportio AB ad TV data ut 100000
ad 1.

$$5,00000,00000 \log. 100000.$$

$$0,00000,00000 \log. 1$$

$$5,00000,00000 \text{ diff. log. orum}$$

$$\text{ad. } \begin{cases} 10,69897,00043 \log. \text{ diff. }^a \text{ dictæ} \\ 0,36221,56868 \text{ num. perpetuus.} \end{cases}$$

$$11,06118,56911 \text{ hujus logar. } i \text{ quæritur}$$

numerus

$$\text{fit } 11,51292,54200 \text{ area ABVT.}$$

Sit jam data proportio AB ad TV quæ 100000 ad 99999.

$$5,00000,00000 \log. 100000$$

$$4,99999,56570 \log. 99999$$

$$43430 \text{ diff. log. orum}$$

$$4,63778,98294 \log. \text{ diff. }^a$$

$$0,36221,56868 \text{ num. perpetuus}$$

$$5,00000,55162 \text{ logarithmi hujus numerus ut invenia-}$$

tur, quærendi logarithmi duo proximi quorum differentia 55162, qui sunt loga-
rithmi numerorum 78730, et 78729¹⁾). Est autem 5,00000,00000 logarithmus
100000. Itaque multiplicetur 100000 per 78730 et dividatur per 78729, fit
 $100001\frac{3}{7}$ ²⁾ numerus conveniens logarithmo proposito, atque hic numerus est par-
tium area ABVT qualium nempe quadratum hyperbolæ est 1,00000,00000.

¹⁾ Il s'agit de la table des logarithmes à dix mantisses qu'on trouve dans l'„Editio secunda aucta per Adrianum Vlacq Goudanum”, de 1628, de l'„Arithmetica Logarithmica”; ouvrage que nous avons mentionné dans la note 5 de la p. 455 du présent Tome. On la trouve aussi dans les éditions française, allemande, hollandaise et anglaise de cet ouvrage qui parurent en même temps. Dans cette table Vlacq a comblé la lacune qui existait dans la première édition, où Briggs s'était borné à donner les logarithmes (jusqu'à 14 mantisses) des nombres de 1 à 20000 et de 90000 à 100000.

En effet, on rencontre dans la table en question le nombre 55162 dans la colonne des „Differ.”, comme indiquant la différence des logarithmes de 78729 et 78730. On a donc:

$$0,0000055162 = \log \frac{78730}{78729} \text{ et, par suite, num. } 5,0000055162 = 7873000000 : 78729 = \\ = 100001\frac{21271}{78729}.$$

Possumus etiam quinque posteriores characteres omittere cum tanta ἀκρίβεια non est opus, velut data proportionē AB ad TV quæ 27183 ad 10000

$$4,43429 \text{ log. } 27183$$

$$4,00000 \text{ log. } 10000$$

$$0,43429 \text{ diff. log.}$$

$$4,63778 \text{ log. diff.}^a$$

$$0,36222 \text{ num. perp.}$$

5,00000 logarithmus 1,00000 quæ est area spatij ABVT, quam hic apparet ipsi quadrato hyperbolæ æqualem esse, nam et hoc demtis quinque zero est 1,00000.

Data vicissim magnitudine spatij ABVT puta 1,97408 partium qualium quadratum hyperbolæ 1,00000 continet inveniemus proportionem laterum AB, TV dictum spatium terminantium hoc modo,

$$\begin{array}{r} 1,97408 \text{ spatium datum} \\ \text{f. } \left\{ \begin{array}{l} 5,29536 \text{ log. spatij dati} \\ 0,36222 \text{ num. perp.} \end{array} \right. \\ \hline 4,93314 \text{ log. differentiæ log.}^{\text{orum}} \\ 0,85733 \text{ differ. log.}^{\text{orum}} \end{array}$$

Quærendi jam duo numeri quorum logarithmi differant 0,85733. Hi enim numeri inter se rationem laterum quæsitam tenebunt.

$$\begin{array}{r} \text{f. } \left\{ \begin{array}{l} 5,00000 \text{ log. } 100000 \\ 0,85733 \text{ diff. log.}^{\text{orum}} \end{array} \right. \\ \hline 4,14267 \text{ log. } 13889 \end{array}$$

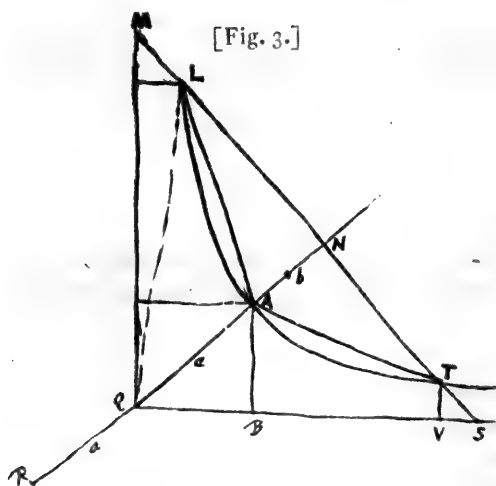
Ergo AB ad TV ut 100000 ad 13889 hoc est proxime ut 36 ad 5³⁾.

Sit spatium ABVT datum 1,00000, nempe æquale quadrato hyperbolæ.

²⁾ Lisez plutôt $100001\frac{3}{11}$.

³⁾ On a $36:5 \Rightarrow 100000:13888\frac{8}{9}$.

1,00000 spatium datum
 f. $\left\{ \begin{array}{l} 5,00000 \text{ ejus log.} \\ 0,36222 \text{ num. perp.} \\ 4,63778 \text{ log. differ. log. orum} \\ 0,43430 \text{ diff. log. orum} \end{array} \right.$
 ex $\frac{5,00000}{4,56570} \text{ log. } 1000000 \text{ log. } 36790^1).$



[Fig. 3.]

Portionis Hyperbolæ aream invenire²⁾.

Consideretur primum portio hyperbolæ cujus latera transversum rectumque sint æqualia, hoc est cujus asymptoti rectum angulum constituent ut LAT. AR latus transv. sit $\propto 2a$. AN $\propto b$ Ergo NT $\propto \sqrt{2ab + bb}$. et TS $\propto a + b - \sqrt{2ab + bb}$

$$\left. \begin{array}{l} aa + 2ab + bb \propto \triangle MQS \\ \frac{1}{2}aa \propto \text{qu. ABQ} \end{array} \right\} \text{ f.}$$

$\frac{1}{2}aa + 2ab + bb$ hinc subtrahe infuper $2\triangle TSV$ five $\frac{1}{2}\text{qu. TS}$

$$\frac{1}{2}aa + ab + \frac{1}{2}bb - a\sqrt{2ab + bb} - b\sqrt{2ab + bb} + ab + \frac{1}{2}bb$$

$a + b \sqrt{2ab + bb}$ hinc subtrahe 2 spat. ABVT eritque reliquum æquale spat. LAT.

¹⁾ Dans le Manuscrit N°. 13 le même problème est traité en employant dix mantisses, ce qui conduit à la conclusion : „Ergo [AB] ad VT ut 1,00000,00000 ad 36787,94412”.

²⁾ Plus tard, à une époque inconnue, Huygens a biffé toute la partie du texte que l'on trouve sous cet en-tête en ajoutant l'annotation „Hæc multo brevius peragi possunt”; mais puisque plus loin (voir la note 1 de la p. 482) la valeur de l'aire du segment LAT est utilisée dans les calculs, nous n'avons pas cru devoir supprimer la déduction de cette valeur. Quant à la méthode plus brève, elle est indiquée par la figure qu'on trouve à la p. 78 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium”. En effet, si du point L on abaisse la perpendiculaire LE sur l'asymptote QS, on voit que le segment hyperbolique LAT est égal au trapèze LEVT diminué de l'espace hyperbolique LATVE.

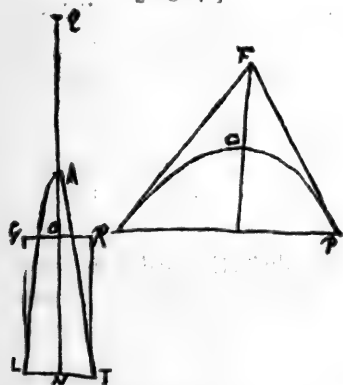
fit AQ 100000. a
 AN 200000. b
 Ergo 400000. $2a + b$
 5.6020599 log. $2a + b$
 5.3010299 log. b
 10.9030898 sum.
 5.4515449 log. $\sqrt{2ab + bb}$
 282840 $\sqrt{2ab + bb}$. NT.
 ex 300000 $a + b$ NS \propto NQ
 17160 TS
 5.4515449 log. $\sqrt{2ab + bb}$
 0.4771213 log. $a + b$
 5.9286662 log. $a + b \sqrt{2ab + bb}$
 5.4515449 log. NT
 5.3010299 log. AN
 10.7525748 log. \triangle .LAT
 565680 \triangle .LAT³⁾

ratio AQ ad TS eadem quæ AB ad TV. hinc per method. præc. invenietur spat. ABVT

5.000000 log. AQ
 4.23451 log. TS
 0.76549 diff. log.^{orum}
 4.88394 log. diff.^{æ 4)}
 0.36222 num. perp.
 5.24616 log. sp. ABVT
 176260 spat. ABVT in partibus qualium quadr. AB 100000.
 Ergo qualium quadr. AQ est 100000 talium 176260 erit 2 spatium ABVT.
 ex 848530 $a + b \sqrt{2ab + bb}$
 671270⁵⁾ portio LAT in partibus qualium qu. AQ 100000.
 majoribus logarithmis utendo accuratius area hæc invenietur.

Omnes autem hyperbolæ portiones quarum diameter ad latus transversum eandem rationem habent, eæ ad inscriptum sibi triangulum quoque eandem rationem habent. Unde apparet datâ qualibet portione posse hac methodo aream ejus inveniri.

[Fig. 4.]



Lineæ Parabolicæ, portionem rectam continenti, invenire rectam lineam æqualem.

Sit portio data PCR⁶⁾, et in eadem basi ponatur \triangle lum isosc duplæ altitudinis RFP. Tum hyperbolæ portio sumatur LAT cujus dimidium latus transv. QA sit \propto basi parabolæ RP. Quæ autem ex centro sectionis ad mediam basin hyperbolæ extenditur QN sit \propto duabus simul RF, FP. Jam per methodum præcedentem inventa hyperbolicæ portio area, dividatur ea per basin LT, fietque altitudo rectan-

³⁾ Huygens divise ici par 100000, mais, puisqu'il le fait partout pour les aires qu'il veut comparer, le résultat n'en est pas faussé.

⁴⁾ Après multiplication par l'aire du carré sur AB (voir les formules de la note 2 de la p. 476), pour laquelle Huygens prend 100000.

⁵⁾ Lisez : 672270.

⁶⁾ La construction, qui va suivre, pour trouver un segment OQ qui soit égal à l'arc parabolique

IV.

1662.

17 Jul. 1662.

De altitudine Atmosphææ ¹⁾).

In Toricelliano experimento altitudo Hydrargyri in tubo, cum bene ab aere purgatus est, inventa est a Boilio 2 ped. 6 poll. Londinensium sive unciarum 30 ²⁾). Quæ nempe hydrargyri altitudo æquiponderat cylindro aeris usque ad extremam atmosphæram, cujus eadem sit crassitudo quæ tubi diametri. Proportio autem gravitatis Hydrargyri ad aquam est quæ $13\frac{4}{7}$ ³⁾ ad 1 proximè unde cylindrus aqueus dictis 30 uncijs hydrargyri sive cylindro aereo æquiponderans erit altus circiter 34 pedibus. Proportio rursus gravitatis aeris ad aquam a me inventa est circiter quæ 1 ad 960 ⁴⁾ Aeris videlicet ita ut hîc compressus est. Itaque altitudo 32640 pedum aeris ita compressi æquiponderaret aquæ pedibus 34, vel uncijs 30 argenti vivi, quanta nempe altitudo fit ductis 960 in 34. Sumamus autem rotundum numerum 33000 pedum.

¹⁾ Quoique cette Pièce n'appartienne pas aux mathématiques pures, nous n'avons pas voulu la séparer de celle qui précède et dont elle constitue une application. Elle la suit immédiatement aux p. 96—100 du Manuscrit B et y est datée du lendemain du jour où l'autre Pièce fut composée.

Une version plus récente assez différente se trouve aux p. 27—33 du Manuscrit N°. 13; nous la reproduisons dans l'Appendice I, p. 491—494, pour autant qu'elle diffère notablement de la version du texte présent.

²⁾ On rencontre cette donnée dans l'„Experimentum XXXVI” des „Nova experimenta physico-mechanica”; ouvrage de 1660, cité dans la note 4 de la p. 295 de notre T. III. Dans l'„Experimentum XVII” Boyle avait trouvé „triginta digitos & supra octavam digiti partem”.

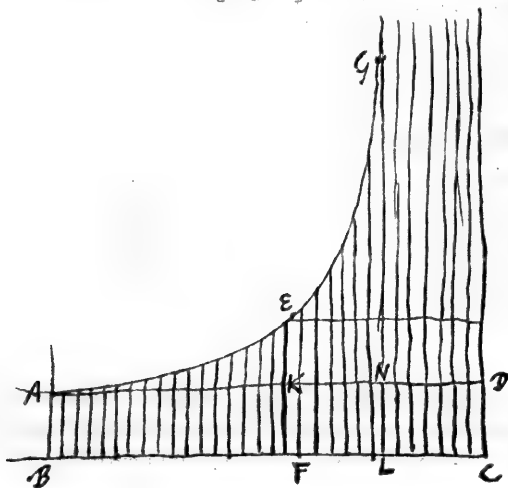
³⁾ Boyle dans l'„Experimentum XXXVI” avait trouvé $13\frac{19}{28}$.

⁴⁾ Comparez la lettre au frère Louis du 22 février 1662, p. 64 du T. IV. On trouve les expériences, du 20 février 1662, qui ont amené cette donnée, à la p. 57 du Manuscrit B. Nous les publierons dans un autre Tome.

Porro compertum est Boilianis experimentis, spatia ab eadem quantitate aeris occupata contrariam rationem servare ponderum quibus premitur ¹⁾. Ita si aeris particulam tubo vitreo inclusam 60 unciaë hydrargyri premant, is aer duplo minus spatium occupabit quam si tantum 30 uncijs hydrargyri prematur. Ubi tamen semper aeris quoque gravitas in censum venire debet, ut nempe aer tubo inclusus, cum nullus hydrargyrus adfusus est, tamen quasi a 30 uncijs hydrargyri premi intelligatur, quia tantum est pondus aeris superstantis. At cum 30 unciaë hydrargyri injectæ sunt, quasi a 60 uncijs premi credendus. Uncias pedis Lond.^{is} non vero gravitatis intelligimus. Hisce igitur positis omnia quæ ad Atmosphæræ altitudinem, diversamque aeris in qualibet ejus regione densitatem pertinent, explicari possunt.

Ponamus cylindrum quendam aeris ab ima terra ad supremam atmosphæram divisum esse sectionibus horizon.^{bus} in partes minimas quarum unaquæque æqualem aeris quantitatem et pondus contineat, quas partes extensione admodum inæquales fore perspicuum est, cum quanto quæque altior est tanto minus aeris pondus sustineat ideoque amplius se extendat. Quantitates autem aeris æquales istis

[Fig. 1.]



partibus comprehensæ designentur per particulas æquales in quas sectum est rectangulum ABCD. Quarum quæ proxima est AB, referat particulam aeris infimam, et sequentium quæque sequentes ordine eodem particulas aeris. Quod si igitur recta AB referat altitudinem ad quam sese extendit particula aeris infima, facile jam et reliquarum extensio reperietur. Consideremus enim quamlibet earum ut FK; quæ cum sustineat tantummodo reliquarum pondus quæ efficiunt rectangulum KFCD, tanto proinde latius se expandet quam particula infima ad AB, quanto graviore sunt quæ toto,

¹⁾ Huygens reçut le premier avis de cette découverte de Boyle par l'intermédiaire de Moray dans une lettre du 13 mars 1662; voir les p. 84—85 du T. IV. Après avoir pris connaissance ensuite de la „Defensio Doctrinæ de Elatere et Gravitate Aeris” (ouvrage cité dans la note 2 de la p. 171 du T. IV), où Boyle communique les expériences qui l'ont conduit à sa loi, Huygens fut pleinement convaincu de l'exactitude de cette loi puisqu'il écrivit à Moray le 14 juillet 1662 (voir la p. 171 du T. IV): „J'ay esté sur tout bien aise d'y trouver les deux expériences touchant la condensation et rarefaction de l'air, qui prouvent assez clairement cette propriété remarquable à sçavoir que la force de son ressort suit la proportion contraire des espaces ou il est réduit”.

rectangulo ABCD continentur ijs quæ efficiunt rectangulum KFCD. Hoc est sicut BC ad CF ita erit EF altitudo extensionis particulæ KF ad AB altitudinem extensionis particulæ infimæ. Ergo rectangulum AB, BC, æquale erit rectangulo EF, FC, ideoque punctum E ad hyperbolen, quæ per punctum A describitur ad asymptotos BC, CD. Singularum itaque prout ordine exhibentur in rectangulo ABCD, extensiones determinat hyperbola AEG, utque EF est extensio particulæ KF, ita GL est extensio particulæ NL atque ita de cæteris.

Extensiones autem omnium simul quæ rectangulo ABFK continentur, efficient spatium AEFB, et omnium quæ rectangulo ABLN extensiones efficient spatium AEGLB. atque ita quanto majus est ex. gr. spatium AEGLB rectangulo ABLN tanto major erit altitudo extensarum partium hujus rectanguli quam si omnes æque atque infima ad AB compressæ jacerent. Et quæ proportio spacij AEGLB ad rectangulum totum ABCD, eadem erit altitudinis partium extensarum rectanguli ABLN ad altitudinem omnium rectanguli ABCD, ita ut infima est, compressarum; hoc est ad altitudinem 33000 pedum.

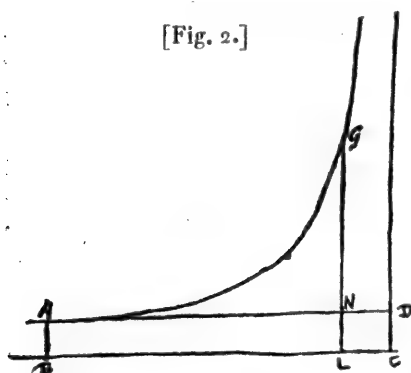
Hic itaque primo animadvertendum est, cum spatium quale AEGLB possit majus majusque sumi in infinitum (nam spatium inter hyperbolen et asymptotos est infinitæ magnitudinis) sequi infinitam esse aeris sive atmosphæræ altitudinem. utique si in quantalibet aeris extensione sibi constare sumamus Boilianum experimentum. Sed si ex corporeis partibus aer constat sese mutuo tangentibus, nam contactum hunc arguere videtur vis illa aeris elastica, non potest fieri ut in infinitum cylindrus aliquis aereus extendatur, cum definitum pondus habeat et quantitatem. Credibilis itaque est post ingentem aeris expansionem non amplius proportionem illam servari quam ostendit Experimentum Boilij. Verum, quia quousque se extendit experientia, successus semper egregiè respondisse inventus est haud aberraturos puto si eodem principio impofterum utamur ad illa quæ sequuntur supputanda. namque etsi forte pars centiesmillesima quantitatis aeris, quæ in suprema regione sita est, non secundum istam rationem extenditur, id nihil impedit quo minus in reliquo omni aere exacte satis observetur. Prædicta igitur hypothesi, veluti si per omnia certum sit Boilij experimentum, innixi, sequentia Problemata solvemus. Veluti si scire velim ad quantam altitudinem ascendendum sit ut tantum pars decima aeris, hoc est secundum quantitatem aut pondus, supra caput extet. quo nempe loco hydrargyrus in tubo Toricelliano tantum 3 pollices altus restabit.

Problema 1.

Ac rursus si inquirendum sit, datâ loci altitudine supra terræ superficiem, quanta aeris portio, seu gravitas supra atque infra resideat, et ad quantam proinde altitudinem hydrargyrus in tubo suspensus manebit²⁾. Itaque primò sit inveniendum,

²⁾ Après avoir mentionné à son frère Lodewijk, dans une lettre du 17 août 1662, sa solution de ce dernier problème, Huygens communiqua le lendemain à Moray les règles pour la solution des deux problèmes; voir les pp. 198, 202 et 205—206 du T. IV.

Data aeris portione seu gravitate a loco aliquo sursum, invenire quanta sit loci ejus altitudo.



Sit sursum pars decima aeris. Ergo ponatur LC [Fig. 2] $\propto \frac{1}{10}BC$. Hinc ducta LG parallela asymptoto CD, fiet et LN seu AB $\propto \frac{1}{10}LG^2$). Jam itaque data ratione GL ad AB inveniatur magnitudo spatij ABLG in partibus primò qualium quadr.^m hyperbolæ seu rectangulum ABCD 100000. idque per Regulam superius descriptam¹⁾.

$$\begin{array}{r}
 f. \left\{ \begin{array}{l} 1,00000 \log. 10 \\ 0,00000 \log. 1 \\ \hline 1,00000 \text{ diff. log.} \end{array} \right. \\
 \text{add.} \left\{ \begin{array}{l} 5,00000 \log. \text{ diff. } ^3) \\ 0,36222 \text{ num. perpetuus ad dimetiendam hyperb. supra inventus.} \\ \hline 5,36222 \log. \text{ spatij ABLG } 230260. \end{array} \right. \\
 100000 [\text{ad}] 230260 [\text{ut}] 33000 \text{ pedes cuj. log. } 4,51851 [\text{ad alt. quæf.}] \\
 \hline 5,00000 \\
 0,48149 \\
 f. \left\{ \begin{array}{l} 5,36222 \log. \text{ spatij ABLG} \\ 0,48149 \text{ diff. log. orum } 100000 \text{ et } 33000 \\ \hline 4,88073 \log. \text{ altitud. is pedum quæsitæ quæ erit } 75986 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Sed quia patet ad logar. 5,00000 addendum fuisse num. perpetuum 36222, et rursus à summa 5,36222 auferendum 0,48149 qui et ipse hic semper est idem, poterit brevitatis gratia in hac regula esse numerus perpetuus 0,11927, quæ scilicet est differentia duorum 0,48149 et 0,36222. adeo ut hoc modo tantum operatio instituat.

¹⁾ Puisqu'on a $AB : LG = LC : BC$; comparez le premier alinéa de la p. 485.

²⁾ On trouve cette règle à la p. 476. Remarquons toutefois qu'elle fait connaître le rapport de l'aire cherchée (ici celle de l'espace ABLG) au rectangle (AC) sur l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de l'hyperbole. On a donc dans le cas présent : $\log \text{ spat. ABLG} = \log (\log 10 - \log 1) + \log 100000 + \text{num. perp.}$. Consultez la note 2 de la p. 476.

³⁾ C'est-à-dire après avoir ajouté $\log ABCD = \log 100000 = 5$; voir la note 1 de la p. 476.

$$\begin{array}{l}
 f. \left\{ \begin{array}{l} 1,00000 \log. 10 \\ 0,00000 \log. 1 \end{array} \right. \\
 \hline
 1,00000 \text{ diff. log.} \\
 f. \left\{ \begin{array}{l} 5,00000 \log. \text{ diff.}^x \log. \text{orum } 3) \\ 0,11927 \text{ num. perp.} \end{array} \right. \\
 \hline
 4,88073 \log. \text{ altitud.}^{\text{is}} \text{ pedum quæsitæ quæ erit } 75986
 \end{array}$$

Exempl. 2.

Sit fursum pars aeris quæ se habeat ad totius altitudinis pondus ut 36789 ad 100000. Ea pars putetur NLCD. Cum sit ergo BC ad CL ut 100000 ad 36789, eadem erit et proportio GL ad AB.

$$\begin{array}{l}
 f. \left\{ \begin{array}{l} 5,00000 \log. 100000 \\ 4,56571 \log. 36789 \end{array} \right. \\
 \hline
 0,43429 \text{ diff. log.}^{\text{orum}} \\
 f. \left\{ \begin{array}{l} 4,63778 \log. \text{ diff.}^x \log. \text{orum } 3) \\ 0,11927 \text{ num. perp.} \end{array} \right. \\
 \hline
 4,51851 \log. 33000, \text{ altitud. pedum quæsitæ}
 \end{array}$$

Quando igitur in ea fumus altitudine, ubi finiret atmosphæra si aer ubique compressus esset ut ille in quo hic vivimus; tunc adhuc paulo plus tertia parte aeris supra caput habemus. Sed quæ tertia pars ad immensam porro altitudinem extendi queat. Hydrargyrus in tubo hic 11 pollices occupabit; quia ut 100000 ad 36789 ita 30 poll. ad 11.

Data loci altitudine supra terræ æquabilem superficiem, invenire quanta ibi gravitas seu portio aeris desuper incumbat, et ad quantam proinde altitudinem hydrargyrus in tubo Toricelliano consistet.

Sit altitudo data pedum 1,00000. Regula itaque est contraria præcedentis.

$$\begin{array}{l}
 \text{ad.} \left\{ \begin{array}{l} 5,00000 \log. 100000 \text{ altitud. datæ.} \\ 0,11927 \text{ num. perp.} \end{array} \right. \\
 \hline
 5,11927 \log. \text{ diff.}^x \log. \text{arithmorum} \\
 f. \left\{ \begin{array}{l} 1,31600 \text{ diff.}^a \log. \text{orum } 4) \\ \text{ex } 5,00000 \log.^\circ 100000 \text{ semper adhibendo} \end{array} \right. \\
 \hline
 3,68400 \log. 4831
 \end{array}$$

4) C'est-à-dire le nombre qui correspond au logarithme qu'on obtient en retranchant du nombre précédent $\log ABCD = 5$.

Proportio igitur aeris totius ad portionem desuper incumbentem est quæ
100000 ad 4831 hoc est fere 21 ad 1.

100000 [ad] 4831 [ut] 30 pollices [ad] $1\frac{45}{100}$ altitudo pollicum hydrargyri in tubo.

Sit data altitudo pedum 33000.

$$\begin{array}{l} \text{ad. } \left\{ \begin{array}{l} 4,51851 \text{ log. } 33000 \\ 0,11927 \text{ num. perp.} \\ \hline 4,63778 \text{ log. diff.}^x \text{ log.} \end{array} \right. \\ \text{f. } \left\{ \begin{array}{l} 0,43429 \text{ diff.}^a \text{ log.} \\ \text{ex } 5,00000 \text{ log. } 100000 \\ \hline 4,56571 \text{ log. } 36789 \end{array} \right. \end{array}$$

aer ergo totus ad aerem superextantem ut 100000 ad 36789.

Sit data alt.° pedum 380010.

$$\begin{array}{l} \text{a. } \left\{ \begin{array}{l} 5,57970 \text{ log } 380010 \\ 0,11927 \text{ num. perp.} \\ \hline 5,69897 \text{ log. diff. log.}^{\text{orum}} \end{array} \right. \\ \text{f. } \left\{ \begin{array}{l} 5,00000 \text{ diff.}^a \text{ log.} \\ 5,00000 \text{ log. } 100000 \\ \hline 0,00000 \text{ log. } 1. \end{array} \right. \end{array}$$

Hic ergo aer totus ad superextantem ut 100000 ad 1.

Sit data alt. pedum 100,00000.

$$\begin{array}{l} \text{ad. } \left\{ \begin{array}{l} 7,00000 \text{ log. } 100,00000 \\ 0,11927 \text{ num. perp.} \\ \hline 7,11927 \text{ log. diff. log.}^{\text{orum}} \\ 131,61000 \text{ diff. log.} \end{array} \right. \\ \text{ex. } \frac{5,00000}{1} \\ \hline \text{---} 126,61000 \text{ log. } 40739 \text{ cum } 122 \text{ zero} \end{array}$$

Hic aer totus ad superextantem ut 100000 ad $\frac{1}{40739 \text{ } 122 \text{ zero}}$ dixi 122 zero, nam quia characteristica logar.ⁱ est 126 debet eius numerus constare characteribus 127 quorum 5 primi sunt 40739. Præstaret autem in tantis altitudinibus uti logarithmis 10 characterum.

Sciendum est inventa altitudine loci ubi $\frac{1}{10}$ aeris adhuc supra est, velut in primo exemplo Problematis prioris ¹⁾, facile etiam inveniri altitudines ubi superextet $\frac{1}{100}$ vel $\frac{1}{1000}$ vel $\frac{1}{10000}$ atque ita porro. Altitudo enim pedum 75986 illic inventa, bis sumpta conveniet proportioni $\frac{1}{100}$ five 100 ad 1, ter sumpto vero conveniet proportioni $\frac{1}{1000}$ atque ita porro. Atque hoc in quavis proportionali progressionem locum habet ²⁾.

Sit data pars aeris sursum dimidia totius.

$$\begin{array}{r}
 0,30103 \text{ log. } 2 \\
 0,00000 \text{ log. } 1 \\
 \hline
 0,30103 \text{ diff. log. orum} \\
 \text{f. } \left\{ \begin{array}{l} 4,47860 \text{ log. diff. log. orum} \\ 0,11927 \text{ num perp.} \end{array} \right. \\
 \hline
 4,35933 \text{ log. } 22873 \text{ altit. pedum quæf.} \\
 \hline
 22873 \\
 45746 \text{ altit. quæf. ubi } \frac{1}{4} \text{ aeris superne incumbit.} \\
 \hline
 22873 \\
 68619 \text{ altit. quæf. ubi } \frac{1}{8} \text{ aeris supra.} \\
 \hline
 22873 \\
 91492 \text{ altit. quæf. ubi } \frac{1}{16} \text{ aeris supra et sic deinceps.}
 \end{array}$$

¹⁾ Voir les p. 486 et 487.

²⁾ C'est là, en effet, une conséquence immédiate de la règle, puisque, p. e. dans le cas où le rapport est $\frac{1}{1000}$, on doit remplacer dans le calcul du premier exemple (p. 487) le premier et le troisième des six nombres par 3,00000 et le quatrième par $5 + \log 3$ (voir la note 3 de la p. 486), de sorte que le sixième nombre est augmenté de $\log 3$ et que, par conséquent, la hauteur résultante est triplée.

Sit data alt.° pedum 100.

$$\begin{array}{lcl}
 & a. \left\{ \begin{array}{l} 2,00000 \log. 100 \\ 0,11927 \text{ num. perp.} \\ 2,11927 \log. \text{ diff.}^a \log. \text{ orum} \\ 132^1) \text{ diff.}^a \log. \text{ orum} \end{array} \right. & \\
 f. \left\{ \begin{array}{l} \text{ex } 5,00000 \log. 100000 \\ 4,99868 \log. 99697^2) \end{array} \right. & & \\
 & & \underline{30} \\
 & & 29,90910
 \end{array}$$

Ergo in turri pedum 100 altitudinis, descendet hydrargyrus in tubo Torricelij
 $\frac{1}{10}$ unc. pedis Londinensis.

¹⁾ 0,00132 est le nombre qui correspond au logarithme : 2,11927—5; comparez la note 4 de la p. 487.

²⁾ La quantité d'air qui se trouve au-dessus de la tour est donc à la quantité totale comme 99697 à 100000, et la hauteur de la colonne de mercure du baromètre, qui est censé être de 30 pouces au pied de la tour, devient donc au sommet : $\frac{99697}{100000} \times 30$ pouces.

APPENDICE I^o À LA PIÈCE N^o. IV.

[1668?]

De altitudine Atmosphaeræ et pressu aeris.

Compertum est Boilianis experimentis, spatia ab eadem quantitate aeris occupata in eodem vel duobus æqualibus tubis contrariam rationem fervare ponderum quibus premitur²⁾. Torricelliano autem experimento constat aerem hunc infimum premi a superiore pondere tanto quantum est altitudinis 30 unc. pedis Londinensis argenti vivi. Proportio autem gravitatis argenti vivi ad aquam est $13\frac{4}{7}$ ad 1; aquæ vero ad aerem a me reperta quæ 960 ad 1³⁾. Ad aerem scilicet sicut hic circa nos compressus est. Hinc altitudo 32640 pedum aeris ita compressi æquiponderaret uncijs 30 argenti vivi. Sumamus autem rotundum numerum 33000 pedum. Ex his igitur ista invenimus.

Definire ad quantam altitudinem ascendendum sit ut aeris pars data supra caput extet.

Sit data pars aeris decima⁴⁾.

¹⁾ Voir le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 483.

²⁾ Comparez la note 1 de la p. 484.

³⁾ Comparez sur les données qui précèdent les notes 2, 3 et 4 de la p. 483.

⁴⁾ Ce qui suit dans le Manuscrit ne diffère pas notablement du texte de la Pièce N^o. IV à commencer par le calcul qu'on trouve en haut de la p. 486 jusqu'aux mots „quorum 5 primi sunt 40739" (p. 489), excepté seulement qu'on n'y retrouve pas l'exemple où l'altitude donnée est égale à 33000 pieds. Nous croyons donc pouvoir supprimer cette partie du texte. Puis après Huygens fait suivre encore un calcul analogue au dernier calcul qu'on trouve à la p. 490, mais où la tour est supposée avoir 150 pieds de haut; calcul que nous supprimons également, puisqu'il ne présente rien de particulier.

Quum pes Londinensis sit ad pedem Parisiensem ut 100 ad 109 ¹⁾, altitudo autem hydrargyri maxima in tubo sit 30 unc. ped. Lond. eadem erit $27\frac{1}{2}$ ²⁾ unc. pedis Parisini.

Numerum perpetuum vero ad hunc calculum, si pedibus Parisiensibus uti velimus, invenio 15670 ³⁾.

Expertus est D. Perier ⁴⁾, in montibus Arvernorum, altitudinem hydrargyri in tubo circa radicem montis fuisse $\frac{26,35}{100}$ ⁵⁾ unc. pedis Parisi. Postquam vero ascendissent pedes 3000 circiter (nam non satis accurate captam fuisse mensuram fatetur) altitudo hydrargyri fuit $\frac{23,20}{100}$ ⁶⁾ unc. Quæ ad examen revocanda sint.

Quum ad radicem montis fuerit altit. hydrargyri $\frac{26,35}{100}$ unc. quæ in imo aere debet esse $\frac{27,50}{100}$ ⁷⁾ unc. patet hinc imam montis radicem aliquam habuisse altitudinem, quam primo invenimus. Fuit nempe pondus aeris supra verticem ad pondus aeris totius ut 26,35 ad 27,50. Quare operatio instituenda secundum regulam priorem, hoc modo.

$$\begin{array}{l} f. \left\{ \begin{array}{l} 3,43933 \text{ log. } 2750 \\ 3,42078 \text{ log. } 2635 \\ 0,01855 \text{ diff. log.} \end{array} \right. \\ f. \left\{ \begin{array}{l} 3,26834 \text{ log. diff. }^{\infty} \text{ log. orum} \\ 0,15670 \text{ num. perp. ad mensuram Paris.} \end{array} \right. \\ 3,11164 \text{ log. } 1308 \text{ }^8) \text{ pedes altitudinis ad radicem montis.} \end{array}$$

¹⁾ En 1668, le rapport des longueurs des pieds anglais et de Paris n'était connu que très imparfaitement. Ce ne fut qu'en 1675 que Huygens fut mieux renseigné sur ce point. Leur rapport est en effet de 100 à 106,5783; voir p. 462 du T. VII.

²⁾ Plutôt 28 avec le nouveau rapport.

³⁾ On trouve avec le rapport corrigé: 14694.

⁴⁾ Voir aux p. 351—358 du T. II des „Œuvres de Blaise Pascal” (citées dans la note 4 de la p. 196 du Tome présent) la „Lettre de Monsieur Perier à Monsieur Pascal le jeune, du 22 septembre 1648”, qui fut publiée dans le „Récit de la Grande Experience de l'Equilibre des Liqueurs” Paris, Charles Savreux, 1648, et jointe plus tard à l'ouvrage de 1663 cité dans la note 3 de la p. 252 de notre T. VII. Comparez la note 1 de la p. 365 du T. II des „Œuvres de Blaise Pascal”.

⁵⁾ Voir la p. 355 du T. II des „Œuvres”; mais lisez plutôt $26\frac{35}{120}$, puisqu'on y trouve pour la hauteur du mercure „26 poulces trois lignes et demie” et que chez Perier le pouce vaut 12 lignes, comme cela résulte des données mêmes communiquées dans sa lettre.

⁶⁾ Lisez: $23\frac{20}{120}$.

In altitudinem secundum æstimationem observatoris 3000 pedum, fuit portio aeris supra verticem ad aerem totum pondere, sicut 23,20 ad 27,50. Ergo

$$\begin{array}{l} \text{f. } \left\{ \begin{array}{l} 3,43933 \text{ log. } 27,50 \\ 3,36549 \text{ log. } 23,20 \\ 0,07384 \text{ diff. log.} \end{array} \right. \\ \text{f. } \left\{ \begin{array}{l} 3,86829 \text{ log. diff.} \\ 0,15670 \text{ num. perpet.} \end{array} \right. \end{array}$$

3,71159 log. 5148 p. altitudo vera loci supra æquabilem terræ superficiem. Sublatis autem 1308 ⁸⁾ pedibus supra inventis, qui altitudinem radicis montis designant ab his 5148 ⁹⁾ supersunt 3840 pedes, quæ fuit altitudo à radice montis ad locum observationis, quam ille taxavit 3000 pedibus.

In altitudine pedum 162 (27 toises), statio hydrargyri fuit eidem observatori eodem loco, $\frac{26,10}{100}$ unc. ¹⁰⁾.

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 3,43933 \text{ log. } 27,50 \\ 3,41664 \text{ log. } 26,10 \\ 0,02269 \text{ diff. log.} \end{array} \right. \\ \text{f. } \left\{ \begin{array}{l} 3,35583 \text{ log. diff.} \\ 0,15670 \text{ num. perpet.} \end{array} \right. \end{array}$$

3,19913 log. 1582 p. altitudo ab æquabili terræ superficie 1308 ⁸⁾ altit. ad radicem montis pedes 274 ¹¹⁾, qui ipsi fuere 162, quæ cum tanta sit differentia, oportet vel altitudinem hydrargyri *non satis bene annotatam fuisse*, vel aliud quid in causa fuisse ¹²⁾. hydrargyrum ipsum non fuisse ab aere recte repur-

7) Lisez : $27 \frac{50}{120}$.

8) Lisez : 1293.

9) Après application des corrections indiquées la règle donne 1949 pieds pour l'altitude au pied du Puy de Dôme et 5867 pour celle au sommet. En vérité ce sommet a 1465 mètres d'altitude, c'est-à-dire 4510 pieds de Paris. Consultez encore la note 1 de la p. 494.

10) Lisez : $26 \frac{10}{120}$.

11) La règle donne après correction 2196 — 1949 = 247.

12) Entre autres l'abaissement de la température de l'air avec l'augmentation de l'altitude. Il en résulte que la diminution de la pression de l'air, qui accompagne l'accroissement de l'altitude, est plus forte que la règle de Huygens ne le fait supposer. Par suite, la règle exagère les différences d'altitude.

gatum, unde in tubi parte vacua aeris non nihil refederet, dici non potest; quia si id fuerit minorem ex eo differentiam altitudinis hydrargyri fieri necesse fuit.

Vel alia debet esse proportio gravitatis aeris ad hydrarg. et aquam quam nostra illa 1 ad 960 ¹⁾).

Numerus perpetuus in proxime praecedentibus invenitur auferendo 0,36222, numerum perpetuum ad dimensionem hyperbolæ superius inventum ²⁾), à differentia inter logarithmum 100000 et logar.^m numeri pedum altitudinis columnæ aeris, æquiponderantis columnæ argenti vivi, quæ est in experimento Torricelli ³⁾).

¹⁾ En vérité ce rapport est à 10° C. environ de 1 à 801. Afin d'apporter cette correction, on doit donc diminuer les altitudes dans la raison de 960 à 801. On trouve alors 4895 pieds de Paris pour l'altitude du Puy de Dôme, calculée d'après la formule corrigée.

²⁾ Voir la p. 476.

³⁾ Comparez les pp. 486 et 492.

APPENDICE II ¹⁾ À LA PIÈCE N^o. IV.

1673.

[PREMIÈRE PARTIE ²⁾].

Jun. 1673.

$$\begin{array}{r} \frac{314}{330} [\infty] \frac{157}{165} \\ 2,21748 \text{ l. } 165^3) \\ \underline{2,19590 \text{ l. } 157} \\ 0,02158 \text{ diff. log. orum} \end{array}$$

¹⁾ L'Appendice fut écrit, en 1673, sur une partie, restée primitivement vide, de la p. 101 du Manuscrit B, laquelle page suit immédiatement celles dont nous avons emprunté la Pièce N^o. IV. Il contient l'application de la théorie de Huygens, exposée dans cette Pièce, à une expérience de Cassini qui avait trouvé qu'à une altitude de 1070 pieds le baromètre avait baissé de 16 lignes. Posant $27 \frac{1}{2}$ pouce = 330 lignes pour la hauteur du baromètre au niveau de la mer, on en déduit que la densité de l'air avait diminué dans la raison de 330 à 314.

Ajoutons qu'on trouve à la p. 38 du Manuscrit F des renseignements sur l'expérience de Cassini. D'après la date où ce Manuscrit fut mis en usage, il est presque certain que ces renseignements plus précis ne furent reçus par Huygens que vers 1680 :

de M. Cassini, Nostredame de la garde montagne à Toulon a de hauteur

1070 pieds. au haut le mercure du barometre avait 27 pouces $\frac{1}{3}$ de ligne. au

bas 28 po. $4\frac{2}{3}$ de ligne. la difference est donc 1 p. $4\frac{1}{3}$ de ligne. la pente de la montagne 41 degr. l'horizon sous le niveau 32' 30".

²⁾ Dans cette première partie Huygens commence par calculer, en appliquant sa théorie, la hauteur fictive de l'atmosphère si la densité était partout égale à celle au niveau de la mer, telle qu'elle résulte de l'expérience de Cassini; ensuite il en déduit quel rapport de la densité de l'air à celle de l'eau correspondrait à cette hauteur.

³⁾ Comparez, pour le calcul qui suit l'algorithme de la p. 486.

3,33405 log. diff.	3,02938 l. 1070 pedum quæ altitudo æris fecit
0,36222 log. perpet.	Cassino 16 linearum diff. ^m in hydrarg.
3,69627 log spatij.	3,69627
0,66689 ¹⁾ diff. log. inter 100000	0,66689
et 21565 ²⁾ ped.	log. pedum altitudinis aeris æqualiter
3,02938 l. 1070 ped. parisi.	pressi ut hic prope terram, quæ alti-
	tudo æquiponderat $27\frac{1}{2}$ poll. hydrarg.
0,36222	5,00000
0,66689	4,33311 l. 21565 ²⁾ pedes ³⁾ .
0,30467 log. perpetuus ad altitudinem atmosphææ ⁴⁾ .	

27,3 $\frac{1}{2}$ ⁵⁾ l. 6)	21565
	12
14	43130
108	21565
27	258780 ⁷⁾
42	
7	
427	

606 ad 1⁸⁾) proportio gravitatis aquæ ad aerem posita proportionem hydrargyri ad aquam quæ 14 ad 1. Et posito item Cassini experimento ubi 1070 pedes altitudinis dabant differentiam altitudinis hydrargyri in tubo Torricelliano linearum 16.

¹⁾ Voir le calcul à côté. D'après l'algorithme mentionné dans la note précédente on doit soustraire du „log spatij” la différence entre les logarithmes de 100000 et du nombre qui indique la hauteur de l'atmosphère fictive d'égale densité, afin de trouver le logarithme de l'altitude du lieu en question. Or, pour faire concorder l'expérience de Cassini et la théorie de Huygens, il faut que le résultat soit égal au logarithme de 1070. Ce résultat peut donc servir maintenant à calculer la hauteur de l'atmosphère fictive exprimée en pieds de Paris.

²⁾ Lisez: 21533.

³⁾ Comme l'on voit ce nombre diffère beaucoup de celui: $\frac{100}{109} \times 33000 = 30275$ qui résulte des suppositions faites dans la partie de l'Appendice I qu'on trouve aux p. 492—494.

⁴⁾ Comparez le „num. perp. ad mensuram Paris.” de la p. 492.

⁵⁾ Partant de la hauteur de la colonne barométrique au niveau de la mer, Huygens calcule ici la hauteur, en pouces de Paris, d'une colonne d'eau de pesanteur égale. Nous ne savons pas d'ailleurs pourquoi Huygens a remplacé les $27\frac{1}{2}$ pouces, mentionnés plus haut, par 27,35 pouces.

⁶⁾ Le nombre $3\frac{1}{2}$ indique évidemment le nombre des lignes, supposées égales chacune à la dixième partie d'un pouce; comparez la note 5 de la p. 492.

[DEUXIÈME PARTIE] ⁹⁾.

28 toises altitudo data.

6

2,22531 ¹⁰⁾ l. 168 pedes

0,30467 log. perpet.

2,52998 log. diff. æ logg.

0,00339 diff. log.

5,00000

4,99661 l. 99220

100000

100000 [ad] 0780 [ut] 330 lineæ ¹¹⁾ [ad] 2 $\frac{57}{100}$ lin.

⁷⁾ Hauteur de l'atmosphère fictive en pouces de Paris.

⁸⁾ Ce rapport est trouvé en divisant 258780 par 427. Consultez sur sa véritable valeur la note 1 de la p. 494. En effet la théorie de Huygens devait amener une densité trop grande de l'air.

⁹⁾ Dans cette Partie Huygens calcule, d'après les données obtenues dans la Partie précédente, l'abaissement du baromètre à une altitude de 28 toises. Peut-être se proposait-il de faire vérifier ce résultat expérimentalement.

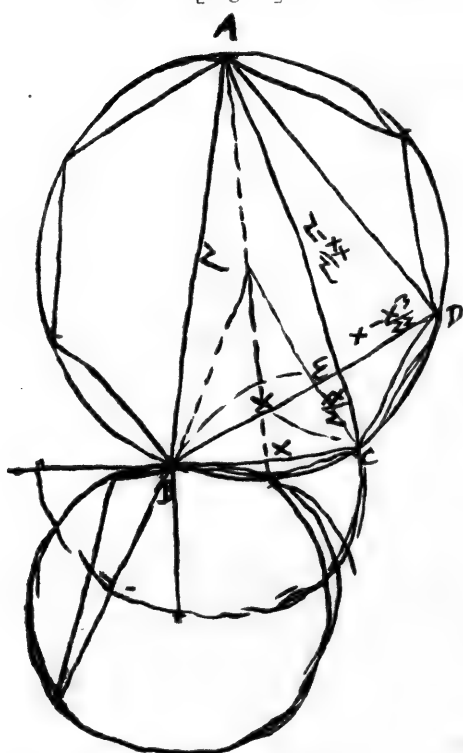
¹⁰⁾ Comparez cet algorithme à celui au bas de la p. 487.

¹¹⁾ En pouces : $27\frac{1}{2}$; hauteur supposée du baromètre au niveau de la mer.

V.

[1662]¹⁾.

[Fig. 1.]



heptagonum circulo inscribere.

$$[AB]z [ad BC]x [ut AE] z - \frac{xx}{z}$$

$$[ad ED] x - \frac{x^3}{z} {}^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x BE \propto BC \\ x - \frac{x^3}{zz} ED \end{array} \right\} a[dde]$$

$$BD 2x - \frac{x^3}{zz} \propto z - \frac{xx}{z} AD \propto AE$$

$$2zzx - x^3 \propto z^3 - zxx$$

$$0 \propto z^3 - 2zzx - zxx + x^3$$

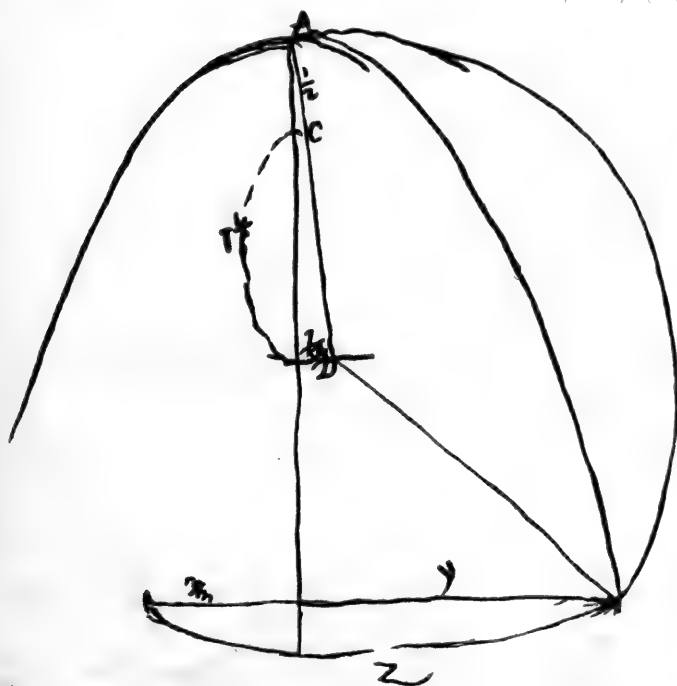
$$\text{fit } x \propto 1; 0 \propto z^3 - 2zz - z + 1 {}^3)$$

¹⁾ À cause du lieu occupé par la Pièce, p. 112 du Manuscrit B.

²⁾ La proportion s'ensuit de la similitude des triangles isocèles ABC et AED; on a $AE = z - \frac{x^2}{z}$,
puisque $EC = \frac{x^2}{z}$ à cause des triangles semblables BEC et ABC.

³⁾ La construction de l'heptagone régulier est donc réduite à la solution d'une équation cubique, dont il faut choisir la racine positive plus grande que l'unité. Pour indiquer la signification des autres racines, soit d la longueur de la diagonale qui sous-tend p côtés

[Fig. 2.]



$$\text{fit } y + \frac{2}{3} \infty z^4)$$

$$y + \frac{2}{3}$$

$$yy + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$$

$$y + \frac{2}{3}$$

$$y^3 + 2yy + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} [\infty z^3]$$

$$- 2yy - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} [\infty - 2zz]$$

$$- y - \frac{2}{3} [\infty - z]$$

$$+ 1$$

$$y^3 - \frac{7}{3}y - \frac{7}{27}^5) \infty 0$$

de l'heptagone (de sorte qu'on a $d_4 = d_3$, $d_5 = d_2$, etc.); alors les trois racines de l'équation sont égales à $\frac{d_3}{d_1}$, à $\frac{d_1}{d_2}$ et à $-\frac{d_2}{d_3}$.

Ajoutons que quelques années auparavant van Schooten s'était occupé, non sans succès, de la détermination des équations algébriques dont dépend la construction des polygones réguliers. Il appliqua à cette détermination plusieurs méthodes qui, toutefois, pour l'heptagone et pour les cas plus compliqués, amènent des équations d'un trop haut degré, qu'il réussit à simplifier en écartant les facteurs inutiles. Ainsi dans le cas de l'heptagone il trouve, comme de juste, $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$ et dans celui du tétradécagone $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$, où x représente chaque fois le rapport du côté au rayon du cercle circonscrit (voir les p. 464—475 de l'ouvrage de 1657 de van Schooten dont nous avons reproduit le titre général et celui du „Liber V” aux pp. 50 et 52 du Tome présent, ou bien les p. 433—443 de l'édition hollandaise sur laquelle on peut consulter les pp. 51 et 53 du même Tome).

D'ailleurs, puisque l'angle BAC de la Fig. 1 est égal à l'angle central que sous-tend le côté du tétradécagone, il est clair que le rapport AB:BC, cherché par Huygens, est le réciproque du rapport du côté du tétradécagone au rayon du cercle circonscrit.

On sait que ce fut Gauss qui, le premier, apprit à indiquer d'avance le degré des équations dont dépend la construction d'un polygone régulier d'un nombre donné de côtés; voir la „Sectio septima: De aequationibus circuli sectiones definientibus” de ses „Disquisitiones arithmeticae” de 1801 (p. 412—474 du T. I, 1863, de ses œuvres complètes: „Carl Friedrich Gauss Werke. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen”).

4) Réduction de l'équation à une équation sans second terme.

5) Après avoir trouvé l'équation réduite, Huygens applique dans la Fig. 2 les règles données par

$$\begin{aligned}
 z^3 - 2zxz - zx^2 + x^3 &\propto 0 \\
 zz &\propto 2zx + xx - \frac{x^3}{z} \\
 xy &\propto zz \propto 2zx + xx - \frac{x^3}{z} \propto xy \\
 &\quad \frac{2zz + zx - xx}{z} \propto zy \\
 xx - zz &\propto yy; \quad \frac{x^3}{z} - 2zx \propto yy
 \end{aligned}$$

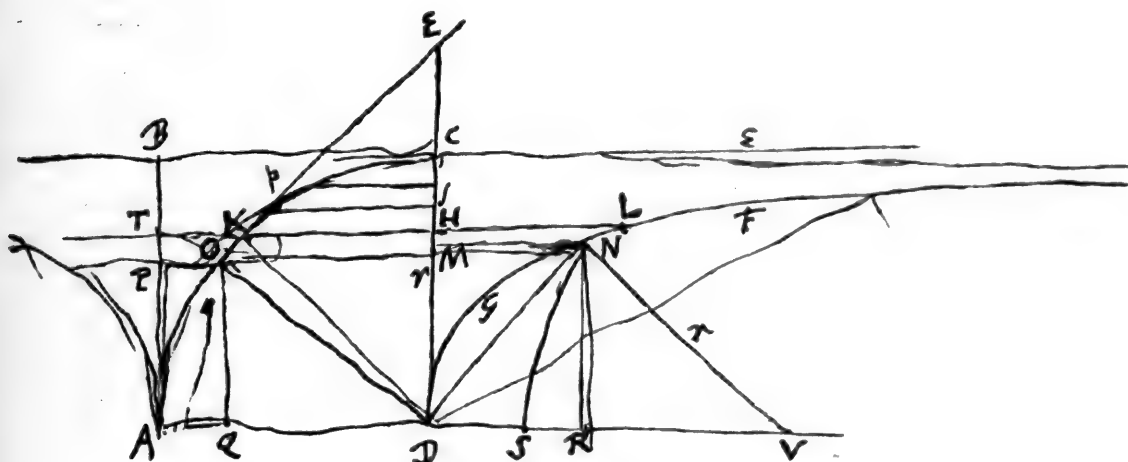
Descartes dans sa „Géométrie” (voir les p. 470—473 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) pour la construction des racines d'une équation cubique par les intersections d'une parabole et d'un cercle passant par son sommet.

- ¹⁾ Nous n'avons pas voulu supprimer les petits calculs qui suivent. Huygens y cherche à réduire la résolution de l'équation cubique, trouvée plus haut, à la détermination des intersections d'autres courbes, qu'on obtient en supposant connues dans les équations qui suivent, x, y ou z . Ajoutons encore que la construction au bas de la Fig. 1 nous est incompréhensible.

VI^o.

1662.

[*Quadrature de la courbe de Gutshoven et cubature d'un de ses solides de révolution.*]



DGN curva a Slufio mihi proposita¹⁾ ad inveniendam tangentem³⁾, illi vero a Gutiscovio. proprietas ejus, ut angulo DNV recto existente sit NV semper æqualis eidem lineæ DC.

Sive posita $DR \propto x$. $RN \propto y$, ut sit $\frac{y^4}{dd-yy} \propto xx$ ⁴⁾. DC est perpendic. axi DV. DCOA quadrans circuli. CE⁵⁾ parall. DV, asymptotos curvæ DGN.

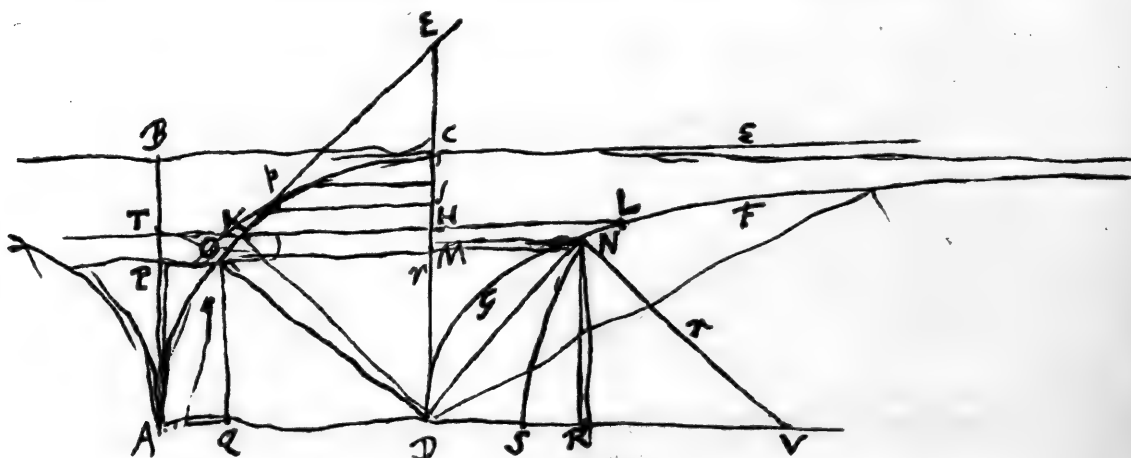
¹⁾ La Pièce est empruntée aux p. 125—126 du Manuscrit B.

²⁾ Voir sa lettre du 18 août 1662, p. 207 du T. IV.

³⁾ Voir sur la détermination de cette tangente le § 1 (p. 504—505) de la Pièce N^o. VII qui suit.

⁴⁾ On a en effet: $DN^2(x^2 + y^2) : DR^2(x^2) = NV^2(d^2) : NR^2(y^2)$, où $d = NV = DC$.

⁵⁾ Remarquez le double emploi de la lettre E dans la figure.



NMO, LHK sunt rectæ. fit $NO \propto DV$; et $MO \propto RV$. Sicut ergo proportionales sunt RV, VN, VD ita quoque MO, OD, ON. Sicut ergo MO ad OD, hoc est ME ad EO, hoc est MH ad KO, ita OD sive MP ad ON. Unde facile ostenditur quod sicut omnes MH ad omnes KO, hoc est sicut DC ad arcum COA ita omnia \square la MHTP ad omnia KONL, hoc est, ita quadr. AC ad figuram infinitam AOCEFND¹⁾. Ex quo fundamento est calculus in fine pag. præced.²⁾.

Facile autem apparet et solidum a dicto spatio infinito sese habere ad solidum à quadrato AC, utroque circa ADV converfo, sicut superficies a conversione arcus AOC ad superf. à conversione rectæ DC. quorum ratio est dupla per ea quæ demonstravit Archim. lib. de sphær. et cyl.³⁾. Est autem solidum a conversione quadrantis DCA ad solidum a quadr[ato] AC ut 2 ad 3. Itaque hinc deducitur, solidum à spatio reliquo infinito DGFEC esse solidi a \square AC sesquitertium, ac proinde æquale sphæræ cujus radius DC⁴⁾. Ita fit calix infinitæ capacitatis et extensionis, at definiti ponderis, sicut et in Cissoide⁵⁾.

¹⁾ On a $MH:KO = MP \times MH:ON \times MH$. Or, dans le cas présent la conclusion $\Sigma MH:\Sigma KO = \Sigma MP \times MH:\Sigma ON \times MH$ est permise, comme on peut le vérifier aisément, puisque le rapport du premier au troisième terme de la proportion en question est une quantité constante.

²⁾ Voir les calculs qui suivent.

³⁾ Voir la „Prop. XXXI, Lib. I”, p. 31 de l’édition de Bâle (mentionnée dans la note 3, p. 274 du T. XI) „Cuiuslibet sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur”. Elle correspond à la Prop. XXXIII, p. 137 du T. I de l’édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du T. XI.

⁴⁾ Ce résultat fut communiqué à de Sluse dans une lettre du 25 septembre 1662; voir les p. 237—239 du T. IV.

⁵⁾ Comparez la note 17 de la p. 199 du Tome présent.

$$\begin{array}{l}
 q \propto \text{arc. AOC}; r \propto \text{DC.} \\
 \square ABCD \text{ [ad] spat. ACEFDA [ut] } r \text{ [ad] } q \\
 r \text{ [ad] } q \text{ [ut] } rr \text{ [ad] } \left\{ \begin{array}{l} rq \propto \text{spat. ACEFDA} \\ \text{f. } \frac{1}{2} rq \propto \text{quadrans ACD} \end{array} \right. \\
 \hline
 \frac{1}{2} rq \propto \text{spat. infin. DCEF}
 \end{array}$$

Ergo quadrans circuli DAC æqualis spatio infinito DCEF.

$$\begin{array}{l}
 \text{arc. OC } p, \text{ CM } \propto s. \\
 s \text{ [ad] } p \text{ [ut] } \square MB (rs) \text{ [ad] } \left\{ \begin{array}{l} pr \text{ spat. OCEFNO} \\ \text{f. } \frac{1}{2} pr - \triangle OMD \propto \text{OCM} \end{array} \right. \\
 \hline
 \frac{1}{2} pr + \triangle OMD \propto \text{spat. CEFNM.}
 \end{array}$$

hoc est sector DOC + $\triangle ODQ \propto$ spat. CEFNM. Ergo sp. NGDM æquale segmento OQA five NRS ⁴⁾).

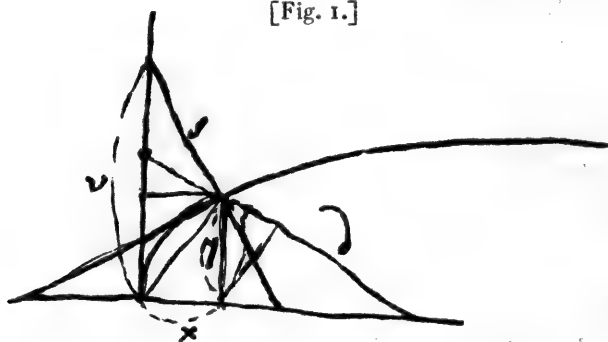
15 Sept. 1662.

VII¹⁾.

[1662.]

[Recherches de 1662 sur la détermination des tangentes des courbes algébriques.]

[Fig. 1.]



§ 1²⁾.

$$\frac{y^4}{dd-yy} \infty xx^3)$$

$$vv - 2vy + yy + \frac{y^4}{dd-yy} \infty ss^4)$$

$$\frac{ddvv - 2ddvy + ddy - vvy + 2vy^3}{dd-yy} [\infty ss]$$

$$- 2d^4vy + 2d^4yy - 2ddvvy + 6ddvy^3^5)$$

$$+ 2ddvvy - 2ddvy^3 - 2vy^5 [\infty 0]$$

$$- 2d^4v + 2d^4y + 4ddvvy - 2vy^4 \infty 0$$

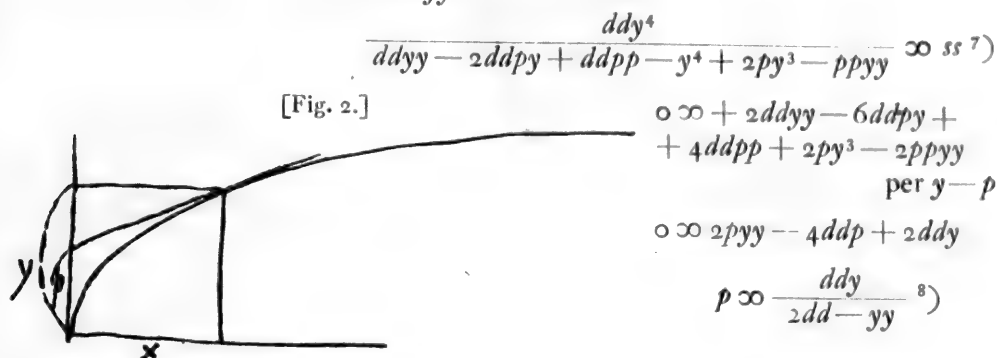
$$\frac{d^4y}{d^4 - 2ddyy + y^4} \infty v$$

¹⁾ La Pièce est empruntée aux pp. 125—139 du Manuscrit B; nous l'avons divisée en paragraphes. D'après le lieu qu'elle occupe au Manuscrit B, elle doit dater de 1662. Consultez encore la note 8.

²⁾ Ce paragraphe contient la détermination de la tangente à la courbe de Gutschoven de deux manières différentes.

³⁾ Équation de la courbe de Gutschoven; comparez le deuxième alinéa de la Pièce N°. VI. p. 501.

$$yy - 2yp + pp \text{ [Fig. 2] [ad] } \frac{y^4}{dd - yy} \text{ [ut] } dd^6 \text{ [ad]}$$



4) s représente donc la longueur d'un segment de la normale depuis le point sur la courbe jusqu'à l'intersection avec l'axe des y . Or, si l'on fixe ce point d'intersection, dont la distance à l'origine est désignée par y et qu'on déplace l'autre extrémité du segment le long de la courbe, il faut que la longueur du segment soit stationnaire (c'est-à-dire en général maximum ou minimum) lorsque le segment reprend sa position primitive. Il s'agit donc dès ici de trouver la valeur de y qui rend maximum ou minimum l'expression pour ss . A cet effet Huygens emploie la méthode de Hudde, exposée dans son „Epistola secunda de Maximis et Minimis” (voir la note 5 de la p. 360 du T. II), pour déterminer le maximum ou minimum d'une fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\sum A_p x^p}{\sum B_q x^q}$ par la résolution de l'équation $\sum \mathcal{S}(p-q) A_p B_q x^{p+q} = 0$; équation qu'on déduit facilement de la relation (en notation moderne) $x\varphi'(x)\psi(x) - x\varphi(x)\psi'(x) = 0$.

5) Cette première ligne contient les termes pour lesquels $q = 0$, celle qui suit ceux qui correspondent à $q = 2$; voir la note précédente.

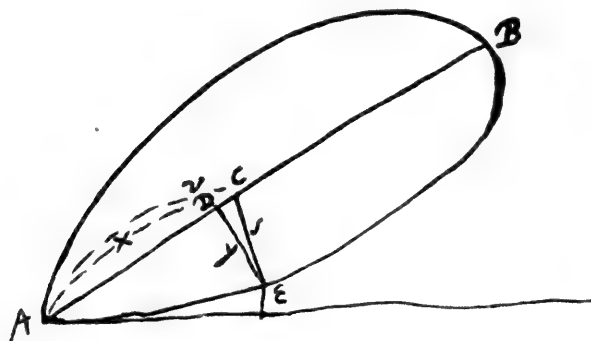
6) Au lieu de dd Huygens aurait pu choisir (voir la note 7 qui suit) le carré de toute autre ligne de longueur constante; il ne choisit d que parce qu'elle représente la seule ligne de cette nature qui entre dans l'équation de la courbe de Gutschoven.

7) s est donc proportionnel au quotient $\frac{x}{y-p}$. Or, il est évident que lorsqu'on déplace, le long de la courbe, le point où elle est touchée par la tangente, sans changer la longueur p , ce quotient sera stationnaire et dans le cas présent un minimum. Par suite, on peut appliquer la méthode de Hudde à l'expression pour ss . Divisant en même temps par ddy^4 , Huygens obtient de cette manière l'équation qui suit, dont il écarte ensuite le facteur $y-p$.

8) C'est probablement à propos des deux méthodes de ce paragraphe que Huygens écrivit à de Sluse dans la lettre du 25 septembre 1662, mentionnée dans la note 4 de la p. 502: „Nam illiusquidem curvæ Gutschovianæ quam proponis tangentem nullo negotio investigavi variis modis calculoque brevissimo, qui vix duos hujusmodi versiculos occupet”.

Ajoutons que, auparavant, Huygens avait essayé, p. 113 du Manuscrit B, une méthode analogue à la deuxième avec cette différence que pour la quantité qui doit être minimum il choisit la longueur du segment z situé sur l'axe des x entre l'origine des coordonnées et le

[Fig. 3.]

§ 2¹).

$$a[dd]e \left\{ \begin{array}{l} \frac{bxx - 2x^3}{b + 6x} \propto yy \\ vv - 2vx + xx \end{array} \right.$$

$$[vv +] \frac{2bxx - 2bvx - 12vxx + 4x^3}{b + 6x} \propto ss^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4bxx - 2bvx - 24vxx + 12x^3 \text{ in } b \\ 12bxx - 72vxx + 48x^3 \text{ in } x \end{array} \right\} \propto 0$$

$$4bbx - 2bbv - 24vbx + 24bxx - 72vxx + 48x^3 [\propto 0]$$

$$\frac{24x^3 + 12bxx + 2bbx}{36xx + 12bx + bb} \propto v \text{ bon.}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{\frac{2}{3}bx}{6x + b} + \frac{\frac{2}{3}bbx}{qu.6x + b} \propto v$$

$$\text{cum } v \propto x^3), 12x^2 \propto bb, x \propto \sqrt{\frac{1}{12}bb}$$

point d'intersection avec la tangente. Employant au reste les notations de la Fig. 2 (différentes de celles de la page citée du Manuscrit), on a donc

$$z:p = z + \frac{yy}{\sqrt{dd - yy}} : y,$$

d'où Huygens déduit:

$$zz = \frac{ppy^4}{ddy - 2pydd + pdd - y^4 + 2py^3 - p^2y^2}.$$

A cette fraction il applique ensuite la méthode de Hudde; ce qui donne l'équation quadratique en p :

[Fig. 4.]



$$\begin{aligned}
 & zz + 2zx + xx \text{ [ad]} \frac{bx^2 - 2x^3}{b + 6x} \text{ [ut]} bb \text{ [ad]} \\
 & \frac{b^3xx - 2bbx^3}{bzz + 2bzx + bxx + 6zzx + 12zxx + 6x^3} \infty ss^4) \\
 & \frac{2bbzz + 2bbzx + 6bzzx - 6bx^3}{-6bzzx - 8bzx^2 - 2bx^3 - 24zzxx - 24zx^3} \infty o^5) \\
 & \frac{bbzz + bbzx - 4bx^3 - 4bzx^2 - 12zzxx -}{-12zx^3} \infty o \text{ per } x + z
 \end{aligned}$$

$$o \infty bbz - 4bxx - 12zxx \infty o$$

$$z \infty \frac{4bxx}{bb - 12xx} \text{ bon. } z \infty \frac{bx^2}{\frac{1}{4}bb - 3xx}$$

$$ddy - 3pdy + 2ppd + py^3 - ppy = 0.$$

Après avoir obtenu cette équation Huygens ne continue pas le calcul. Il semble ne pas avoir aperçu que l'équation est divisible par $y - p$. Or, après l'écartement de ce facteur on arrive à la valeur de p indiquée dans le texte.

- ¹⁾ Ce paragraphe contient la détermination de la tangente au folium de Descartes de trois manières différentes. En effet, l'équation $\frac{bx^2 - 2x^3}{b + 6x} = y^2$, qui suit, correspond à l'équation

$$x^3 + y^3 - \frac{1}{2}\sqrt{2} bxy = 0, \text{ pour laquelle les tangentes au point A sont les axes des coordonnées. Or, dans cette dernière équation on reconnaît celle du folium de Descartes. Ainsi dans sa lettre à de Sluse, déjà citée dans les notes 4 de la p. 502 et 8 de la p. 505 Huygens pouvait écrire à propos du folium: „Hujus tangentem in dato puncto ego quidem non nisi mediocriter prolixo calculo inveni (ex hac nempe æquatione, nam potest alioqui ad aliam multo commodiorem res deduci)”. Ajoutons que le „calcul prolixo” était probablement celui du § 3, ou du § 4.}$$

²⁾ Cette première méthode est identique à la première du § 1, p. 504. Huygens va donc appliquer l'algorithme de Hudde (voir la note 4 de la p. 505) pour trouver le minimum ou maximum de ss . Dans ce calcul il n'a pas besoin de s'occuper du terme yy , puisque y est considéré comme une constante.

³⁾ Détermination du lieu de largeur maximum de la boucle. Comparez les p. 301 et 302 du Tome présent.

⁴⁾ s est donc proportionnel à $\frac{y}{x+z}$; sa valeur doit donc être un maximum lorsqu'on déplace le point de contact le long de la courbe en fixant la valeur de z .

⁵⁾ Application de l'algorithme de Hudde accompagné de la division de tous les termes par b^2x^2 . La première ligne correspond au premier terme du dénominateur, l'autre au deuxième terme.

$$zz - 2zx + xx \text{ [ad]} \frac{bxx - 2x^3}{b + 6x} \text{ [ut]} bb \text{ [ad]}$$

[Fig. 5.]



$$\begin{array}{r} b^3xx - 2bbx^3 \text{ } ^1) \\ \hline bzz - 2bzx + bxx + 6zzx - 12zxx + 6x^3 \\ b \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \text{ } ^2) \\ 2x \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \text{ } ^3) \\ \hline 2bbzz - 2bbzx + 6bzzx - 6bx^3 \\ - 6bzzx + 8bzx^2 - 2bx^3 - 24zxx^2 + 24zx^3 \\ \hline bbz + 4bxx - 12zxx \text{ } ^4) \\ \hline 4bxx \\ 12xx - bb \propto z \propto \frac{bxx}{3xx - \frac{1}{4}bb} \end{array}$$

¹⁾ Fraction qu'il s'agit de rendre maximum à l'aide de l'algorithme de Hudde.

²⁾ Cette ligne donne les coefficients $p-q$ (voir la note 4 de la p. 505) par lesquels on doit multiplier tous les termes qui correspondent au premier terme du numérateur. D'ailleurs, puisque Huygens se propose de diviser tous les termes par $bbxx$ on doit multiplier ceux du dénominateur par $(p-q)b$ et non par $(p-q)b^3xx$ comme l'algorithme de Hudde l'exige.

³⁾ On doit pour la même raison multiplier les termes correspondant à $-2bbx^3$ par $-2(p-q)x$; c'est pourquoi Huygens change les signes des termes du dénominateur en même temps qu'il les multiplie par $2(p-q)x$.

⁴⁾ Cette équation est obtenue après division de l'expression qui précède par $2(z-x)$.

⁵⁾ Ce paragraphe et le suivant nous montrent qu'avant de trouver, dans le cas d'une courbe algébrique quelconque, la règle exposée dans la lettre à de Witt du 25 février 1663 (voir les p. 312-317 du T. IV), Huygens s'est occupé d'autres méthodes très curieuses pour déterminer les tangentes d'une telle courbe. Afin de faire connaître la portée de ces méthodes, nous croyons utile de les appliquer au cas général d'une courbe algébrique $f_\mu(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = 0$ du degré μ . Commençons donc par la méthode utilisée dans le présent paragraphe et remarquons d'abord que la forme du triangle ECD (Fig. 6) est définie par les rapports entre ses côtés, en posant $v : c = y : n = q : b$, où l'une des trois grandeurs c, n, b peut être choisie égale à une constante arbitraire, p. e. à la constante n de l'équation de la courbe.

On a alors $x = z + \frac{bv}{c}$; $y = \frac{nv}{c}$; où $z = AE$.

Or, la substitution de ces expressions pour x et y dans l'équation de la courbe, donne:

$$(1) \quad f_\mu\left(z + \frac{bv}{c}, \frac{nv}{c}\right) = \varphi_\mu(z, v) = \sum_{\gamma} B_\gamma z^\gamma v^\delta = 0.$$

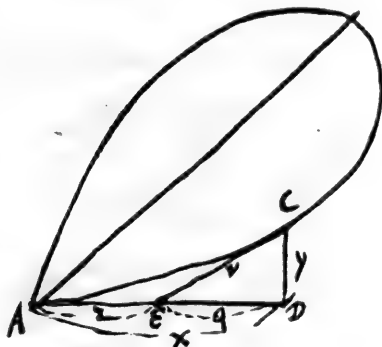
Si maintenant nous supposons un instant que les valeurs de z, c, n et b soient données et invariables, et que v soit l'inconnue de l'équation (1), les solutions de cette équation correspondront aux points d'intersection de la droite EC avec la courbe $f_\mu(x, y) = 0$; mais puisqu'il faut qu'au point C correspondent deux racines égales de l'équation en v , on aura:

$$(2) \quad \sum \delta_\gamma B_\gamma z^\gamma v^\delta = 0.$$

Cela explique le premier algorithme, représenté dans le texte par les nombres 0, 1, 2, 3, 3, 1, 2, qui amènent l'équation $0 \propto 3bzzvcc - nnzccv + \text{etc.}$

Pour expliquer le deuxième algorithme, représenté par les nombres 3, 2, 1, 0, 0, 2, 1,

[Fig. 6.]

§ 3⁵).

$$x^3 + y^3 - xyn \propto 0^6)$$

$$n [\text{ad}] b [\text{ut}] y [\text{ad}] \frac{by}{n} DE [\propto q]$$

$$n [\text{ad}] c [\text{ut}] y [\text{ad}] \frac{cy}{n} CE \propto y; y \propto \frac{ny}{c}$$

$$x - \frac{by}{n} \propto z AE; x \propto z + \frac{by}{n} \propto z + \frac{bv}{c}$$

$$0 \propto z^3 + \frac{3bzzv}{c} + \frac{3bbzvv}{cc} + \frac{b^3v^3}{c^3} + \frac{n^3v^3}{c^3} - \frac{nnzv}{c} - \frac{bnnvv}{cc}^7)$$

0	1	2	3	3	1	2
3	2	1	0	0	2	1

0⁸)

$$0 \propto 3bzzvcc - nnzccv + 6bbczvv - 2bnnccv + 3b^3v^3 + 3n^3v^3^9)$$

$$0 \propto (3n^3 + 3b^3)vv + (6bbcz - 2bnn) v + 3bzzcc - nnzcc \text{ in } z$$

$$0 \propto 3z^3 + \frac{6bzzv}{c} + \frac{3bbzvv}{cc} - \frac{2nnzv}{c} - \frac{bnnvv}{cc}^{10)}$$

$$0 \propto (+3bbz - bnn)vv + (6bzzc - 2nnzc)v + 3ccz^3 \text{ in } b$$

$$-bnnvv \propto 3n^3zvv - nnzcc^{11}); \text{ restitue } cc \propto \frac{nnyv}{yy}$$

$$-bbvv \propto 3 \frac{nnyvzz}{yy}$$

il suffit de remarquer que des équations (1) et (2) on déduit facilement:

$$(3) \quad \Sigma (\mu - \delta) \gamma B_\delta z^\gamma v^\delta = 0.$$

C'est cet algorithme qui conduit dans le texte à l'équation $0 \propto 3z^3 + \frac{6bzzv}{c} + \text{etc.}$

⁶) Équation du folium de Descartes; comparez la p. 301.

⁷) C'est l'équation qui correspond à l'équation (1) de la note 5.

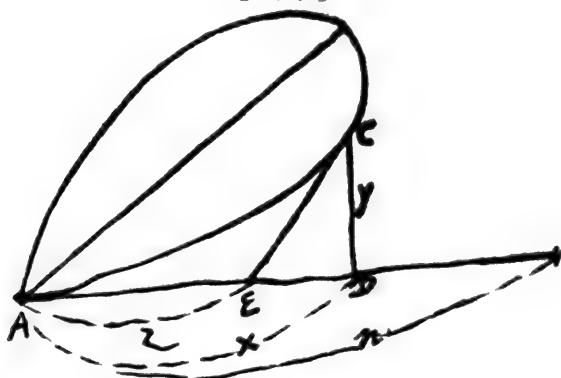
⁸) La signification de ce zéro nous échappe.

⁹) C'est l'équation qui correspond à l'équation (2) de la note 5; mais elle a été multipliée par c^3 .

¹⁰) C'est l'équation qui correspond à l'équation (3) de la note 5.

¹¹) On obtient cette équation en posant le deuxième membre de l'équation précédente, multiplié

[Fig. 7.]

§ 4²).

$$x^3 + y^3 - xyn \propto 0$$

$$x - z \text{ [ad]} y \text{ [ut]} n \text{ [ad]} \frac{ny}{x-z} \propto$$

²) Dans ce paragraphe une méthode différente de celle du § 3 est appliquée, d'abord au folium de Descartes, ensuite à la courbe de Gutschoven. Ainsi que nous l'avons fait dans les notes 5 de la p. 508 et 11 de la p. 509

pour la méthode précédente, nous appliquerons cette nouvelle méthode à son tour au cas d'une courbe algébrique quelconque $f_{\mu}(x, y) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} x^{\alpha} y^{\beta} = 0$.

Posant $ED(x-z) : CD(y) = n : s$, on a ici $y = \frac{sx - sz}{n}$, et par suite :

$$(1) \quad f_{\mu}\left(x, \frac{sx - sz}{n}\right) = \psi_{\mu}(x, z) = \sum_{\gamma} C_{\gamma} z^{\gamma} x^{\delta} = 0.$$

Si l'on ne change pas les valeurs de z , ni de s , de sorte que la forme du triangle CED et la situation du point E ne varient pas, il est clair qu'en changeant la valeur de x , on verra le point C se déplacer le long de la tangente et que les racines de l'équation $\sum_{\gamma} C_{\gamma} z^{\gamma} x^{\delta} = 0$ correspondront aux points d'intersection de cette tangente avec la courbe. Or, puisque le point de contact de la tangente doit correspondre à une racine double, on aura :

$$(2) \quad \sum_{\gamma} \gamma C_{\gamma} z^{\gamma} x^{\gamma-1} = 0.$$

Cela explique le deuxième algorithme (p. 512), qui conduit à l'équation qui, plus bas, est multipliée par z . De même l'équation :

$$(3) \quad \sum (\mu - \gamma) C_{\gamma} z^{\gamma} x^{\gamma} = 0$$

explique le premier algorithme.

De cette façon l'équation $sxz + 3x^3z + sx^3 = 0$ du texte est remplacée dans le cas général par :

$$(4) \quad z \sum_{\gamma} \gamma C_{\gamma} z^{\gamma-1} x^{\gamma} + x \sum (\mu - \gamma) C_{\gamma} z^{\gamma} x^{\gamma-1} = 0$$

ou bien :

$$(z-x)x \frac{df\left(x, \frac{sx-sz}{n}\right)}{dx} + \mu x f\left(x, \frac{sx-sz}{n}\right) = -qz \left(\frac{df}{dx} + \frac{s}{n} \frac{df}{dy} \right) + \mu x f(x, y) = 0,$$

d'où résulte, puisque $s = \frac{ny}{x-z} = \frac{ny}{q}$:

$$(5) \quad q = \frac{\mu f(x, y) - y \frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}},$$

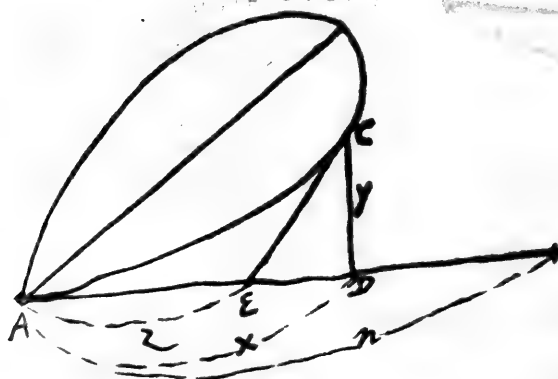
relation qui est équivalente à la relation connue :

$$\propto s^1); y \propto \frac{sx - sz}{n}$$

$$\frac{s^3x^3 - 3s^3xxz + 3s^3xzz - s^3z^3}{n^3} - sxx + szx + x^3 \propto 0$$

0	1	2	3	1	2	0
3	2	1	0	2	1	3

[Fig. 7.]



$$x \text{ in } \frac{-3s^3xxz + 6s^3xzz - 3s^3z^3}{n^3}$$

$$- sxx + 2sxx \propto 0^2)$$

$$z \text{ in } \frac{3s^3x^3 - 6s^3xxz + 3s^3xzz}{n^3}$$

$$- 2sxx + sxx + 3x^3 \propto 0^3)$$

$$sxxz + 3x^3z - sx^3 \propto 0^4)$$

$$szz + 3xxz - sxx \propto 0$$

$$\frac{3zxx}{xx - zz} \propto s \propto \frac{ny}{x - z}$$

$$3zxx \propto nyx + nyz; x - q \propto z \propto \frac{nyx}{3xx - ny}. \text{ Si efflet æquatio curvæ } x^3 + 2y^3 -$$

$$3x^3 - nyx - 3qxx + nyq \propto nyx$$

$$q \propto \frac{2nyx - 3x^3}{ny - 3xx} \text{ vel, quia } nxy \propto x^3 + y^3$$

$$q \propto \frac{3y^3 - nyx}{ny - 3xx} \quad (6)$$

$$- xyn \propto 0 \text{ vel quivis alius numerus}$$

$$\text{ductus in } y^3 \text{ eadem tamen invenitur}$$

$$\text{constructio ad tangentem, nempe}$$

$$z \propto \frac{nyx}{3xx - ny} \quad (5),$$

(6)

$$q = - \frac{y \frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$$

La deuxième méthode de Huygens conduit donc, elle aussi, à une expression pour la sous-tangente équivalente à l'expression (6), mais de forme différente.

¹⁾ La grandeur de s détermine donc la forme du triangle ECD, puisque n est une constante donnée.

²⁾ Cette équation correspond donc à l'équation (3) de la note 2 de la page précédente.

³⁾ Équation qui correspond à l'équation (2) de la note mentionnée.

⁴⁾ Équation qui correspond à l'équation (4) de la note mentionnée.

[Fig. 8.]



$$\frac{y^4}{dd-yy} \propto xx^7); y^4 +$$

$$+ yyxx - ddx \propto 0$$

$$\frac{dy}{x+z} \propto s; y \propto \frac{xs+zs}{d}$$

$$0 \propto -d^4xx + x^4ss + 2x^3zss + xxzzss^8)$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$z \text{ in } -2ddda + 4xxss + 6xzss + 2zzss \propto 0^9)$$

$$x \text{ in } -2dddd + 2xzss + 2zzss \propto 0^{10)}$$

$$2ddddx - 2ddddz + 2xxssz + 4xsszz + 2z^3ss \propto 0$$

$$\frac{d^4z - d^4x}{xxz + 2xzz + z^3} \propto ss \propto \frac{ddy}{xx + 2zx + zz}$$

$$ddz - ddx \propto zyy$$

$$q^{11}) - x \propto z \propto \frac{ddx}{dd-yy} \text{ vel } z \propto \frac{ddx^3}{y^4}; q \propto \frac{2ddx - yyx}{dd-yy}^{12)}$$

5) Plus généralement, on trouve:

$$z = x - q = \frac{x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} - \mu f(x, y)}{\frac{df}{dx}}$$

Or, le terme μy^4 de l'équation de la courbe n'entre pas dans le dénominateur et il disparaît dans le numérateur après réduction.

6) Voir la note 1 de la p. 510.

7) Équation de la courbe de Gutschoven; comparez le deuxième alinéa de la Pièce N°. VI, p. 501. Voir, pour l'exposition générale de la méthode suivie, la note 2 de la p. 511. La quantité constante n est remplacée ici par d .

8) Huygens substitue $\frac{xs+zs}{d}$ pour y dans l'équation $y^4 + yyxx - ddx = 0$, mais il omet le terme y^4 , puisqu'il sait que ce terme n'a pas d'influence sur l'expression qu'il trouvera pour z ; comparez la note 5.

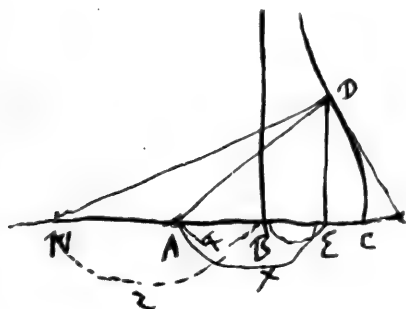
9) Comparez la note 3; mais Huygens omet partout, ici et dans l'équation qui suit, deux facteurs x .

10) Comparez la note 2.

11) $q = x + z$ est la soustangente sur l'axe des x .

12) Nous supprimons l'application de la même méthode à la détermination de la tangente à la parabole „ $2ny - yy - xx - 2xy \propto 0$ ”, qu'on trouve à la même page, parce que cette appli-

[Fig. 10.]



$$[NE \infty] z - a + x$$

$$\text{qu. } z - a + x$$

$$zz - 2az + aa + 2zx - 2ax + xx +$$

$$\text{q.ED.}$$

$$+ \frac{bxx - x^3 + axx}{x - a} \infty ss^6)$$

$$2zxx - 2azx - 2axx + 2aax + bxx^7)$$

$$x - a$$

$$+ 1 \quad 0 \quad + 1 \quad 0 \quad + 1^8)$$

$$0 \infty \left\{ \begin{array}{l} 2zxx - 2axx + bxx \\ -4azx + 2aaz + 4aax - 2a^3 - 2bax \end{array} \right.$$

$$\frac{axx - \frac{1}{2}bxx - 2aax + a^3 + bax}{xx - 2ax + aa} \infty z$$

$$a \left[+ \right] \frac{-\frac{1}{2}bxx + abx}{xx - 2ax + aa} \infty z \text{ Inventio tangentis aliter.}$$

$$\text{ad primam figuram}^9) \frac{bxx}{2xx - 4ax + 2aa + 2ab - bx} \infty z \text{ maxima}$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

$$-4ax + 4aa + 4ab - bx \infty 0^{10})$$

$$\frac{4aa + 4ab}{4a + b} \infty x \text{ vel } x \infty \frac{aa + ab}{a + \frac{1}{4}b}$$

$$a + \frac{3ab}{4a + b} \infty x, \frac{3ab}{4a + b} \infty x - a \text{ determinatio puncti ubi flexus contrarius incipit.}$$

⁷⁾ Il s'agit de déterminer le maximum ou minimum de ss ; mais puisque a est une quantité constante et que z doit être considérée comme telle, les trois premiers termes de l'expression précédente n'importent pas et peuvent être négligés dans la formation de la fraction à laquelle Huygens va appliquer l'algorithme de Hudde.

⁸⁾ Ces coefficients ont servi pour former la première ligne (dépendant du premier terme x du numérateur) de l'équation qui se construit suivant l'algorithme de Hudde en divisant toutefois tous les termes par x .

⁹⁾ Voir la Fig. 9.

¹⁰⁾ Application de l'algorithme de Hudde avec division des termes par bxx .

[Fig. 11.]



[Fig. 12.]

§ 6¹⁾.

$$z \text{ [ad]} y \text{ [ut]} z - e \text{ [ad]} \frac{yz - ye}{z} \propto y - \frac{ye}{z}$$

$$\frac{y - \frac{ye}{z}}{x - e}$$

$$\frac{xy - \frac{xye}{z} - ye + \frac{eey}{z}}{x^3 + y^3 - xyn \propto 0^2)}$$

$$x^3 - 3xxe + 3eex - e^3 + y^3 - \frac{3y^3e}{z} + \frac{3y^3ee}{zz} - \frac{y^3e^3}{z^3} -$$

$$- xyn + \frac{xnye}{z} + eyn - \frac{eeyn}{z} \propto 0$$

$$- 3xx - \frac{3y^3}{z} + \frac{xny}{z} + yn \propto 0^3)$$

$$xny - 3y^3 \propto 3zxx - zny$$

$$\frac{xny - 3y^3}{3xx - ny} \propto z$$

¹⁾ Ce paragraphe nous fait connaître les calculs qui ont servi à déduire l'algorithme simple pour déterminer la sous-tangente d'une courbe algébrique donnée, que Huygens expose dans sa lettre à de Witt du 25 février 1663 (p. 312—317 du T. IV) et qui fut publié en 1693 dans les „Divers ouvrages de Mathématique et de Physique. Par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences” (voir la p. 331 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 91 de notre T. IX). Probablement cette découverte fut mandée à de Sluse dans une lettre du 10 décembre 1662, que nous ne connaissons pas (voir la seconde note 1 de la p. 291 du T. IV), puisqu'on lit dans la réponse de de Sluse, du 12 janvier 1663 (voir la p. 292 du T. IV): „Gaudeo Te ac Clarissimum Huddenum in tangentium methodum meæ non absimilem incidisse: an vero eadem sit necne, hoc *τεκμηρίω* colliges”.

²⁾ Équation du folium de Descartes.

³⁾ Il s'agit du coefficient de e dans l'équation qui précède.

⁴⁾ L'algorithme employé ici pour la détermination de la sous-tangente ne diffère de celui exposé dans la lettre à de Witt, citée dans la note 1, que par le signe attaché à chaque terme du numérateur et du dénominateur.

Ajoutons qu'à la même page du manuscrit on trouve encore d'autres petits calculs dans lesquels on reconnaîtra facilement l'algorithme inventé par Hudde tel qu'il est exposé dans

$$\begin{array}{r}
 x^3 + y^3 - xyn \propto 0 \\
 0 \quad 3 \quad 1 \\
 3 \quad 0 \quad 1 \\
 \hline
 - 3y^3 + xyn \text{ 4)} \\
 - 3xx + yn
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + xyy - axx - ayy - bxx \propto 0 \\
 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\
 3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \\
 \hline
 - 2xyy + 2ayy \text{ 5)} \\
 - 3xx - yy + 2ax + 2bx
 \end{array}$$

la note 6 de la p. 446 de notre Avertissement.

En voici le premier :

$$\begin{array}{r}
 x^3 + y^3 - xyn \\
 - 3 \quad 0 \quad - 2 \\
 3 \quad 0 \quad 1 \\
 \hline
 - 3x^3 + 2xyn \\
 3x^3 - xyn
 \end{array}$$

Or, la règle de Hudde exige qu'on multiplie la fraction obtenue par $-x$, de sorte qu'elle donne pour la sous-tangente l'expression $\frac{3x^3 - 2xyn}{3x^2 - yn}$, qui se réduit, si l'on applique la relation $x^3 + y^3 - xyn = 0$, à $\frac{-3y^3 + xyn}{3x^2 - yn}$; expression que ne diffère de celle trouvée par Huygens que par le signe qui dépend de la convention qu'on a adoptée.

Les autres petits calculs présentent les coefficients :

$$\begin{array}{r}
 0 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \\
 0 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

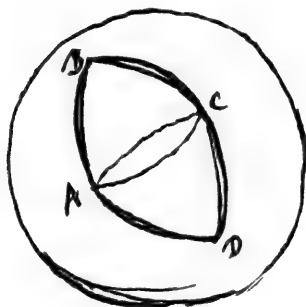
conformes à l'algorithme de Hudde avec cette différence que, dans l'une des deux lignes, les signes des coefficients sont renversés; ce qui change le signe de l'expression pour la sous-tangente.

5) Application de l'algorithme à la conchoïde de de Sluse; comparez le § 5 qui précède.

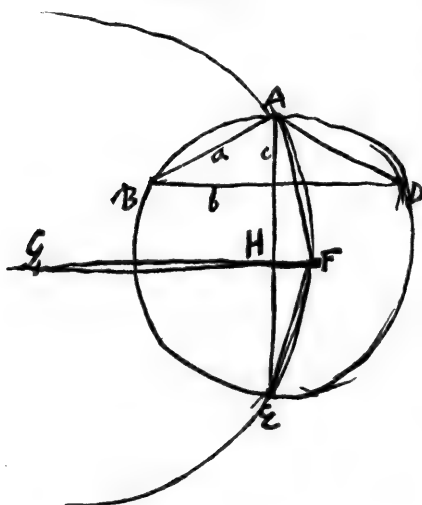
VIII¹⁾.

[1664]²⁾.

[Fig. 1.]



[Fig. 2.]



Sphaerae datae diametrum invenire.

Describantur in sphaerae superficie duo triacula æquilatera ABC, ADC, sibi mutuo opposita ita ut bases iisdem punctis A, C, terminentur. Distantia punctorum BD circino capiatur et in planum transferatur et super hac basi triangulum isosceles constituatur cujus crura AB, AD [Fig. 2] distantijs punctorum BA vel AD sint æqualia, tum porro per tria puncta BAD circulus describatur cujus sit diameter AE³⁾, super qua rursus triangulum isosceles describatur AFE⁴⁾ cujus latera ipsis AB aut AD sint æqualia; et per tria puncta AFE circulus describatur. Hujus diameter erit diametro sphaerae æqualis.

$$[AE\infty] \frac{aa}{c}; [q.HF]^5) aa - \frac{1}{4} \frac{a^4}{cc} [ad q.AF]$$

$$aa [ut q.AF] aa [ad q.2GF]$$

$$\frac{a^4}{aa - \frac{1}{4} \frac{a^4}{cc}} [\infty] \frac{a^4 cc}{aacc - \frac{1}{4} a^4}$$

$$\frac{ac}{cc - \frac{1}{4} aa} \text{ diam. sphaerae.}$$

¹⁾ La Pièce est empruntée à la p. 161 du Manuscrit B.

²⁾ D'après le lieu que la Pièce occupe au Manuscrit B.

³⁾ Ce cercle représente évidemment le petit cercle de la sphère qui passe par les points BAD et qui a pour pôle le point C de la sphère.

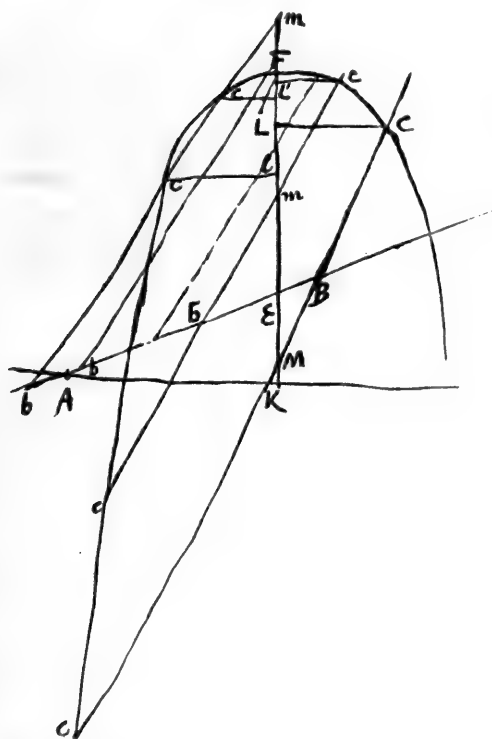
⁴⁾ Le point F correspond au pôle C.

⁵⁾ Nous avons ajouté à la Fig. 2 la lettre H qui manque dans la figure de Huygens.

IX^o.

[1665]¹⁾.

[Fig. 1.]



$$AB \propto x; BC \propto y; EF \propto a; KA \propto b; \\ AE \propto c$$

prop. EB ad BM³⁾

$$a[ad]d[ut]EB(x-c)[ad]BM \frac{dx-dc}{a}$$

$$\frac{BC}{MC} \frac{y}{dx-dc+ay}$$

prop. MC ad CL

$$e[ad]a[ut]MC \left(\frac{dx-dc+ay}{a} \right) [ad] \\ CL \frac{dx-dc+ay}{e}$$

prop. MC ad ML

$$f[ad]a[ut]MC \left(\frac{dx-dc+ay}{a} \right) [ad] \\ ML \frac{dx-dc+ay}{f}$$

prop. EB ad EM

$$f[ad]g[ut]x-c[ad]EM \frac{gx-gc}{f}$$

¹⁾ Dans cette Pièce, que nous empruntons aux pp. 8 et 29 du Manuscrit C, Huygens déduit les formules qui peuvent servir à passer d'un système de coordonnées cartésiennes (comme $LF=x'$, $LC=y'$) à un autre quelconque ($AB=x$, $BC=y$) de ce même genre. Ensuite il se propose d'appliquer ces formules à des recherches sur les cubiques.

²⁾ D'après le lieu que la Pièce occupe au Manuscrit C.

³⁾ La direction de l'axe EF par rapport aux axes des x et des y est déterminée ici par le rapport (proportio) de EB à BM, savoir de a à d .

$$\begin{array}{l} \text{EL } \frac{dx - gx - dc + gc + ay}{f} \\ \text{ex EF } \frac{a}{f} \\ \text{LF } \frac{af - dx + gx + dc - gc - ay^1}{f} \end{array}$$

In æquatione aliqua si præter x^3 habeatur et y^3 non autem adsint etiam omnia hæc xy . yyx . xxp . yyx . xyp non erit locus paraboloides cubica obtusa ²⁾.

Neque item si unum horum adsit, non autem y^3 .

Si vero in æquatione aliqua præter x^3 habeatur et y^3 non autem adsint etiam hæc duo xy et yyx , non erit locus paraboloides cubica acuta ³⁾.

Neque item si alterutrum horum adfuerit non autem y^3 .

[Fig. 2.]



Multæ igitur formari possunt æquationes cubicæ quæ non sint loci ad alterutrum parabolæ cubicarum. Ut autem numerus cubicarum linearum inveniatur ⁴⁾ simplicissimæ lineæ proponendæ ut $x^3 + y^3 - xyn = 0$ et videndum quales æquationum casus in illa inveniri possint.

¹⁾ Nous supprimons une autre déduction analogue (correspondant à une situation différente du système de coordonnées) dont le résultat ne diffère du résultat présent que par les signes de quelques termes.

²⁾ Il s'agit évidemment de la cubique $y^3 = kx^2$; mais Huygens oublie le cas $c = 0$; auquel cas les termes xyp , xyp et yyx n'apparaissent point dans l'équation en x et y .

³⁾ Il s'agit ici de la cubique $y^3 = kx'^2$.

⁴⁾ On connaît la manière magistrale dont le problème de la classification des cubiques fut résolu par Newton dans son „Enumeratio linearum tertii ordinis”, publiée en 1704.

521

X¹⁾.

1666.

1666. Sept.

Invenire numerum qui per tres datos numeros seorsim divisus, relinquat a divisione tres alios datos numeros.

Sit inveniendus qui per 28 divisus relinquat 13. Per 19 relinquat 4, per 15 relinquat 9.

$$\begin{array}{ll} \text{Sit } 28 \propto a & 13 \propto n \\ \text{„ } 19 \propto b & 4 \propto o \\ \text{„ } 15 \propto c & 9 \propto p \end{array}$$

Sit numerus quæsitus primo $ab + ac + bc$. si jam bc per a divisus relinqueret n five 13, patet primæ conditioni satisfacere numerum $ab + ac + bc$. Item si ac divisus per b relinqueret o five 4, idem numerus $ab + ac + bc$ satisfaceret quoque secundæ conditioni. Item si ab divisus per c relinqueret p five 9, satisfaceret idem numerus $ab + ac + bc$ etiam tertiæ conditioni. Itaque tantum opus esset addere $ab + ac + bc$ ad inveniendum numerum quæsitum. quod quidem contingeret si n esset 5; $o \propto 2$; $p \propto 7$. Sed cum bc per a divisus non relinquit n , videndum an relinquat 1. nam tunc bc ductus in n faciet numerum qui divisus per a necessario relinquet n ut facile est intelligere: nam si $\frac{bc}{a} \propto q$ ²⁾ $+$ $\frac{1}{a}$ fiet $bcn \propto naq + n$ qui per a divisus relinquit $\frac{n}{a}$. Quod si vero bc per a divisus non relinquit unitatem, quærendum per quem alium multiplicatus relinquat unitatem à divisione per a . faciet ex. gr. $\frac{bc}{a}$ reliquum d . Quæritur jam tantum f ita ut $\frac{df}{a}$ relinquat 1. Jam

¹⁾ La Pièce est empruntée à la p. 102 du Manuscrit C.

²⁾ Huygens ajoute en marge: „ q tantum numerum aliquem integrum significat”.

etiam bcf per a relinquet 1. nam $\frac{bc}{a} \propto q + \frac{d}{a}$. Ergo $\frac{bcf}{a} \propto qf + \frac{df}{a}$. Ergo $bcf \propto aqf + df$. Sed aqf per a facit qf ; et $\frac{df}{a}$ relinquit 1. Ergo $aqf + df$ per a relinquit 1. Unde et bcf per a relinquit 1. Quod si jam bcf ducatur in n necessario productum $bcfn$ divisum per a relinquet n . Nam quia $\frac{bcf}{a} \propto q + \frac{1}{a}$. Erit $bcf \propto aq + 1$, et $bcfn \propto aqn + n$. Sed $aqn + n$ divisus per a facit $qn + \frac{n}{a}$. hoc est, relinquit n à divisione. Ergo $bcfn$ per a relinquet n à divisione.

Simili ratione quæatur g qui ductus in ac faciat productum acg quod divisum per b relinquat 1. Nam tunc $acgo$ divisum per b relinquet 0.

Similiter quoque quæatur h qui ductus in ab faciat productum abh quod divisum per c relinquat 1. Nam tunc $abhpc$ divisum per c relinquet p .

Jamque numeri tres $bcfn + acgo + abhp$ una additi satisfaciunt omnibus conditionibus. nam compositus ex his divisus per a , faciet $cgo + bhp + \frac{bcfn}{a}$. Unde relinquetur n à divisione quia $bcfn$ per a relinquit à divisione n . Item divisus per b , faciet $cfn + ahpc + \frac{acgo}{b}$; ubi scimus $acgo$ per b relinquere 0. Denique divisus per c faciet $bfn + ago + \frac{abhp}{c}$; ubi scimus $abhp$ per c divisum relinquere p .

Cæterum ut minimus numerus habeatur proposito satisfaciens oportet ab numero $bcfn + acgo + bhp$ auferre totius abc quoties potest, sive divisionem instituere, nam quod ab ea relinquetur erit minimus numerus proposito satisfaciens ¹⁾.

Notandum etiam manentibus numeris a, b, c etsi tres alij n, o, p mutantur sive alij dentur, facile tamen quæstioni satisfieri per numeros semel inventos bcf, acg, abh . Patet enim illos tantum ducendos esse singulos in n, o, p . productaque addenda et per abc dividenda ²⁾.

Ita ad inveniendum annum Periodi Julianæ Scaligeri ²⁾, ex datis Cyclo Solis, Cyclo Lunæ sive aureo numero, et Indictione. quia Cyclos solis Integer est 28, Cyclos lunæ integer 19, Indictio 15. fiunt numeri perpetui

$$bcf \propto 4845; acg \propto 4200; abh \propto 6916.$$

¹⁾ On doit plutôt diviser par le plus petit commun multiple des nombres a, b, c , comme il est indiqué dans l'ouvrage cité dans la note 5 qui suit. Alors, en effet, le reste de la division est le nombre le plus petit qui satisfait à la proposition. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que la différence entre deux nombres qui satisfont à la question doit être divisible par a , par b et par c et, par suite, aussi par leur plus petit commun multiple.

²⁾ Voir sur Joseph Justus Scaliger, l'inventeur du Cycle Julien, la note 2 de la p. 538 du T. I et la note 4 de la p. 476 du T. V.

Si jam anni alicujus cyclus solis fit 13. Lunæ 4, Indictio 9. Oportet tantum ducere 4845 in 13 fit 62985. Item 4200 in 4 fit 16800. Item 6916 in 9 fit 62244, qui simul additi faciunt 142029 qui divisus per 7980 sive *abc*, numerum Periodi Scaligerianæ, relinquit 6369, annum Periodi ejus quibus data conveniunt.

P. Billy ³⁾ Regulam hanc tanquam a se inventam dederat ⁴⁾, sed potuit haussir ex Exercitationibus mathem.^{is} Schotenij ⁵⁾, qui D.^o Persijn Harlemensi ⁶⁾ eam acceptum fert ⁷⁾. Nos quo pacto inventa esse potuerit hic explicuimus.

³⁾ Voir sur le père Jacques de Billy la note 12 de la p. 374 du T. VI.

⁴⁾ Il s'agit de l'„Extrait d'une Lettre du P. de Billy de la Comp. de Jesus, du 22 Aoust à Dijon”, qui parut dans le „Journal des Sçavans du Lundy 6 Sept. 1666”, p. 670 de l'édition d'Amsterdam de 1684. Billy y donne „Pour trouver l'année de la Periode Julienne par une methode nouvelle & très-facile” la règle suivante: „multipliez le Cycle du Soleil par 4845, celui de la Lune par 4200, & celui de l'Indiction par 6916. Ensuite divisez la somme des produits par 7980, qui est la periode Julienne: Ce qui restera de la division, sans avoir égard au quotient, sera l'année qu'on cherche”. Il applique cette règle à un autre exemple que celui du texte et l'auteur du Journal ajoute: „Quelques sçavans Mathematiciens de Paris à qui le P. Billy a proposé ce Probleme, en ont trouvé la demonstration”.

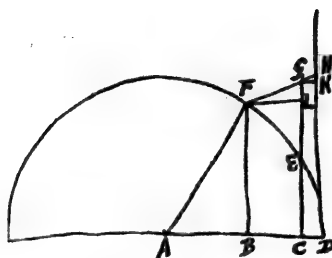
Une traduction de l'article fut insérée dans les „Philosophical Transactions” du 22 octobre 1666 (p. 324) sous le titre „A problem For finding the Year of the Julian Period by a new and very easy Method”.

⁵⁾ Voir la p. 408—410 du „Liber V” de l'ouvrage mentionné, duquel „Liber” nous avons reproduit le titre à la p. 52 du Tome présent. On y retrouve, en effet, la méthode exposée par Huygens avec la correction que nous avons indiquée dans la note 1. Elle y est appliquée à deux exemples. Dans le premier les diviseurs sont 2, 3, 5 et 7 et les restes respectivement 1, 1, 1 et 0; dans le deuxième 7, 11 et 13 avec les restes 2, 1 et 9; on n'y trouve aucune allusion au problème de trouver l'année de la Période Julienne.

⁶⁾ Nicolaas Huybertsz. van Persijn, né probablement à Haarlem, ami de Ludolf van Ceulen, fut arpenteur à Naarden. Il avait déjà été mentionné par van Schooten à la p. 404 des „Exercitationes mathematicæ” et le fut encore aux pp. 435 et 436 de cet ouvrage, comme aussi à la p. 275 de l'édition de 1649 de la „Geometria” (p. 319 de l'édition de 1659), où van Schooten l'appelle „arithmeticus subtilissimus”.

⁷⁾ En effet, on lit à la p. 408 des „Exercitationes mathematicæ”: „Cæterùm cum ad hujusmodi quæstiones solvendas modum ingeniosissimum excogitarit ante memoratus D. Nicolaus Huberti à Persijn, placuit eum, qualem ab ipso accepi, paucis hic subicere”.

[1666.]



$\overline{62832}$ semicirconf. major vera

FB^2) vel AC 17320 minor ³⁾)
 AC maj. 17321 | f. CG 20000
 AB 10000 | BF ∞ CL maj. 17320 ⁴⁾)
 FL ∞ BC maj. 7321 2680 LG min.
 FL maj. 7321 [ad] LG min. 2680 [ut] GK ∞ CD
 ∞ LG min. 2680 [ad] HK min. 981
 20000 DK ∞ CG ∞ AD
 vera 981 HK min.
 20981 DH min.

3
62943 semicircumf. minor vera
secundum Oudardum⁵⁾).

¹⁾ La Pièce, où Huygens examine une construction approchée de la circonférence du cercle, se trouve à la p. 104 du Manuscrit C, qui suit aux pages dont nous avons emprunté la Pièce précédente. Elle doit dater de 1666.

2) Pour expliquer la construction qui va suivre il suffira de remarquer que l'angle FAB est égal à 60° , qu'on y prend $AC = FB$ et $CG = AD$. Alors DH représente approximativement la troisième partie de la demi-circonférence du cercle dont AD est le rayon.

3) Huygens suppose $AF = 20000$.

⁴⁾ Lisez 17321. Par conséquent, on doit remplacer partout 2680 par 2679. Cela donne $980 < HK, 20980 < DH, 62940 < 3DH$. Ainsi la quantité 3DH est plus grande que la demi-circonférence du cercle, tandis que Oudart semble avoir prétendu qu'elle est plus petite.

5) Probablement Nicolaas Oudart, homme d'état hollandais, né à Malines, qui s'établit plus tard à Londres, où il mourut en 1681. Il fut e.a. secrétaire de la Princesse Royale Mary Stuart, veuve du Stadhouder Willem II. On le trouve mentionné aux pp. 173 et 217 du T. III.

524

TABLES.

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

	Page.
VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK. 1656—1657. [DU CALCUL DANS LES JEUX DE HASARD]	1—91
AVERTISSEMENT	3—48
TITRES EN FAC-SIMILÉ	50—53
AU LECTEUR	54—55
À MONSIEUR FRANCISCUS VAN SCHOOTEN	56—59
Hypothèse fondamentale	61
Propof. I. Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$	63
Propof. II. Avoir des chances égales d'obtenir a , b ou c me vaut $\frac{a+b+c}{3}$	65
Propof. III. Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b , les chances étant équi- valentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$	65
Propof. IV. Supposons que je joue contre une autre personne à qui aura gagné le premier trois parties, et que j'aie déjà gagné deux parties et lui une. Je veux favoir quelle partie de l'enjeu m'est due au cas où nous voulons interrompre le jeu et par- tager équitablement les mises	67
Propof. V. Supposons qu'il me manque une partie à moi et trois à mon adversaire. Il s'agit de partager l'enjeu dans cette hypothèse	69
Propof. VI. Supposons qu'il me manque deux parties et qu'il en manque trois à mon adversaire	71
Propof. VII. Supposons qu'il me manque encore deux parties et lui quatre	71
Propof. VIII. Supposons maintenant que trois personnes jouent ensemble et qu'il manque une partie à la première ainsi qu'à la deuxième, mais qu'il en manque deux à la troisième	73
Propof. IX. Pour calculer la part de chacun d'un nombre donné de joueurs, auxquels	

	Page.
manquent des parties en nombres donnés pour chacun d'eux séparément, il faut d'abord se rendre compte de ce qui reviendrait à celui dont on veut savoir la part dans le cas où lui et dans ceux où chacun des autres à son tour aurait gagné la première partie suivante. En ajoutant toutes ces parts et en divisant la somme par le nombre des joueurs on trouve la part cherchée du joueur considéré	73
Propof. X. Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter un six avec un dé.	79
Propof. XI. Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter 2 six avec 2 dés. .	81
Propof. XII. Trouver le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 six du premier coup	83
Propof. XIII. Dans l'hypothèse que je joue un coup de deux dés contre une autre personne à condition que s'il vient 7 points, j'aurai gagné, mais qu'elle aura gagné s'il en vient 10, et que nous partagerons l'enjeu en parties égales s'il vient autre chose, trouver la part qui revient à chacun de nous.	85
Propof. XIV. Si un autre joueur et moi jettent tour à tour 2 dés à condition que j'aurai gagné dès que j'aurai jeté 7 points et lui dès qu'il en aura jeté 6, tandis que je lui laisse le premier coup, trouver le rapport de ma chance à la sienne.	87
Exercices.	89
<i>Appendice I.</i> [1656]	
S'il reste 1 jeu à gagner à A et 1 à B, et 2 jeux à C, combien vaudra la place de chacun supposé qu'ils aient mis chacun 2 écus au jeu? Et s'il reste 1 jeu à gagner à A, 2 à B et 2 à C, 6 écus au jeu? Et encore s'il reste 1 à A, 2 à B, 3 à C, 6 écus au jeu?	92
<i>Appendice II.</i> [1665]	
Solutions du deuxième et du quatrième des Exercices	96
<i>Appendice III.</i> [1665]	
Jean a 2 jetons blancs et 1 noir, mais Pierre 1 blanc et 2 noirs. Et chacun à son tour choisit à l'aveuglette un de ses jetons. Celui qui obtient un jeton noir doit ajouter un ducat à l'enjeu, mais celui qui obtient un jeton blanc reçoit tout ce qui a été mis. Et Jean choisit la première fois, quand il n'y a encore rien à l'enjeu. On demande combien est l'avantage ou le désavantage de Jean au commencement du jeu.	102
<i>Appendice IV.</i> [1665]	
A et B choisissent à l'aveuglette à tour de rôle, A toujours un de $\theta + \lambda$ jetons dont θ blancs et λ noirs, mais B un d'un nombre inconnu de jetons blancs et noirs, à condition que celui qui tirera un jeton blanc aura tout ce qui est mis; mais celui qui tire un jeton noir ajoutera chaque fois un ducat à l'enjeu, et A tirera le premier. On demande lorsqu'on veut que les chances de A et de B soient équivalentes, quelle proportion devra exister entre les nombres des jetons blancs et noirs de B	108
Quel est l'avantage de A qui tire le premier lorsqu'il a θ jetons blancs et λ noirs, et B φ blancs et ψ noirs?	113

	Page.
<i>Appendice V. 1665</i>	
A joue croix ou pile contre B; les deux joueurs jettent tour à tour à condition que celui qui amène pile mettra chaque fois un ducat, mais qui jette croix prendra tout ce qui est mis; et A jettera le premier, alors qu'on n'a encore rien mis. Et il est entendu que le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mis et enlevé; quel est l'avantage de A?	116
Explication des calculs de l'Appendice III	124
Explication des calculs de l'Appendice IV	126
Quelle doit être dans le jeu de croix ou pile la somme que chaque joueur doit mettre au début (chacun la même somme) afin que A qui jette le premier ait une chance aussi bonne que B?	130
A et B jettent à tour de rôle croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat à l'enjeu, mais celui qui jette croix recevra chaque fois un ducat si quelque chose a été mis. Et A jettera le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu et le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mis, et l'on jouera jusqu'à ce que tout a été enlevé. On demande quel est le désavantage de A. Déterminer la somme de la suite des valeurs réciproques des nombres triangulaires.	132 144
<i>Appendice VI. 1676</i>	
Solution et généralisation du dernier des Exercices	151
<i>Appendice VII. [1676]</i>	
Solution par les logarithmes de „problèmes des dés” identiques ou analogues à ceux des Prop. X et XI	156
<i>Appendice. VIII [1679]</i>	
Avantages du banquier au jeu de la basset	164
<i>Appendice IX. [1688]</i>	
A, B, C jouent au piquet mettant chacun un ducat. Ce sont toujours deux des trois qui jouent. Celui qui perd met de nouveau un ducat. Et celui qui fait perdre ses deux adversaires consécutivement prend tout. On demande combien est l'avantage de A, s'il a jeté de manière à rester libre pendant la première partie.	169
A, B, C qui jouent mettent chacun un ducat. A joue d'abord contre B et celui des deux qui gagne joue contre C. Et si C gagne il joue de nouveau contre le troisième, jusqu'à ce que quelqu'un gagne 2 fois consécutivement, lequel prend alors l'enjeu et en outre le ducat que chacun qui perd une partie doit ajouter à l'enjeu. On demande la valeur de leurs chances.	172
Solution du problème simplifié où l'on ne met rien que les 3 premiers ducats	173
Reprise du problème plus compliqué	176
Solution du problème lorsque le jeu commence sans qu'il y ait une mise	178
TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1655 à 1659	181—407
AVERTISSEMENT	183—207
I. 1655. Construire un triangle rectangle, lorsqu'on donne la somme des côtés	

	Page.
droits et la différence des segments dans lesquels l'hypoténuse est divisée par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit.	208
II. 1656. Construire les asymptotes d'une hyperbole qui constitue la solution du problème de Pappus „proposé en quatre lignes”	210
III. 1657. Trouver un nombre qui ajouté à son carré fait un carré.	212
Pourquoi chaque nombre premier augmenté ou bien diminué de l'unité devient divisible par 6, de même par 4? excepté 2 et 3	213
Discussion de l'équation diophantine, dite de Pell, $au^2 + 1 = v^2$	213
Reconnaître si un nombre donné est un non-carré	217
Lorsqu'un nombre divisé par 9 n'a pour résidu ni 1, ni 8, ni 0, ce ne sera pas un cube.	218
Déterminer le résidu de la division d'un nombre par 7 ou par 11	218
Reconnaître si un nombre donné est un non-carré. Suite	222
<i>Appendice I.</i> [1658]. Discussion de l'équation diophantine $au^2 + 1 = v^2$	225
<i>Appendice II.</i> [1657] Reconnaître si un nombre donné est un non-carré ou un non-cube.	229
IV. [1657]. Discussion de l'équation de la droite et du cercle.	230
V. 1657. Démonstration de Huygens du théorème de Pythagore	232
VI. 1657. Réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole et de la quadrature de la surface du conoïde parabolique à celle du cercle.	234—270
PREMIÈRE PARTIE. Découvertes faites le 27 octobre 1657.	234
DEUXIÈME PARTIE. Réduction, suivant la méthode des anciens, de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole.	237
TROISIÈME PARTIE. Réduction, suivant la méthode des anciens, de la quadrature de la surface courbe du conoïde parabolique à la quadrature du cercle.	254
VII. 1657. Trouver un cercle qui touche à deux cercles donnés et duquel une droite donnée découpe un arc capable d'un angle donné	271
VIII. 1657. Quadrature des paraboles de divers degrés. Cubature de leurs solides de révolution. Détermination des centres de gravité des segments plans et solides.	273
<i>Appendice I.</i> [1657]. Rédaction à la mode des anciens d'une partie du texte précédent.	283
<i>Appendice II.</i> [1657]. Quadrature des hyperboles de divers degrés	288
IX. [1657—1658]. Recherches de 1657 et 1658 sur quelques lignes courbes. Perles de de Sluse. Courbe que de Sluse avait rencontrée chez les anciens. Folium de Descartes. Conchoïde. Cissoïde. Parabole. Quadratures. Cubatures de solides de révolution. Tangentes. Points d'inflexion. Centres de gravité. Plus grande largeur de la boucle du folium. Propriétés des diamètres d'une parabole.	294
X. 1658. Réduction de la quadrature de la surface du conoïde elliptique allongé à la quadrature du cercle, et réduction de celle des surfaces du conoïde elliptique aplati et du conoïde hyperbolique à la quadrature de l'hyperbole	314—346

	Page.
PREMIÈRE PARTIE. Découvertes faites le 3 février 1658	314
DEUXIÈME PARTIE. Relation entre les quadratures des surfaces du sphéroïde aplati et du conoïde hyperbolique	324
TROISIÈME PARTIE. Résumé des résultats obtenus dans les Parties qui précèdent	334
QUATRIÈME PARTIE. Avantages et désavantages de la méthode des indivisibles comparée à celle des anciens. Description schématique de la méthode de démonstration archimédienne. Rédaction plus soignée des résultats obtenus dans la deuxième Partie, qui concernent les courbes adjointes de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole	337
XI. 1658—1659. Recherches sur les propriétés géométriques de la cycloïde	347—376
PREMIÈRE PARTIE. Quadrature de la cycloïde. Cubature de ses solides de révolution. Centre de gravité de segments cycloïdaux	347
DEUXIÈME PARTIE. Centre de gravité du solide engendré par une demi-révolution d'un segment cycloïdal autour de sa corde	358
TROISIÈME PARTIE. Rectification, et détermination du centre de gravité, d'un arc cycloïdal. Quadrature de la surface engendrée par la révolution autour de la corde	363
QUATRIÈME PARTIE. Démonstration géométrique de la construction de la tangente à la cycloïde	374
CINQUIÈME PARTIE. Centre de gravité d'une demi-cycloïde	376
<i>Appendice.</i> [1691] Application des méthodes de Wallis à la détermination du centre de gravité d'une demi-cycloïde	377
XII. [1658]. Démonstration d'un théorème de stéréométrie concernant la cubature d'un tronc de cône	379
XIII. [1659]. Dédution d'un théorème de cyclométrie, basée sur la situation connue du centre de gravité d'un arc cycloïdal	381
XIV. [1659]. Solution d'un problème d'arithmétique élémentaire	384
XV. [1659]. Recherches sur la théorie des développées. Développées de l'ellipse et de l'hyperbole. Quadrature d'une courbe du huitième degré à l'aide de la développée de l'hyperbole équilatère. Considérations générales sur la théorie des développées et des courbes parallèles. Développée de la cycloïde	387
<i>Appendice.</i> Détermination du centre de gravité de la cycloïde, basée sur les propriétés de sa développée	406
XVI. 1659. Construction de la tangente à la quadratrice de Dinostrate	407
CONTRIBUTIONS AUX COMMENTAIRES DE VAN SCHOOTEN SUR LA „GEOMETRIA” DE DESCARTES. ÉDITIONS DE 1649 ET DE 1659.	
1649, 1659	406—422
AVERTISSEMENT	411—415
I. 1649. Cas particulier où la recherche d'un lieu géométrique amène un théorème	416

	Page.
II. 1659. Construction de la normale à la conchoïde	417
III. 1659. Cas particulier des ovales de Descartes où ils deviennent des cercles . . .	419
IV. 1659. Forme de l'ovale de Descartes dans le troisième cas qu'il distingue dans la discussion de ses ovales	420
V. 1659. Mener d'un point donné les normales à une parabole	421
Appendice. [1654]. Dédution des formules de Descartes pour déterminer le „latus transversum” et le „latus rectum” d'une conique donnée par une équation quelconque du deuxième degré	423
TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1660 à 1666	429—524
AVERTISSEMENT	431—450
I. 1661. Dédution de la règle pour trouver les logarithmes	451
Appendice. [1668]. Règle pour trouver les logarithmes	458
II. 1661. Recherches sur la courbe logarithmique	460
Appendice. [1689]. Détermination du centre de gravité du solide engendré par la révolution de la courbe logarithmique autour de l'asymptote	472
III. 1662. Quadrature de l'hyperbole par les logarithmes. Application à la rectifica- tion de la parabole	474
IV. 1662. Relation entre l'altitude et la pression atmosphérique	483
Appendice I. [1668]. Application aux expériences faites sur l'inspiration de Pascal par Perier au Puy de Dôme en Auvergne	491
Appendice II. 1673. Application à une expérience de Cassini faite sur une mon- tagne près de Toulon	495
V. [1662]. Construction de l'heptagone régulier	498
VI. 1662. Quadrature de la courbe de Gutschoven et cubature d'un de ses solides de révolution	501
VII. [1662]. Recherches sur la détermination des tangentes des courbes algébriques .	504
VIII. [1664]. Trouver le diamètre d'une surface sphérique	518
IX. [1665]. Formules pour passer d'un système de coordonnées cartésiennes à un autre. Application aux cubiques	519
X. 1666. Trouver un nombre qui, divisé par trois nombres donnés, laisse des restes donnés. Application au Cycle Julien	521
XI. [1666]. Examen d'une rectification approchée de la circonférence du cercle . .	524

II. PERSONNES MENTIONNÉES.

Dans cette liste on a rangé les noms sans avoir égard aux particules *de*, *a*, *van* et autres.
Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve des renseignements biographiques.

Académie de Berlin. 9.

Académie des Sciences. 9, 14, 17, 24, 220, 431, 434, 447, 452, 456, 516.

Adam (Paul). 30, 210, 303, 316, 317, 321, 414, 416, 419, 421, 444, 448, 449.

Adams (John Couch). 465.

Anderfon (Alexander). 421.

Angot (Charles). 448.

Apollonius. 50, 51, 238, 245, 312, 326, 329, 331, 332, 340, 341, 345, 388, 389, 391, 420, 421, 425.

Archimède. 18, 189, 190, 191, 192, 236, 237, 251, 255, 259, 261, 262, 263, 266, 311, 334, 336, 337, 338, 366, 367, 370, 466, 502.

Beaune (Florimond de). 411, 426, 427.

Bernoulli (Jacques). 9, 10, 11, 12, 16, 17, 19, 20, 24, 27, 28, 30, 88, 89, 91, 154.

„ (Jean). 17.

„ (Nicolas). 17.

Bertier (Antoine). 218.

Bertrand (Joseph). 431, 452.

Bierens de Haan (David). 29.

Billy (Jacques de). 523.

Binger (Librairie Gebroeders). 412.

Blaeu (Johan). 411.

„ (Peter). 411.

Boulliau (Ismael). 195, 200, 202, 206, 347, 353, 362.

Boyle (Robert). 436, 437, 483, 484, 485, 491.

Briggs (Henry). 441, 451, 455, 456, 457, 459, 465, 478.

Broffin (George). 3, 4, 26.

- Brouncker (William). 188, 224, 225, 226, 227, 228.
 Browne (W.). 10.
 Brunetti (Cofimo). 272.
 Cantor (Moritz Benedict). 21, 22, 185, 187.
 Carcavy (Pierre de). 4, 6, 7, 9, 23, 64, 88, 89, 90, 92, 186, 195, 196, 197, 199, 204, 205, 210, 362, 367, 373, 376, 422.
 Cardano (Geronimo). 22, 414, 415.
 Cartes (René des). 29, 55, 183, 185, 186, 189, 203, 210, 301, 302, 303, 304, 315, 316, 317, 321, 339, 374, 394, 409, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 419, 420, 421, 423, 424, 425, 426, 427, 442, 443, 444, 445, 446, 448, 449, 500, 507, 509, 511, 516.
 Caffini (Giovanni Domenico). 439, 495, 496.
 Cavalleri (Bonaventura). 191, 199, 337.
 Ceulen (Ludolf van). 523.
 Ceva (Thomas). 473.
 Chapelain (Jean). 206.
 Clavius (Christoffel). 126, 232, 233, 267, 269, 313, 343, 344.
 Clerfelier (Claude). 303, 448, 449.
 Cocq (M^e le). 164.
 Comberouffe (Charles de). 272.
 Commandinus (Fredericus). 238, 239, 312, 341, 388.
 Coutereels (Johan). 384, **385**.
 Descartes (R.). Voyez Cartes (René des).
 Dettonville (A.). Voyez Pascal (Blaise).
 Dierkens (Salomon). 15, 16, 26, 28, 156, 161, 162.
 Dinoftrate. 183, 407.
 Diophante. 56, 57, 213.
 Doublet (Philips). 3.
 Dutens (Louis). 9.
 Elfevier (Daniel). 411.
 „ (Johan). 52.
 „ (Louis). 411, 413.
 États de Hollande et de West-Frise. 14.
 Euclide. 126, 198, 232, 233, 266, 267, 269, 313, 343, 344, 417.
 Euler (Leonhard). 214.
 Everfdijck (Cornelis Frans). 184, 384, **385**, 386.
 Fermat (Pierre de). 3, 4, 6, 7, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 29, 30, 58, 59, 88, 89, 90, 184, 185, 186, 187, 188, 196, 197, 198, 213, 217, 223, 224, 225, 227, 272, 297, 301, 302, 303, 329, 418, 442, 443, 447, 448, 449.
 Ferreo (Scipio). 415.
 Fiedler (Wilhelm). 272.

- Fierens (Jacques). 385.
 Folie (François). 25.
 Frenicle de Beffy (Bernard). 185, 186, 187, 188, 213, 216, 223, 224.
 Gallas (K. R.). 10.
 Gauss (Carl Friedrich). 214, 499.
 Gauthier-Villars (Librairie). 3, 24.
 Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Königl.) 499.
 Goedefbergh (Gerrit van). 53, 555.
 Gouffier (Arthus). 438.
 Grandi (Guido). **473**.
 Graunt (John). 12, 13.
 Gravefande (Willem Jacob 's). 473.
 Grégoire de Saint-Vincent. 194, 195, 264, 265, 266, 267, 303, 432, 434, 452, 453, 457.
 Gregory (James). 434.
 Guldin (Paulus). 200, 204, 280, 281, 297, 360, 407, 468, 472, 473.
 Gutschoven (Gerard van). 429, 442, 443, 445, 449, 501, 504, 505, 511, 513.
 Hachette (Librairie). 196.
 Hardy (Claude). 448.
 Hayez (F.). 25.
 Heiberg (Johan Ludwig). 18, 192, 238, 259, 261, 263, 335, 366.
 Henry (Charles). 3, 303, 449.
 Hérigone (Pierre). 418.
 Heuraet (Hendrik van). 189, 190, 199, 295, 315, 395.
 Hire (Philippe de la). 205.
 Hobbes (Thomas). 188.
 Hudde (Johan). **10**, 11, 12, 14, 15, 18, 29, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 43, 88, 89, 96, 97, 100, 101, 102, 103, 108, 113, 115, 116, 126, 130, 132, 153, 199, 295, 301, 302, 304, 393, 394, 414, 415, 443, 444, 446, 447, 448, 505, 506, 507, 508, 514, 515, 516, 517.
 Huygens (Constantyn, père). 3, 412.
 „ („ , frère). 412.
 „ (Lodewijk, frère). 3, 12, 13, 14, 438, 483, 485.
 „ (Philips, frère). 234, 237, 248, 271, 294, 301.
 Johnson (T.). 446.
 Justiniani (Afcanio Giulio). 16, 555.
 Keimer (S.). 15.
 Kinner von Löwenthorn (Gottfried Aloys). 192, 195, 237.
 Korteweg (D. J.). 10.
 Lagrange (Joseph Louis). 214.
 Land (Jan Pieter Nicolaas). 29.
 Laplace (Pierre Simon, de). 24, 25.

- Leibniz (Gottfried Wilhelm von). 9, 185, 439.
 Loria (Gino). 441.
 Macmillan (Librairie). 9.
 Marret (Veuve Paul). 9.
 Medicis (Leopoldo de). 192, 434, 439.
 Mercator (Nicolas). 431, 432.
 Méré (de). Voyez Broffin (George).
 Merfenne (Marin). 186, 188, 197, 198, 199, 200, 201, 217, 218, 302.
 Meyer (Anton). 24, 25, 26.
 Moivre (Abraham de). 9, 17, 20, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 89, 90, 154.
 Monmort (Henri Louis Habert de). 9, 11, 16, 17, 20, 23, 24, 27, 29, 88, 89, 90, 154.
 Moray (Robert). 12, 404, 433, 434, 436, 438, 484, 485.
 Moulert (Symon). 385.
 Muré frères (Librairie). 29.
 Mylon (Claude). 4, 5, 6, 7, 8, 9, 184, 186, 199, 213, 216.
 Napier (John). 441.
 Newton (Isaac). 520.
 Nijhoff (Martinus). 29.
 Oudart (Nicolaas). 450, **524**.
 Paciuolo (Luca). 22, 25.
 Pappus. 184, 210, 342, 343, 407, 414, 420, 421, 427.
 Pascal (Blaise). 3, 4, 6, 7, 8, 9, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 30, 58, 90, 151, 183, 184, 186, 195,
 196, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 220, 271, 272, 345, 347, 348, 349, 350, 353, 356,
 358, 361, 362, 363, 369, 373, 376, 438, 492.
 Pell (John). 181, 183, 184, 186, 187, 188, 213, 216, 223.
 Perier (Florin). 436, 438, 492.
 Persijn (Nicolaas Huybertsz. van). **523**.
 Petit (Pierre). 205.
 Pythagore. 184, 232.
 Quillau (Jacques). 9.
 Rammazeyn (Librairie). 27.
 Reimer (G.). 272.
 Richi (Michel-Ange). 350.
 Roanez (Duc de). Voyez Gouffier (Arthus).
 Roberval (Gillis Personne de). 4, 5, 6, 7, 26, 56, 197, 199, 201, 205, 210, 413, 414.
 Rouché (Eugène). 272.
 Sauveur (Joseph). **17**, 165, 168, 555, 556.
 Savreux (Charles). 492.
 Scaliger (Joseph Justus). 450, 522.
 Schooten (Frans van). 4, 5, 6, 8, 9, 10, 27, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 73, 185, 186,
 189, 195, 199, 203, 206, 211, 223, 266, 301, 304, 312, 315, 367, 374, 394, 395.

- 409, 411, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 427, 445, 446, 499, 523, 555.
- Schuh (F.). 39, 48, 383.
- Sluse (René François de). 6, 8, 9, 189, 195, 196, 198, 199, 200, 266, 271, 272, 280, 281, 294, 295, 296, 297, 298, 301, 303, 304, 305, 307, 311, 319, 323, 325, 350, 367, 442, 443, 445, 446, 447, 448, 501, 502, 505, 507, 510, 514, 516, 517.
- Société générale néerlandaise d'assurances sur la vie et de rentes viagères, 9, 10, 14, 15.
- Snellius (Willebrordus). 382.
- Society (la Royal). 9, 14, 438.
- Spinoza (Benedictus de). 29, 30, 88.
- Stampioen de Jonge (Jan Janfz.). 412.
- Steiner (Jacob). 272.
- Struyck (Nicolaas). 9, 17, 20, 23, 30, 88, 89, 91, 154.
- Stuart (Mary Harriet). 524.
- Tacquet (Andreas). 206.
- Tannery (Paul). 3, 30, 210, 303, 316, 317, 321, 414, 416, 419, 421, 444, 448, 449.
- Tarry (G.). 272.
- Tartaglia (Nicolas). 22.
- Thurnisfiorum Fratres (Librairie). 9.
- Todhunter (I.). 9, 10, 21, 24.
- Torricelli (Evangelista). 201, 441, 483, 485, 487, 490, 491, 494, 496.
- Uylenbroek (Petrus Joannes). 414, 415.
- Verfluyts (A.). 232.
- „ (Jan). 232.
- Vlack (Adriaan). 27, 435, 478.
- Vloten (Johannes van). 29.
- Vollgraff (J. A.). 9.
- Waefbergen (Janssens van). 473.
- Wallis (John). 9, 20, 184, 185, 188, 192, 195, 196, 199, 204, 205, 216, 224, 225, 226, 227, 228, 304, 307, 309, 311, 367, 369, 373, 374, 377, 378, 379, 380.
- Willem II. 524.
- Witt (Johan de). 14, 15, 184, 208, 289, 312, 442, 443, 447, 508, 516.
- Woodfall (H.). 9.
- Worp (J. A.). 412.
- Wren (Christopher). 203, 350, 363, 367, 404, 405.

III. OUVRAGES CITÉS.

Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve une description de l'ouvrage.

Les chiffres ordinaires donnent les pages où il est question de l'ouvrage.

- J. C. Adams*, Supplementary note on the values of the Napierian logarithms of 2, 3, 5, 7 and 10, and of the modulus of common logarithms, 1887, **405**.
- A. Anderson*, Exercitat. Mathemat. Decas Prima, 1619, 421.
- Apollonius Pergaeus*, Conicorum Libr. 4. Ed. F. Commandinus, 1566, 238, 239, 244, **245**, 312, 326, 329, 331, 332, 340, 341, 345, 388, 389, 391, 420, 425.
- J. Arbuthnot*, Of the laws of chance. 1692, **9**, 10.
- Archimède*, De conoidibus et sphaeroidibus, 251, 259, **263**.
- „ De iis, quae in humido vehuntur, 18.
- „ De planorum aequilibriis five de centris gravitatis planorum, 18.
- „ De sphaera et cylindro, 237, 255, 259, 261, 334, 335, 366.
- „ Opera. Adj. Eutocii Afsalon. Commentaria, 1544, 238, 251, 255, 259, 261, 263, 266, 335, 337, 366, 502.
- „ Opera omnia cum commentariis Eutocii. Ed. J. L. Heiberg, 1880—81, 18, 192, 237, 238, 251, 255, 259, 261, 263, 335, 366, 502.
- „ Opera omnia iterum edidit J. L. Heiberg, 1910—1913, **102**.
- „ Traité de la méthode, **102**.
- F. de Beaune*, In Geometriam R. des Cartes notae breves, 426, **427**.
- J. Bernoulli*, Ars conjectandi, Opus posthumum, 1713, **9**, 10, 11, 12, 16, 17, 19, 24, 27, 28, 31, 88, 89, 154.
- P. de Billy*, Extrait d'une lettre. 1666, **523**.
- „ A problem for finding the Year of the Julian Period. 1666, **523**.
- R. Boyle*, Defensio doctrinae de Elatere et Gravitate Aëris, 1662, 436, 484.
- „ Nova Experimenta physico-mechanica, 1660, 483.

- H. Briggs*, Arithmetica Logarithmica, 1624, 441, 455, 456, 457, 459, 465.
 „ „ „ Edit. sec. per Adr. Vlack, 1628, 435, 456, 457, **478**.
W. Browne, Christ. Hugonii Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleae, 1714, **10**.
M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1900, 21, 185, 187.
R. des Cartes, Discours de la Méthode, 1637, 29.
 „ „ Géométrie, 1637, 55, 210, 315, 316, 317, 411, 413, 414, 416, 419, 421, 500.
 „ „ Geometria. Ed. Fr. à Schooten, 1649, 339, 374, 409, 411, 412, 414, 416, 417, 423, 424, 425, 426, 427, 523.
 „ „ Geometria. Ed. Fr. à Schooten, 1659, 189, 203, 301, 304, 315, 317, 339, 374, 394, 395, 409, **411**, 412, 413, 414, 415, 417, 418, 419, 420, 421, 423, 424, 425, 426, 427, 445, 446, 523.
 „ „ Geometria. Ed. Fr. à Schooten, 1683, 315, 339, 374, **411**.
 „ „ Lettres de Descartes, éd. Clerfeliier, 1667, 303, **448**.
 „ „ Œuvres. éd. de Charles Adam et Paul Tannery, 1897—1913, 29, 303, 316, 317, 321, 414, 416, 419, 421, 444, 449, 500.
J. Contereels, Arithmetica, ed. Fr. Everfdyck, 1658, 384, **385**, 386.
Euclides, Elementorum Libri XV. Auët. Chr. Clavio, 1589, 126, 232, 233, 266, 267, 269, 313, 343, 344.
P. de Fermat, De tangentibus linearum curvarum, 1679, **440**.
 „ „ Méthode de maximis et minimis expliquée, 1679, **448**.
 „ „ Methodus ad disquirendam maximam et minimam, 1679, **449**.
 „ „ Œuvres, publiées par Paul Tannery et Charles Henry, 1891—96, **3**, 4, 7, 22, 23, 25, 26, 29, 187, 197, 198, 213, 272, 303, 448, 449.
 „ „ Varia opera mathematica, 1679, 198, 199, 448, 449.
W. Fiedler, Cyklographie, 1882, **272**.
B. Frenicle de Beffy, Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos, 1657, **185**, 188.
C. Fr. Gauss, Disquisitiones mathematicae, 1801, 499.
 „ „ Werke, 1863, **499**.
G. Grandi, Geometrica demonstratio theorematum Hugonianorum, 1701, **473**.
J. Graunt, Natural and political Observations made upon the Bills of Mortality, 1665, **12**, 13.
Gregorius à St. Vincentio, Opus Geometricum, Quadratura Circuli et Sect. Coni, 1647, 194, 303, 432, 434, 452, 453, 457.
P. Guldin, Centrobarycae Libri Secundus, Tertius & Quartus, 1640—41, **281**.
P. Hérigone, Cours mathématique démontré, 1634—1655, 418.
H. van Heuraet, Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas, 1659, **189**, 395.
J. Hudde, Epistola prima de reductione aequationum, 1658, **394**, 415.
 „ „ Epistola secunda de Maximis et Minimis, 1659, 304, 505.
 „ „ Extrait d'une lettre de feu M. Hudde, 1713, **446**, 447.
Chr. Huygens, Boeckje (Manuscrit), 412.

- Chr. Huygens*, Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes, 1649, 1659, 411, 412, 413, 414, 415, 423.
- „ De Circuli Magnitudine Inventa, 1654, 3, 383.
- „ De combinationum mirandis (Manuscrit), 20.
- „ De iis, quae liquido supernatant, 1908, 8, 18.
- „ De ratiociniis in ludo aleae, 1657, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 19, 20, 23, 25, 27, 28, 29, 50, 51, 92, 93, 95, 151, 156, 157; édition hollandaise, 1660, 4, 5, 8, 51, 53, 55, 555; latine, 1657, 5, 6, 8, 9, 10, 19, 50, 54, 57, 556; traductions anglaises (voyez *Arbuthnot*, *Browne*); française, 1898, 10.
- „ Dioptrica, 1703, 8, 419.
- „ Discours de la cause de la pesanteur, 1690, 8, 439, 441, 461.
- „ Exetasis Cyclometriae, etc. 1651, 3.
- „ Fundamentum regulae nostrae ad inveniendos logarithmos, 1661, 27.
- „ Horologium, 1658, 192, 206.
- „ Horologium oscillatorium, 1673, 184, 189, 192, 195, 196, 198, 206, 207, 236, 267, 268, 273, 317, 319, 322, 325, 329, 333, 337, 347, 374, 387, 394, 395, 396, 397, 398, 400, 401, 403, 404, 439, 477, 480, 482.
- „ Illustrium quorundam problematum constructiones, 1654, 3.
- „ Lettre touchant le Cycle Harmonique, 1691, 432, 440.
- „ Manière pour trouver par le moyen des logarithmes la dimension de l'espace hyperbolique, 1668, 477.
- „ Opera reliqua, 1728, 473.
- „ Règle pour trouver les logarithmes, 1666, 431, 452, 456.
- „ Regula ad inveniendas tangentes curvarum, 1693, 447, 448, 516.
- „ Systema Saturnium, 1659, 192.
- „ Theoremata de quadratura hyperboles, etc. 1651, 3, 236, 253, 277, 432, 453.
- „ Traité de la Lumière, 1690, 8, 461.
- „ Travaux divers de jeunesse, 1908, 412.
- D. J. Korteweg*, Das Geburtsjahr von Johannes Hudde, 1896, 10.
- P. S. Laplace*, Œuvres complètes, publ. sous les auspices de l'Acad. des Sciences, T. VII, 1866, 24, 25.
- G. W. Leibniz*, Meditationes, Observationes & Crises variae Leibnitianae (Otium Hanoveranum Felleri, 1717), 9.
- „ Opera omnia, ed. Dutens. T. VI, 1768. 9.
- G. Loria*, Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logarithmica, 1900, 441.
- N. Mercator*, Logarithmo-technia, 1668, 431, 432.
- M. Merfenne*, Cogitata Physico-Mathematica, 1644, 188.
- „ Novarum observationum physico-mathematicarum, Tom. III, 1647, 217, 218.
- „ Tractatus Mechanicus theoret. et pract. 1644, 197, 198.
- „ Univ. Geometria, mixtaque Mathem. Synopsis, 1644, 201.
- A. Meyer*, Cours de calcul des probabilités, 1874, 24, 25, 26.

- A. de Moivre*, De Mensura Sortis, 1711, **9**, 24, 27, 31, 88, 89, 91, 154.
 „ The Doctrine of Chances, 1718, **9**, 17, 28, 31, 91, 154.
 „ The Doctrine of Chances, Second edition, 1738, **9**, 17, 25, 28, 31, 88, 89, 91, 154.
H. L. H. de Monmort, Essay d'analyse sur les jeux de hazard, prem. édition, 1708, 9, 24. sec. éd. 1713, **9**, 11, 16, 17, 24, 27, 31, 89, 91, 154.
Is. Newton, Enumeratio linearum tertii ordinis, 1704, 520.
Pappus Alexandrinus, Mathematicae Collectiones, Ed. F. Commandinus, 1578, 342, 343-407, 420, 421.
Bl. Pascal, Ad problemata de Cycloide Additamentum, 1658, 200, **362**.
 „ De numeris multiplicibus, 1665, **220**.
 „ Histoire de la Roulette, 1658, **350**.
 „ Historia Trochoidis sive Cycloidis; Gallice la Roulette, 1658, 203, 350, 362, 363.
 „ Lettre à M. de Carcavy, 1658, **204**, 362.
 „ Lettre à M. Huguens de Zulichem, 1659, **196**.
 „ Lettres de ses Inventiones en Géometrie, 1659, 376.
 „ Œuvres complètes, 1872, **22**, 23.
 „ Œuvres publiées par L. Brunschvigg et P. Boutroux, 1908—1914, **196**, 201, 204, 205, 220, 272, 350, 362, 363, 492.
 „ Problemata de Cycloïde, 1658, 200, 347, 348, 349, 353, 356, 358.
 „ Récit de la grande Expérience de l'Equilibre des liqueurs, 1648, **492**.
 „ Récit de l'examen et du jugement des écrits envoyés pour les prix, 1658, 205.
 „ Traité du triangle arithmétique, 1665, 20, **22**, 220.
 „ Traitez de l'Equilibre des Liqueurs, 1663, 1664, 492.
F. Perier, Lettre à Monsieur Pascal, 436, 438, **492**.
E. Rouché et Ch. de Comberousse, Traité de géométrie, 1891, **272**.
J. Sauveur, Supputation des avantages du Banquier dans le Jeu de la Bassete, 1679, 16, 17, 165, 168.
Fr. van Schooten, Commentarii, 1649, 1659, 203, 315, 374, **411**, 413, 415, 423, 424, 445, 446.
 „ Exercitationes Mathematicae, 1657, 5, 6, 8, 9, 27, **50**, 52, 54, 56, 57, 186, 301, 499, 523; édition hollandaise, 1660, 5, 6, 8, **51**, 53, 54, 55, 56, 57, 301, 499.
 „ Fundamenten der Perspective, 1660, 51.
F. Schuh, Sur quelques formules approximatives de la circonférence du cercle et sur la Cyclométrie de Huygens, 1913, 1914, **383**.
R. F. Slusius, Method of drawing tangents to all geometrical curves without any labour of calculation, 1673, **442**.
 „ Modus quo demonstrat methodum suam ducendi tangentes ad quolibet curvas absque calculo, 1673, **443**.
W. Snellius, Cyclometricus. De circuli dimensione, 1621, 382.
B. Spinoza, Opera quotquot reperta sunt, 1883, **29**.

- B. Spinoza*, Reekening van kanfen, 1687, **29**, 88.
 „ Stelkonftige reekening van den regenboog, 1687, **29**.
 „ Réimpreffion de ces deux traités par Bierens de Haan, 1884, **29**.
J. Steiner, Einige geometrische Betrachtungen, 1826, **272**.
J. Steiner, Gefammelte Werke, 1881, **272**.
N. Struyck, Uytreckening der kanfen in het fpeelen, 1716, **9**, 17, 154; traduction française, 1912, **9**.
N. Struyck, Œuvres, trad. par J. A. Vollgraff, 1912, **9**, 17, 88, 89, 154.
I. Todhunter, History of the theory of probability, 1865, **9**, 10, 21, 24.
P. J. Uytlenbroek, Chrif. Hugonii Exercitationes Mathematicae et Philofophicae, 1833, 414, 460.
J. Verfluyts, Zes-en-negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras, 1914, 184, **232**.
A. Vlack, Arithmetica logarithmica, Edit. fec. 1628. Voyez *Briggs*.
 „ Trigonometria Artificialis, 1633, **27**.
J. Wallis, Arithmetica Infinitorum, 1656, 205.
 „ Commertium epiftolicum, 1658, 185, 188, 224, 225, 226, 227, 228, 379.
 „ De Algebra Tractatus cum variis Appendicibus, 1693, **9**, 20, 185, 188, 225, 226, 227, 228, 379.
 „ Difcourfe of combinations, alternations and aliquot parts, 1685, **20**.
 „ Mechanica, five de Motu, Pars fecunda, 1670, 377.
 „ Opera Mathematica. Volumen primum, 1695, **102**, 205, 367, 377, 378, 379, 405.
 „ Tractatus duo, 1659, 192, 204, 205, 367, 377, 378, 379, 380, 405.
J. de Witt, Elementa Curvarum linearum, 1659, 312.
 „ Waerdije van Lijfrenten naar proportie van Los-renten, 1671, **15**, 59.
J. A. Worp, De jeugd van Chriftiaan Huygens volgens een Handschrift van zijn vader, 1913, **412**.
 Archives Néerlandaïfes, 1913, 1914, 383.
 Bibliotheca Mathematica, 1900, 441.
 Bullettino di bibliografia e di ftoria delle fcienze matematiche e fifiche, 1879, 449.
 Comptes rendus hebdomadaires des féances de l'Académie des Sciences, 1868, 431, 452.
 Divers ouvrages de Mathématique et de Phyfique par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, 1693, 205, 447, 516.
 Encyklopädie der mathematifchen Wiffenfchaften mit Einffchluss ihrer Anwendungen, 1900—
 —1904, T. I, **188**, 214.
 Journal des Sçavans, 1666, 523; 1668, 434, 477; 1679, 1, 16, 17, 165.
 Journal littéraire, 1713, **440**.
 Mededeelingen van de Directie van de Algemeene Maatfchappij van Levensverzekering en Lijf-rente, 1895, **10**, 15; 1896, 1897, 15.
 Mémoires pour fervir à l'hiftoire des affurances fur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas, 1898, **10**, 15.

Oud-Holland, Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederl. Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz., 1913, 412.

Philosophical Transactions, 1666, 523; 1673, 442, 443; 1711, 9.

Proceedings of the Royal Society of London, 1887, 465.

Registre des procès-verbaux de l'Académie des Sciences, 1666, 431.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1896, 10.



IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Dans cette Table les matières scientifiques traitées dans ce Volume XIV ont été groupées sous divers articles généraux, savoir :

Algèbre.	frères Huygens.	Philosophie.
Arithmétique.	Géographie.	Philologie.
Astronomie.	Géométrie.	Physique.
Chronologie.	Mécanique.	Poids et mesures.
Chronométrie.	Musique.	Probabilités.
Cours des études des	Œuvres.	Statistique.

Pour connaître tous les endroits où quelque sujet est traité on cherchera dans la Table l'article général auquel il appartient. On y trouvera, soit du sujet même, soit d'un sous-article qui devra y conduire, la nomenclature adoptée dans l'ordre alphabétique de la Table.

Les chiffres indiquent les pages.

On a marqué d'un astérisque les endroits qui ont été jugés les plus importants.

L'article *Œuvres* se rapporte aux écrits de Huygens, soit publiés ici ou ailleurs, soit seulement ébauchés.

ACOUSTIQUE. Théorie des sons harmoniques. 17; (voir *Œuvres*: Lettre de M. Huygens à l'Auteur touchant le Cycle Harmonique).

ALGÈBRE. 9, 54*—57*; (voir *Analyse combinatoire*, *Analyse indéterminée du premier degré*, *Équations algébriques*, *Équations diophantines*, *Inégalités algébriques*, *Interpolation*, *Logarithmes*, *Maxima et minima*, *Nombres*, *Principes et applications du calcul différentiel et intégral*, *Suites*, *Triangle arithmétique de Pascal*).

ANALYSE COMBINATOIRE. 19*, 20*, 23*, 25; (voir *Œuvres*: De combinationum mirandis).

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ. Trouver un nombre qui, divisé par trois nombres donnés, laisse des restes donnés. 450, 521*—523*.

APPLICATION DE LA THÉORIE DU CENTRE DE GRAVITÉ AUX QUADRATURES APPROCHÉES. De l'hyperbole. 432*—435*, 453*—456*, 474, 475; Du cercle. 183, 381*, 382*.

ARC EN CIEL. 29.

ARCS CYCLOÏDAUX DU PENDULE. 205*, 206*.

ARITHMÉTIQUE. 50—55; (voir *Nombres, Problème d'Everfdyck, Suites, Triangle arithmétique de Pascal*). Algorithmes appliqués par Huygens: de la division. 152, de la multiplication. 475, de l'extraction de la racine carrée. 216*, 217. Vérification du résultat d'une multiplication. 224, 229.

ASTRONOMIE. 9; (voir *Atmosphère, Chronométrie, Cycle Julien*).

ATMOSPHÈRE (voir *Poids spécifiques. De l'air*). Densité de l'atmosphère à différentes altitudes. 436*—439*, 484*—489*, 491, 492*—496*. Hauteur fictive de l'atmosphère supposée homogène. 437, 438, 483*, 484—489, 491, 494, 495*—497*.

BAROMÈTRE. 493, 494; (voir *Poids spécifiques. Du mercure*). Expériences de Cassini sur une montagne près de Toulon. 439, 495*, 496*, de Perier sur le Puy de Dôme. 436*, 438*, 439*, 492*—494*. Hauteur de la colonne barométrique au niveau de la mer. 438, 483*, 484, 491, 492, 495—497, à diverses altitudes (voir *Atmosphère*).

CALCUL DES RENTES VIAGÈRES. 9, 13*—15*.

CENTRE DE GRAVITÉ. 18, 183; (voir *Application de la théorie du centre de gravité aux quadratures approchées, Œuvres: Theoremata de quadratura hyperboles, elliptis et circuli ex dato portionum gravitatis centro, Perles de de Sluse, Théorème de Guldin, Théorème sur la situation des centres de gravité des solides de révolution engendrés par une même figure autour de deux axes perpendiculaires l'un à l'autre*). Arc cycloïdal. 203*, 363, 368*—373*, 381, 382; Cissoïde. 200; Logarithmique. 441, 467*—470*; Paraboles de divers degrés. 197*, 198*, 199, 273, 276, 281*, 282*; Segment de parabole. 432, 454; Segment et demi-segment cycloïdal. 200*—202*, 204, 353*—357*, 376*—378*, 406*; Segment de sinusoïde. 353*—355*, 357; Solides de révolution engendrés par la logarithmique. 442, 471*—473*, par les paraboles de divers degrés. 197*, 198*, 273, 282*; Solides de révolution entiers ou partiels engendrés par un segment cycloïdal. 201*, 353, 358*—361*, par un segment de cercle. 358*, 361*, par un segment de sinusoïde. 358*—361*; Surfaces cylindriques. 354*—357*. Surfaces de révolution entiers ou partiels engendrés par un arc cycloïdal. 203*, 363*.

CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION. 374.

CERCLE (voir *Centre de gravité, Décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés, Quadrature de surfaces planes, Rectification approchée d'un arc de cercle ou de la circonférence entière*).

CHALEUR (voir *Influence de la température sur la densité de l'air*).

CHRONOLOGIE (voir *Cycle Julien*).

CHRONOMÉTRIE (voir *Arcs cycloïdaux du pendule, Isochronisme de la cycloïde, Œuvres: Horologium, Horologium oscillatorium*).

CINÉMATIQUE (voir *Centre instantané de rotation*).

CISSOÏDE. 183, 199, 200; (voir *Centre de gravité, Cubature de solides de révolution, Quadrature de surfaces planes, Quadrature et cubature d'espaces qui s'étendent à l'infini*).

CONCHOÏDE. 183, 199; (voir *Conchoïde de de Sluse, Cubature de solides de révolution, Cubature*

de solides engendrés par la révolution d'une courbe autour de son asymptote, Œuvres: Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes, Quadrature de surfaces planes, Quadrature et cubature d'espaces qui s'étendent à l'infini).

CONCHOÏDE DE DE SLUSE. 514*; (voir *Points d'inflexion, Tangentes*).

CÔNE (voir *Stéréométrie*).

CONIQUES. 50, 51; (voir *Cercle, Courbes adjointes aux courbes méridiennes des surfaces de révolution du second degré, Développées, Parabole, Hyperbole*). Détermination de la sous-normale. 314, 315*, 317*, 339*, 340*, 387, 391; Détermination du „latus transversum” et du „latus rectum” d'une conique donnée par une équation quelconque du deuxième degré. 413, 423*—427*.

CONOÏDE HYPERBOLIQUE (= segment d'hyperboloïde de révolution à deux nappes); (voir *Courbes adjointes aux courbes méridiennes des surfaces de révolution du second degré, Cubature de solides de révolution, Quadrature de surfaces de révolution*).

CONOÏDE PARABOLIQUE (= segment de paraboloïde de révolution); (voir *Courbes adjointes aux courbes méridiennes des surfaces de révolution du second degré, Quadrature de surfaces de révolution*).

CONSTITUTION DE LA MATIÈRE. Explication de l'élasticité de l'air. 485*.

CONSTRUCTION DE HUYGENS DE L'HEPTAGONE RÉGULIER. 448, 449, 498*—500*.

COURBE DE GUTSCHOVEN. 501*, 504, 505; (voir *Cubature de solides de révolution, Quadrature de surfaces planes, Quadrature et cubature d'espaces qui s'étendent à l'infini, Tangentes*).

COURBES (voir *Cercle, Cissoïde, Conchoïde, Conchoïde de de Sluse, Coniques, Courbe de Gutschoven, Courbes diverses, Courbes parallèles ou équidistantes, Cubiques, Cycloïde, Développantes, Développées, Épicycloïde, Folium de Descartes, Hyperboles de divers degrés, Logarithmique, Ovals de Descartes, Parabole virtuelle de Gregorius à St. Vincentio, Paraboles de divers degrés, Perles de de Sluse, Quadratrice de Dinostrate, Représentation graphique de la mortalité, Sinusoïde*).

COURBES ADJOINTES AUX COURBES MÉRIDiennes DES SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ.

190*, 192, 193, 194, 336*. Conoïde hyperbolique 190, 193, 194, 315*, 316*, 324, 325, 329, 341*—344*; Conoïde parabolique. 190, 314, 338*, 339*; Sphéroïde allongé. 190, 320*, 321*, 341*—344*; Sphéroïde aplati. 190, 193, 194, 317*, 318*, 324, 325, 329, 341, 344*—346*.

COURBES DIVERSES. 183, 300. $(2a^2 - x^2)^3 y^2 - a^8 = 0$. Construction 397. Quadrature 396*.

COURBES PARALLÈLES OU ÉQUIDISTANTES. Théorie générale. 184, 207*, 398*, 401*—403*.

COURS DES ÉTUDES DES FRÈRES HUYGENS. 3, 10, 54*, 55*, 411, 412*.

CUBATURE DE SOLIDES DE RÉVOLUTION. 183 (voir *Cubature de solides engendrés par la révolution d'une courbe autour de son asymptote, Perles de de Sluse, Quadrature et cubature d'espaces qui s'étendent à l'infini, Stéréométrie, Théorème de Guldin*). Cissoïde 200*; Conchoïde. 306*—308*; Cycloïde ou segment cycloïdal. 200*—202*, 205*, 253, 356*, 357*, 377*, 378*, 406*, 407; Hyperbole (Conoïde hyperbolique). 190*, 236, 263*, 264*, 265; Logarithmique. 441*, 471*; Paraboles de divers degrés. 197*, 198*, 199, 273, 276, 279*—281*, 287*. Sinusoïde, 356*, 357*.

CUBATURE DE SOLIDES ENGENDRÉS PAR LA RÉVOLUTION D'UNE COURBE AUTOUR DE SON ASYMPTOTE. Conchoïde. 306*—308*; Hyperbole. 307; Logarithmique. 467*, 468.

CUBIQUES (voir *Géométrie cartésienne*, *Parabole cubique*).

CYCLE JULIEN 450, 522*, 523*.

CYCLOÏDE. 183, 200*, 205, 347*, 359; (voir *Arcs cycloïdaux du pendule*, *Centre de gravité*, *Cubature de solides de révolution*, *Développées*, *Problèmes et écrits de Pascal sur la cycloïde*, *Quadrature de surfaces de révolution*, *Quadrature de surfaces planes*, *Rectification*, *Tangentes*).

DÉCRIRE UN CERCLE QUI COUPE TROIS CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES DONNÉS. 184, 271*, 272*.

DERNIER PROBLÈME DE PROBABILITÉS PROPOSÉ PAR HUYGENS À HUDDE. 10*, 38*—48*, 132*—144*.

DÉVELOPPANTES (voir *Courbes parallèles ou équidistantes*, *Développées*).

DÉVELOPPÉES (voir *Arcs cycloïdaux du pendule*). Coniques. 206*, 387*—396*; Cycloïde. 206*, 207, 347, 373, 404*, 405*; Épicycloïde. 406; Hyperboles de divers degrés. 206*, 207*; Paraboles de divers degrés. 206*, 207*. Théorie générale. 183, 184, 205*—207*, 387*, 397*—405*.

DIVISION D'UN SEGMENT EN MOYENNE ET EXTRÊME RAISON. 332—334.

DISCUSSIONS SUR LA QUESTION SI CERTAINS PROBLÈMES DOIVENT ÊTRE CONSIDÉRÉS COMME PLANS OU COMME SOLIDES. 420*—422*.

DUPLICATION DU CUBE (voir *Logarithmique*. Interpolation à l'aide de la logarithmique d'un nombre quelconque de segments continûment proportionnels).

DYNAMIQUE (voir *Isochronisme de la cycloïde*).

ELLIPSE (voir *Coniques*).

ÉPICYCLOÏDE (voir *Développées*). Propriétés. 407, 408.

ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES (voir *Équations cubiques*, *Polygones réguliers*, *Résolution par construction des équations algébriques*). Méthode de Hudde pour la recherche des facteurs rationnels. 393, 394*.

ÉQUATIONS CUBIQUES. Dédution des règles de Cardan. 414*, 415*.

ÉQUATION DE PELL (voir *Équations diophantines*: $ax^2 + 1 = y^2$).

ÉQUATIONS DIOPHANTINES 56, 57; (voir *Analyse indéterminée du premier degré*). $a + x^2 = y^2$. 212*, 213*; $ax^2 + 1 = y^2$. 183, 184, 186*—188*, 213*—217*, 223*—228*; $ax^2 - 1 = y^2$. 187, 214; $ax^2 + k = y^2$. 187, 214, 215, 217.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES. 155*.

EXPÉRIENCES DE HUYGENS POUR DÉTERMINER LE POIDS SPÉCIFIQUE DE L'AIR. 483*.

FOLIUM DE DESCARTES. 183, 301, 446, 506—508, 520; (voir *Tangentes*). Largeur maximum de la boucle. 301*, 302*, 506, 507.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES. 24, 25.

GÉOGRAPHIE. 9.

GÉOMÉTRIE. 50—55, 185*; (voir *Centre de gravité*, *Cinématique*, *Courbes*, *Cubature de solides de révolution*, *Développantes*, *Développées*, *Discussions sur la question si certains problèmes doivent être considérés comme plans ou comme solides*, *Duplication du cube*, *Géométrie cartésienne*, *Lieux géométriques*, *Maxima et minima*, *Méthode de démonstration des anciens*, *Nor-*

males, Perspective, Planimétrie, Points d'inflexion, Polygones circonscrits ou inscrits à une courbe donnée, Polygones réguliers, Principes et applications du calcul différentiel et intégral, Quadrature de surfaces courbes, Quadrature de surfaces planes, Quantités commensurables, Rectification, Réduction de divers problèmes à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, Résolution par construction des équations algébriques, Restauration des lieux plans d'Apollonius, Stéréométrie, Surfaces courbes, Tangentes).

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE. 54, 55, 184, 413, 414*, 449; (voir *Coniques, Œuvres: Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes*). Discussion de l'équation générale du troisième degré. 449*, 519, 520; Équation de la ligne droite. 184, 230, du cercle. 184, 231; Formules pour passer d'un système de coordonnées cartésiennes à un autre. 519, 520. Problème de Pappus. 210, 211, 414*.

HYDROSTATIQUE. 8, 18.

HYPERBOLE (voir *Coniques, Cubature de solides de révolution, Cubature de solides engendrés par la révolution d'une courbe autour de son asymptote, Polygones circonscrits ou inscrits à une courbe donnée, Quadrature de surfaces planes*). Construction des asymptotes. 210, 211; Propriétés des segments successifs déterminés par les points d'intersection d'un système de droites parallèles à l'axe. 191, 247, 248; Propriétés diverses. 308, 309, 453, 456, 457; Théorème sur l'égalité des aires de deux segments d'une même hyperbole. 194*, 327, 330; Tirer par un point donné de l'hyperbole une corde qui détermine un segment dont l'aire est égale à celle d'un segment donné. 194*, 325*, 327*, 330*.

HYPERBOLES DE DIVERS DEGRÉS. 183, 191, 198*, 199, 278, 279*; (voir *Développées, Quadrature de surfaces planes, Quadrature et cubature de surfaces qui s'étendent à l'infini*).

INDIVISIBLES. Méthode des indivisibles. 191*, 201, 337*.

INÉGALITÉS ALGÈBRIQUES. 273, 274, 283.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR LA DENSITÉ DE L'AIR. 436, 493.

INTÉGRALES DÉFINIES. 24—26.

INTERPOLATION. 12, 13; (voir *Duplication du cube*).

ISOCRONISME DE LA CYCLOÏDE. 206*.

JEUX DE HASARD. 3, 4, 10, 169; (voir *Règles et probabilités de divers jeux de hasard*).

LENTILLES APLANATIQUES À SURFACES SPHÉRIQUES. 419*.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES (voir *Œuvres: Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes*).

LOGARITHMES. 16, 26, 27*, 156, 159—162, 193, 555*; (voir *Logarithmique, Quadrature de l'hyperbole par les logarithmes*). Application au cycle harmonique (voir *Acoustique*); Calcul de $\log e$. 441*, 464*, 465*; Calcul de $\log \log e$. 435*, 477*; Calcul des logarithmes. 431*—434*, 451*—459*; Série logarithmique de Mercator. 431*, 432; Tables de logarithmes. 434*, 435*, 441*, 455, 456, 459, 465, 478*.

LOGARITHMIQUE. 439*—442*, 456*—473*; (voir *Centre de gravité: Logarithmique, Solides de révolution engendrés par la logarithmique, Cubature de solides de révolution, Cubature de solides engendrés par la révolution d'une courbe autour de son asymptote, Quadrature de surfaces planes, Quadrature et cubature d'espaces qui s'étendent à l'infini*). Construction par points.

- 440*, 441*, 461*; Définition. 441*; Invariabilité de la longueur de la sous-tangente. 441*, 463*, 464*; Interpolation à l'aide de la logarithmique d'un nombre quelconque de segments continûment proportionnels. 441, 464*.
- LOI DE BOYLE. 436*, 437*, 484, 485, 491. Déviations de la loi de Boyle. 436*, 485*, 493.
- MAXIMA ET MINIMA (voir *Folium de Descartes*, *Méthode de Fermat pour les maxima et minima*, *Œuvres*: Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la *Geometria Renati Descartes*, *Règle de Hudde pour trouver la valeur maximum ou minimum d'une fraction algébrique*).
- MÉCANIQUE. 18; (voir *Cinématique*, *Dynamique*, *Hydrostatique*, *Statique*).
- MÉTHODE DE DÉMONSTRATION DES ANCIENS. 18*, 54, 55, 189, 190*—192*, 198, 201, 209, 237, 290, 311, 336*—338*, 366, 466*. Postulats d'Archimède sur les longueurs des lignes qui ont les mêmes points terminaux et sur les surfaces qui se terminent à un même contour. 191*, 237*, 238*, 255*, 262.
- MÉTHODE DE DESCARTES POUR LES NORMALES ET LES TANGENTES. 443*, 444*.
- MÉTHODE DE FERMAT POUR LES MAXIMA ET MINIMA. 299, 301, 302, 303, 418, 448.
- MÉTHODE DE FERMAT POUR LES TANGENTES. 297*, 298, 299*, 418, 442*, 443*, 447*, 448*.
- MÉTHODE DE HUYGENS POUR LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DU CALCUL DES PROBABILITÉS. 19*, 20*
- MÉTHODES DIVERSES DE HUYGENS POUR LES TANGENTES DES COURBES ALGÈBRIQUES. 442*—446*, 504*—517*; (voir *Œuvres*: *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*).
- MUSIQUE (voir *Acoustique*).
- NOMBRES (voir *Équations diophantines*, *Nombres amicaux*, *Nombres incommensurables*, *Nombre parfaits*, *Nombres triangulaires*, *Triangle arithmétique de Pascal*). Caractères de divisibilité et détermination du résidu. 186*, 219*—222*, 224; Caractères des nombres carrés. 186*, 187, 217, 218, 220—223, 229, des nombres cubiques. 218, 229, des nombres cubocubiques. 229; Propriétés des nombres premiers. 213; Réduction à un système non décimal. 218*, 220—223; Théorie des nombres. 56*, 57*, 183*—186*.
- NOMBRES AMICAUX. 186*, 187.
- NOMBRES INCOMMENSURABLES. 126*.
- NOMBRES PARFAITS. 187.
- NOMBRES TRIANGULAIRES. 21, 140, 141, 144*, 145*, 146, 147. Sommation de la suite infinie des valeurs réciproques des nombres triangulaires. 20*, 21*, 140, 141, 145*—150*.
- NORMALES (voir *Coniques*, *Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes*, *Œuvres*: Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la *Geometria Renati Descartes*).
- ŒUVRES. 434*, 439*. *Travaux divers de Jeunesse*. 412*.
- De iis quæ liquido supernatant*. 8, 18.
- Exetasis Cyclometrie Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio*. 3.
- Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis, et circuli ex dato portionum gravitatis centro*. 3, 236*, 253*, 277, 432*, 453*, 454*.
- De Circuli Magnitudine Inventa*. 3, 383.
- Illustrium quorundam problematum constructiones*. 3.
- Horologium*. 192, 206.

Systema Saturnium. 192.

Dioptrica. 8, 419*.

Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes. 409*—427*. Cas particulier où la recherche d'un lieu géométrique amène un théorème. 411*, 412*, 416*, 417*. Construction de la normale à la conchoïde. 417, 418. Méthodes pour trouver les maxima et minima et les tangentes. 418*. Cas particulier des ovales de Descartes où ils deviennent des cercles. 419*. Forme de l'ovale de Descartes dans le troisième des cas qu'il distingue. 420*—422*. Dédution des règles de Cardan pour la résolution de l'équation cubique 414*, 415*.

De ratiociniis in ludo aleæ. Édition latine. 5*, 6*, 8*—10*, 19, 50*, 52*, 54*, 57, 556*. Traductions anglaises. 9*, française 10*. Édition hollandaise. 3*—10*, 19*, 51*, 53*—91*, 555*. Préface de van Schooten. 54*, 55*. Préface de Huygens. 8*, 54*—59*. Introduction et Prop. I—III. 60*—67*; (voir *Point de départ et théorème fondamental de Huygens concernant le calcul des probabilités*). Prop. IV—IX. 66*—77*; (voir *Problème des partis*). Prop. X—XIV. 76*—87*; (voir *Problèmes des dés*). Exercices 88*—91*; (voir sur ces Exercices en général. 5*, 7*, 8, 15, 29*—1*, 58*, 59*, 88*, 89* et en particulier sur l'Exercice I. 29*—31*, 88*, 89*; II. 10, 11*, 29*, 31*; 88*, 89*, 95*; III. 31*, 88*, 89*; IV 10, 11*, 20*, 29*, 31*, 88*—91*, 95*, 97*—101*; V. 11, 12, 15, 29*, 31*, 90*, 91*, 151*—155*).

Travaux mathématiques divers de 1655 à 1659. 181*—407*; (voir pour un exposé du contenu les p. 529—531).

Travaux mathématiques divers de 1661 à 1666. 429*—524*; (voir pour un exposé du contenu la p. 532).

Règle pour trouver les logarithmes. 431*, 452*, 456*.

Manière pour trouver par le moyen des logarithmes la dimension de l'espace hyperbolique. 477*.

De combinationum mirandis (inédit). 20*.

Horologium oscillatorium. 184*, 189, 192*, 195*, 196*, 198*, 206*, 207*, 236*, 267*, 268*, 273*, 317*, 319*, 322*, 325*, 329*, 333*, 337*, 347, 374*, 387*, 394*—398*, 400*, 401*, 403*, 404*, 439, 477*, 480*, 482*.

Traité de la lumière. 8, 461.

Discours de la cause de la pesanteur. 8, 439*, 441*, 461*.

Lettre de Mr. Huygens à l'auteur touchant le Cycle Harmonique. 432*, 433*, 440.

Regula ad inveniendas tangentes curvarum. 288*, 289*, 418*, 442*, 443*, 445*—448*, 516*.

OPTIQUE (voir *Arc-en-Ciel*, *Lentilles aplanatiques à surfaces sphériques*, *Œuvres*: *Dioptrica*, *Traité de la lumière*, *Ovales de Descartes*).

OVALES DE DESCARTES (voir *Œuvres*: *Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes*).

PARABOLE (voir *Centre de gravité*, *Polygones circonscrits ou inscrits à une courbe donnée*, *Quadrature de surfaces de révolution*, *Quadrature de surfaces planes*, *Rectification*, *Tangentes*). Cas où trois points d'intersection d'une parabole et d'un cercle coïncident. 413*; Propriétés des diamètres de la parabole. 312, 313.

PARABOLE CUBIQUE. 395, 520*; (voir *Rectification*).

PARABOLE VIRTUELLE DE GREGORIUS A ST. VINCENTIO, 302*; (voir *Quadrature de surfaces planes*).

PARABOLES DE DIVERS DEGRÉS. 183, 191, 197*, 198*, 273*, 281*, 275, 276, 285, 520; (voir *Centre de gravité, Cubature de solides de révolution, Développées, Parabole cubique, Polygones circonscrits ou inscrits à une courbe donnée, Quadrature de surfaces planes*).

PART DU DIABLE DANS LES JEUX OÙ LES COUPS PEUVENT SE RÉPÉTER INDÉFINIMENT SANS ÉPUISER L'ENJEU. 47*, 48*.

PERLES DE DE SLUSE (courbes comprises dans l'équation $(a - y)^r y^s = b^r + \dots + x^p$) 199*; $ay^3 - y^4 = a^2 x^2$. Quadrature. 303*—305*; $ay^3 - y^4 = x^4$. Cubature du solide de révolution. 304*, 305*; $apy = -x^2(a - x)$. Centre de gravité. 294, 297*. Cubature du solide de révolution. 297. Point d'inflexion. 299*. Quadrature 294*—296*, 300*. Tangente. 199, 295, 297*—299*, 305).

PERSPECTIVE. 53.

PHILOLOGIE. Indications de Huygens pour servir à l'occasion de la traduction latine de son ouvrage sur le calcul des probabilités. 5*, 6*, 56, 57.

PHILOSOPHIE (voir *Constitution de la matière, Philosophie Cartésienne*).

PHILOSOPHIE CARTÉSIENNE. 29*.

PHYSIQUE. 18*; (voir *Acoustique, Atmosphère, Baromètre, Chaleur, Constitution de la matière, Loi de Boyle, Optique, Poids spécifiques*).

PLANIMÉTRIE (voir *Problèmes de planimétrie*). Démonstration de Huygens du théorème de Pythagore. 184, 232*, 233*; Théorèmes de planimétrie. 184, 240, 241, 363, 364, 369, 374, 375, 379, 380.

POIDS ET MESURES. Comparaison des mesures anglaises et françaises. 438, 492*.

POIDS SPÉCIFIQUES. De l'air. 438, 483, 494, 496, 497; (voir *Expériences de Huygens pour déterminer le poids spécifique de l'air, Influence de la température sur la densité de l'air*); Du mercure. 438, 483*, 491, 494, 496.

POINT DE DÉPART ET THÉORÈME FONDAMENTAL DE HUYGENS CONCERNANT LE CALCUL DES PROBABILITÉS. 7*, 11, 18*, 19*, 58*—67*, 92.

POINTS D'INFLEXION (voir *Perles de de Sluse*). Conchoïde de de Sluse. 515.

POLYGONES CIRCONSCRITS OU INSCRITS À UNE COURBE DONNÉE. 337*, 338*, 400*, 401*, 403. Hyperbole. 245—248, 250—252, 257, 258, 260, 261—263; Parabole 237—245, 250—252, 254, 255, 260—262, 338; Paraboles de divers degrés. 276—278, 286, 287.

POLYGONES RÉGULIERS. (voir *Construction de Huygens de l'heptagone régulier*). Détermination des équations dont dépend la construction des polygones réguliers. 499*.

PRINCIPES ET APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL. 204*, 205*, 377*, 378*, 442*; (voir *Développantes, Développées, Équations fonctionnelles, Fonctions génératrices, Indivisibles, Intégrales définies, Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes, Méthode de Fermat pour les maxima et minima, Méthode de Fermat pour les tangentes, Méthodes diverses de Huygens pour les tangentes des courbes algébriques, Œuvres: Regula ad inveniendas tangentes curvarum, Problèmes et écrits de Pascal sur la cycloïde, Règle de Hudde pour trouver la valeur*

maximum ou minimum d'une fraction algébrique, Règle générale de Hudde pour les tangentes des courbes algébriques).

PROBABILITÉS (voir *Calcul des rentes viagères, Jeux de hasard, Œuvres: De ratiociniis in ludo aleae, Méthode de Huygens pour la résolution des problèmes du calcul des probabilités, Part du diable dans les jeux où les coups peuvent se répéter indéfiniment sans épuiser l'enjeu, Point de départ et théorème fondamental de Huygens concernant le calcul des probabilités, Problèmes divers du calcul des probabilités, Vie moyenne et probabilités de vie*). Origine et développement du calcul des probabilités. 3*, 4*, 19, 20*, 22, 25, 30*, 58*, 59*.

PROBLÈME DES PARTIS. 4*, 5*, 7*, 8*, 19, 21*—26*, 28*, 29*, 60*, 61*, 66*—77*, 92*—95*.

PROBLÈME D'EVERSDYCK. 184, 384—386.

PROBLÈMES CONCERNANT LA QUADRATURE DE LA SURFACE DU CONOÏDE PARABOLIQUE. 267—270.

PROBLÈMES DE PLANIMÉTRIE. 184, 208, 209; (voir *Décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés, Division d'un segment en moyenne et extrême raison*).

PROBLÈMES DES DÉS. 4*, 19, 26*, 76, 77. En combien de fois peut on accepter de jeter n fix avec n dés. Cas particuliers. 16, 26*—28*, 78*—83*, 156*—163*; Problèmes où il s'agit de deux joueurs dont l'un doit jeter 7 et l'autre 6 points avec deux dés. 4*, 6*, 19*, 84*—87*; Trouver le nombre de dés avec lesquels on peut accepter de jeter 2 fix du premier coup. 28*, 82*—85*.

PROBLÈMES DIVERS DU CALCUL DES PROBABILITÉS. 3*, 6*—8*, 19, 56—59; (voir *Œuvres: De ratiociniis in ludo aleae, Problème des partis, Problèmes des dés, Problèmes sur la durée des partis, Problèmes sur l'avantage ou désavantage de la primauté*).

PROBLÈMES ET ÉCRITS DE PASCAL SUR LA CYCLOÏDE. 183, 200*—205*, 347*—350*, 353*, 358*, 376*.

PROBLÈMES SUR LA DURÉE DES PARTIES. 91*.

PROBLÈMES SUR L'AVANTAGE OU DÉSAVANTAGE DE LA PRIMAUTÉ, 11*, 31*; (voir *Dernier problème de probabilités proposé par Huygens à Hudde*). Cas où le jeu est gagné par celui qui réuffit le premier à faire un coup déterminé. 6*, 10, 31*—38*, 102*—132*; (voir *Œuvres: De ratiociniis in ludo aleae. Exercice II.*); Cas où l'on doit gagner deux parties consécutives pour gagner le jeu. 17*, 18*, 169*—179*.

QUADRATRICE DE DINOSTRATE. 183, 407.

QUADRATURE DE L'HYPÉRBOLÉ PAR LES LOGARITHMES. 432*—437*, 452*, 457, 474*—482*, 486, 495, 496.

QUADRATURE DE SURFACES COURBES (voir *Quadrature de surfaces cylindriques, Quadrature de surfaces de révolution*).

QUADRATURE DE SURFACES CYLINDRIQUES. 348*—350*, 377.

QUADRATURE DE SURFACES DE RÉVOLUTION. 190*, 314*, 315, 317, 320. Conoïde hyperbolique; (voir *Relation entre les quadratures des surfaces du sphéroïde aplati et du conoïde hyperbolique*). 183, 188, 190*, 192, 193*, 195, 196*, 315*, 316*, 335*, 336*; Conoïde parabolique (voir *Problèmes concernant la quadrature de la surface du conoïde parabolique*). 183, 188*—190*, 191, 192, 195, 196*, 200*, 236*, 254, 259*—268*, 314*—315*, 334*; Sphère. 334; Sphéroïde allongé. 183, 188, 190*, 192, 195, 196*, 320*—324*, 335, 336*; Sphéroïde aplati (voir *Relation entre les quadratures des surfaces du sphéroïde aplati et du*

- conoïde hyperbolique*). 183, 188, 190*, 192, 193*, 195, 196*, 317*—319*, 335*, 336*; Surfaces engendrées par la révolution de la cycloïde. 203*, 373*, 374, d'une parabole autour de son appliquée. 196*, 197*; Tronc de cône. 259, 261.
- QUADRATURE DE SURFACES PLANES (voir *Courbes diverses, Perles de de Sluse, Quadrature et cubature d'espaces qui s'étendent à l'infini*). Cercle (voir *Réduction de divers problèmes à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole*); Cissoïde. 200, 309*—312*, 368, 502; Conchoïde. 306*, 308*, 309*; Courbe de Gutschoven. 449, 501*—503*; Cycloïde 200*—202*, 348*—352*, 363*, 406, 407; Hyperbole (voir *Application de la théorie du centre de gravité à la quadrature approchée de l'hyperbole, Quadrature de l'hyperbole par les logarithmes, Réduction de divers problèmes à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, Réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole et réciproquement*). Hyperboles de divers degrés. 198*, 199*, 279, 287*—293*, 336*; Logarithmique. 441*, 462*—469*, 471*; Parabole. 273; Parabole virtuelle de Gregorius a St. Vincentio. 303; Paraboles de divers degrés. 197*—199*, 273, 276*—280*, 285*—287*, 336*; Sinusoïde. 348*, 349*, 352.
- QUADRATURE ET CUBATURE D'ESPACES QUI S'ÉTENDENT À L'INFINI. 199*. Cissoïde. 309*—312*; Conchoïde. 306*, 308*, 309*; Courbe de Gutschoven. 502*, 503; Hyperboles de divers degrés. 198*, 199*, 279*, 288*—293*; Logarithmique. 464*, 406*—468*, 471*.
- QUANTITÉS COMMENSURABLES. Théorèmes sur les quantités commensurables. 266, 267, 324.
- RECTIFICATION. 395, 396. Cercle (voir *Rectification approchée d'un arc de cercle ou de la circonférence entière*); Cycloïde. 203*, 363*—367*, 404, 405. Méthodes générales. 189*; Parabole (voir *Réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole et réciproquement*). Rectification par les logarithmes. 435*, 481*, 482*, Parabole cubique. 189.
- RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE OU DE LA CIRCONFÉRENCE ENTIÈRE. 183, 381*—383*, 450, 524*.
- RÉDUCTION DE DIVERS PROBLÈMES À LA QUADRATURE DU CERCLE OU DE L'HYPERBOLE. 200*.
- RÉDUCTION DE LA RECTIFICATION DE LA PARABOLE À LA QUADRATURE DE L'HYPERBOLE ET RÉCIPROQUEMENT. 183, 188*, 190, 191, 195, 196, 234*—237*, 249*—253*, 335, 336, 435, 481, 482.
- RÈGLE DE HUDDE POUR TROUVER LA VALEUR MAXIMUM OU MINIMUM D'UNE FRACTION ALGÈBRE. 301*, 443*, 444, 504, 505*, 506—509, 514, 515.
- RÈGLE GÉNÉRALE DE HUDDE POUR LES TANGENTES D'UNE COURBE ALGÈBRE. 446*, 447*, 516, 517*.
- RÈGLES ET PROBABILITÉS DE DIVERS JEUX DE HASARD. Jeu de la Bassette. 16*, 17*, 164*—168*, 555*, 556*; Jeu de Quinquenove. 16*.
- RELATION ENTRE LES QUADRATURES DES SURFACES DU SPHÉROÏDE APLATI ET DU CONOÏDE HYPERBOLIQUE. 192*—195*, 324*—326*, 329*—335*. Cas particulier important 194*, 195*.
- REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA MORTALITÉ. 12*—14*.
- RÉSOLUTION PAR CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES. 421, 422. Équations cubiques. 498—500.
- RESTAURATION DES LIEUX PLANS D'APOLLONIUS. 50, 51.

SINUSOÏDE (= courbe BVC de la p. 348). 348*. ; (voir *Centre de gravité, Cubature de solides de révolution, Quadrature de surfaces planes*).

SOMMATIONS DE DIVERSES SUITES NUMÉRIQUES. 9, 18, 21*, 33, 35, 43, 104, 106*, 107, 112—114, 120—122, 130, 131, 171, 176, 177, 179; (voir *Nombres triangulaires*). Suites géométriques. 106*, 114, 121, 158, 161, 177, 179.

SPHÈRE (voir *Quadrature de surfaces de révolution, Trouver le diamètre d'une surface sphérique*).

SPHÉROÏDES (= ellipsoïdes de révolution); (voir *Courbes adjointes aux courbes méridiennes des surfaces de révolution du second degré, Quadrature de surfaces de révolution*).

STATIQUE (voir *Centre de gravité*). Principes de la statique. 18.

STATISTIQUE. 9; voir *Représentation graphique de la mortalité, Tables de mortalité, Vie moyenne et probabilités de vie*).

STÉRÉOMÉTRIE (voir *Sphère*). Théorèmes sur le volume ou la surface courbe d'un tronc de pyramide ou de cône ou du solide décrit par un trapèze tournant autour d'une droite parallèle à sa base. 184, 256, 257, 259, 261, 379, 380.

SUITES (voir *Sommation de diverses suites numériques*). Propriétés de la suite des nombres carrés impairs. 190, 234, 235*, 240*, 241*.

SURFACES COURBES (voir *Centre de gravité, Cône, Conoïde hyperbolique, Conoïde parabolique, Cubature de solides de révolution, Quadrature de surfaces courbes, Sphère, Sphéroïdes*). Ellipsoïde de révolution (voir *Sphéroïdes*); Hyperboloïde de révolution à deux nappes (voir *Conoïde hyperbolique*); Paraboloid de révolution (voir *Conoïde parabolique*).

TABLES DE MORTALITÉ. 12, 13 (voir *Représentation graphique de la mortalité*).

TANGENTES. 203*, 204*, 397, 399, 400; (voir *Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes, Méthode de Fermat pour les tangentes, Méthodes diverses de Huygens pour les tangentes des courbes algébriques, Œuvres*: Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes, Regula ad inveniendas tangentes curvarum, *Perles de de Sluse*). Conchoïde 417*, 418*; Conchoïde de de Sluse. 514, 517; Courbe de Gutfchoven 442, 443*, 445*, 501, 504, 505, 513; Cycloïde. 203*, 204*, 369, 374*, 375*; Folium de Descartes. 445, 446*, 447, 448*, 506*—512*, 516, 517; Hyperbole. 327—329; Hyperboles de divers degrés. 198*, 288, 289; Parabole. 273*, 275, 276, 513; Paraboles de divers degrés. 197*, 198*, 199, 274*—276*, 283*—285*, 288; Quadratrice de Dinostrate. 407.

THÉORÈME DE GULDIN. 280*, 281*, 297, 468, 471, 472.

THÉORÈME SUR LA SITUATION DES CENTRES DE GRAVITÉ DES SOLIDES DE RÉVOLUTION ENGENDRÉS PAR UNE MÊME FIGURE AUTOUR DE DEUX AXES PERPENDICULAIRES L'UN À L'AUTRE. 470*—473*.

TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL. 22*.

TROUVER LE DIAMÈTRE D'UNE SURFACE SPHÉRIQUE. 449, 518*.

VIE MOYENNE ET PROBABILITÉS DE VIE. 12*—14*.

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

<i>Page</i>		<i>Au lieu de</i>	<i>lisez</i>
3	ligne 3 d'en bas	Louis	Lodewijk
5	note 12. Ajoutez à cette note :	Remarquons encore que l'édition hollandaise parut aussi, dans la même année 1660 et par les soins du même libraire, comme ouvrage séparé sous le titre : Van Rekeningh in Spelen van Geluk, door Chr. Huygens toegevoegd aan het „Vijfde Bouck der Mathematifche Oeffeninghen, begriipende Dertich afdeelingen van gemengde stoffe, door Franciscus van Schooten, Profeflor Matheseos in de Univerfiteyt tot Leyden. — t Amsterdam Bij Gerrit van Goedefbergh, Boeckverkooper op 't Water, in de Delftsche Bijbel, tegenover de Nieuwe Brugh. Anno 1660”.	
16	„ 6 ligne 1	13 février 1679, p. 43	13 février 1679 (p. 50 de l'édition d'Amsterdam de 1714)
„	„ „ „ 4	Justiani	Justiniani
27	„ 7 „ 2	en lieu propre	aux p. 451—457 qui suivent ; mais consultez encore sur la cause qui a incité Huygens à s'occuper du calcul des logarithmes le dernier alinéa de la p. 433.
113	„ 9 „ 1	joueurs	joueur
165	„ 3 „ 2	d'Amsterdam	d'Amsterdam de 1714
168	„ 1. Ajoutez après le deuxième alinéa de cette note :	Remarquons encore que, dans quelques mots qui servent d'introduction à l'article de Sauveur, la rédaction du „Journal des Sçavans” mentionne (p. 41) les calculs de Huygens de la manière suivante : „Il y a lieu de croire qu'il” (c'est-à-dire Sauveur) „ne s'est pas trompé dans la supputation des Table	

<i>Page</i>	<i>Au lieu de</i>	<i>lisez</i>
	qu'il donne, puisque les trois premières se rapportent à trois de ces règles, que Monfr. Hugens a pris la peine de calculer, & dont il a donné le fondement aussi bien que des autres qui regardent les jeux de hazard, dans le <i>Traité</i> qu'il a publié autrefois sur cette matière."	
192 note 14 de la page précé-		
dente ligne 4 d'en bas	intéressant	intéressant
197 ligne 5	conoïde	conoïde
" " 1 d'en bas	verifier	vérifier
231 " 2	[1657]	1657
299 note 7 ligne 2 d'en bas	lesternes	les termes
333 " 10 " 3	[Fig. 15] fon	[Fig. 15] font
" " 10 même ligne	divisé	divisée
363 " 5 ligne 6	are	arc
382 " 1 " 10	éléments	éléments
448 " 3 " 2	Tangentes	Tangentes

SOMMAIRE.

DU CALCUL DANS LES JEUX DE HASARD	I
TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1655 à 1659	181
CONTRIBUTIONS AUX COMMENTAIRES DE VAN SCHOOTEN SUR LA „GEOMETRIA” DE DESCARTES	409
TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1661 à 1665	429
TABLES.	
I. PIÈCES ET MÉMOIRES	527
II. PERSONNES MENTIONNÉES	533
III. OUVRAGES CITÉS	538
IV. MATIÈRES TRAITÉES	544
ADDITIONS ET CORRECTIONS	555

100

Journal of Management Education 30(6)

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

... 1991/12/18 ...

22.146.1

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (1)$$

2007/07/24 14:00

1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680, 26

1007-986X

Q
113
H89
1888
t.14

Huygens, Christiaan
Oeuvres complètes

P&A Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
